

Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщение 3. Гидравлическое нагружение системы

М. С. Ковальченко

Институт проблем материаловедения им. И. Н. Францевича НАН Украины, Киев, Украина

Проанализировано движение открытой механической системы с одной степенью свободы, моделирующей одноосное растяжение вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в машине с гидравлическим приводом, создающим переменную силу и являющимся одновременно демпфирующим элементом. Показано, что переходным процессам движения рассмотренной системы соответствует неавтономная динамическая система четвертого порядка, которая в зависимости от ее управляющих параметров имеет устойчивые периодические и апериодические решения. Ввиду существенного снижения вязкого сопротивления системы, вызванного наличием гидравлического привода, апериодическое затухание характерно для переходного процесса. Показано, что система с гидравлическим элементом существенно отличается от механической системы, не содержащей такого элемента.

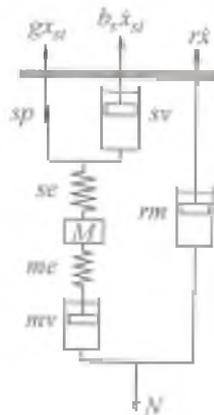


Рис. 1. Реологическая модель механического взаимодействия вязкоупругого деформационно упрочняемого тела, рабочего инструмента и гидравлического привода машины, помещенных во внешнюю вязкую среду rm (se , sv , sp – упругий, вязкий и деформационно упрочняемый элементы тела соответственно; M – приведенная масса; me и mv – упругий и вязкий элемент гидропривода машины.)

Для механических испытаний материалов и обработки их давлением наряду с машинами, имеющими механический привод, широко используются гидравлические прессы и машины с гидравлическим приводом. Механическое воздействие на материальное тело в машине с гидравлическим нагружением отличается тем, что рабочая жидкость, создающая требуемую силу, сама является демпфирующим элементом. Поэтому реологическая модель открытой механической системы с одной степенью свободы, дающая представление о взаимодействии машины с деформируемым телом [1], должна быть дополнена еще одним вязким элементом, соединенным последовательно с упругим элементом машины (рис. 1). Этот дополнительный элемент должен быть учтен в исходном уравнении скоростей рассеяния и изменения во

времени полной энергии механической системы:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_p + U_s) + 2W = N\dot{x}. \quad (1)$$

Здесь t – время; x – обобщенная координата (смещение от исходного состояния или общее удлинение системы); E_k и E_p – кинетическая и потенциальная энергия; U_s – внутренняя энергия деформируемого тела; $2W$ – скорость диссипации энергии в системе; N – внешняя сила, в рассматриваемом случае создаваемая гидроприводом; точка над переменной обозначает дифференцирование по времени. При этом

$$2E_k = M\dot{x}^2; 2E_p = c_m x_{me}^2 + c_s x_{se}^2; 2U_s = g x_{si}^2; 2W = b\dot{x}_{si}^2 + b\dot{x}_{mi}^2 + r\dot{x}^2, \quad (2)$$

где $x = x_{me} + x_{se} + x_{si} + x_{mi} = x_e + x_{si} + x_{mi}$ (x_{se} – упругое удлинение деформируемого тела, x_{me} – удлинение упругих элементов машины, x_{si} – неупругое (вязкое) удлинение деформируемого тела, x_e – удлинение упругих элементов системы, x_{mi} – вязкое удлинение гидравлического элемента машины). Во всех случаях рассматривается удлинение от исходного состояния. В рамках рассматриваемой модели сила $b_m \dot{x}_{mi}$ имеет диссипативное происхождение. Она возникает в результате прокачки вязкой жидкости через гидравлический привод и не обязательно должна сопровождаться видимым линейным удлинением. Наиболее отчетливо это проявляется при сжатии упругого тела постоянной силой, создаваемой гидроприводом без видимого удлинения элементов системы. Поэтому величину вязкого удлинения x_{mi} следует понимать как результат работы гидропривода. Следовательно, вязкое сопротивление машины b_m также зависит от характеристик гидропривода. При этом M – приведенная масса, c_m – упругая жесткость машины, c_s – упругая жесткость тела, g – деформационное упрочнение и b_s – вязкое сопротивление деформируемого тела, b_m – вязкое сопротивление гидравлического элемента машины, r – обобщенное вязкое сопротивление внешней среды. Величины c , b_s и g определяются соотношениями (6) из сообщения 1 [1].

После дифференцирования уравнения (1) и приведения полученного результата к реологической модели имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{x}_{me} + \dot{x}_{se} + \dot{x}_{mi} + \dot{x}_{si} = & \frac{c_m x_{me}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{me} + \\ & + \frac{c_s x_{se}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{se} + \frac{b_m \dot{x}_{mi}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{mi} + \frac{b_s \dot{x}_{si} + g x_{si}}{N - M\ddot{x} - r\dot{x}} \dot{x}_{si}, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда следуют соотношения

$$c_m x_{me} = c_s x_{se} = b_m \dot{x}_{mi} = b_s \dot{x}_{si} + g x_{si} = N - M\ddot{x} - r\dot{x}, \quad (4)$$

позволяющие выразить удлинения x_{me} , x_{se} и x_{mi} через общую координату x системы:

$$x_{me} = \frac{1}{c_m} (N - M\ddot{x} - r\dot{x}); \quad (5)$$

$$x_{se} = \frac{1}{c_s}(N - M\dot{x} - r\dot{x}); \quad (6)$$

$$\dot{x}_{mi} = \frac{1}{b_m}(N - M\ddot{x} - r\dot{x}). \quad (7)$$

Согласно тем же условиям (4), скорость удлинения деформируемого тела в правой части содержит само удлинение x_{si} :

$$\dot{x}_{si} = \frac{1}{b_s}(N - M\ddot{x} - r\dot{x} - gx_{si}). \quad (8)$$

Для его определения воспользуемся дополнительным дифференциальным соотношением

$$\dot{x}_{si} = \dot{x} - \dot{x}_e - \dot{x}_{mi} = \dot{x} - \frac{1}{c}(\dot{N} - M\ddot{x} - r\dot{x}) - \frac{1}{b_m}(N - M\ddot{x} - r\dot{x}), \quad (9)$$

где $c^{-1} = c_m^{-1} + c_s^{-1}$.

Дифференцирование выражения (8) и подстановка (9) в его правую часть позволяют выразить x_{si} через x :

$$\ddot{x}_{si} = \frac{1}{b_s} \left(\dot{N} - M\ddot{x} - r\dot{x} - g \left(\dot{x} - \frac{1}{c}(\dot{N} - M\ddot{x} - r\dot{x}) - \frac{1}{b_m}(N - M\ddot{x} - r\dot{x}) \right) \right). \quad (10)$$

Поэтому для составления общего уравнения необходимо суммировать не скорости (3), а ускорения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \frac{1}{c} \left(\frac{d^2 N}{dt^2} - M \frac{d^4 x}{dt^4} - r \frac{d^3 x}{dt^3} \right) + \frac{1}{b_m} \left(\frac{dN}{dt} - M \frac{d^3 x}{dt^3} - r \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \\ & + \frac{1}{b_s} \left(\frac{dN}{dt} - M \frac{d^3 x}{dt^3} - r \frac{d^2 x}{dt^2} - \right. \\ & \left. - g \left(\frac{dx}{dt} - \frac{1}{c} \left(\frac{dN}{dt} - M \frac{d^3 x}{dt^3} - r \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - \frac{1}{b_m} \left(N - M \frac{d^2 x}{dt^2} - r \frac{dx}{dt} \right) \right) \right). \quad (11) \end{aligned}$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение четвертого порядка для координаты x :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} = \\ = \frac{1}{M} \left(\frac{d^2 N}{dt^2} + \left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \frac{dN}{dt} + \frac{cg}{b_s b_m} N \right) \end{aligned} \quad (12)$$

или третьего порядка для скорости $v = \dot{x}$:

$$\ddot{v} + a_3 \dot{v} + a_2 v + a_1 v = \frac{1}{M} \left(\ddot{N} + \left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \dot{N} + \frac{cg}{b_s b_m} N \right), \quad (12a)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{cg}{Mb_s} \left(1 + \frac{r}{b_m} \right); \quad a_2 = \frac{c}{M} \left(1 + \frac{r}{b_s} \left(1 + \frac{g}{c} \right) + \frac{r}{b_m} \right) + \frac{cg}{b_s b_m}; \\ a_3 = \frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} + \frac{r}{M}, \end{aligned} \quad (13)$$

поскольку уравнение (12) в левой части является неполным для x .

При $b_m = \infty$, что соответствует выключению вязкого элемента машины, уравнение (12) путем сокращения на оператор дифференцирования d/dt преобразуется в уравнение (9) из сообщения 1 или (8) из сообщения 2 для системы с механическим приводом [1, 2]. При этом заметим, что управляющие параметры динамической системы, соответствующей уравнению (12), включают те же параметры динамической системы третьего порядка, что видно из следующего сравнения:

$$a_1 = \alpha_1 + \frac{cgr}{Mb_s b_m}; \quad a_2 = \alpha_2 + \frac{cr}{Mb_m} + \frac{cg}{b_s b_m}; \quad a_3 = \alpha_3 + \frac{c}{b_m},$$

где α_1 , α_2 и α_3 – параметры уравнения (9) для системы с механическим приводом [1].

Когда $g = 0$, что соответствует механической системе с вязкоупругим телом Максвелла, в левой части уравнения (12a) член $a_1 v$ обращается в нуль, и (12a) преобразуется в рассмотренное ранее уравнение (28) из [2]. Отметим, что в этом случае $b^{-1} = b_s^{-1} + b_m^{-1}$.

При $b = b_m$ упомянутое выше уравнение (28) из [2] описывает поведение открытой гидроприводной механической системы с упругим телом или в общем случае с деформируемым телом до его предела упругости.

Если $b_m = \infty$ и $b_s = \infty$, то уравнение (12) преобразуется в классическое уравнение второго порядка.

Прежде чем перейти к решению уравнения (12), рассмотрим возможность определения необратимого изменения длины деформируемого тела по

данным определения общей скорости и ускорения, полученным в результате решения уравнения (12) или эквивалентной динамической системы. Для этого воспользуемся левой частью соотношения (3) и условиями модели (4), которые позволяют выразить \dot{x}_e и \dot{x}_{mi} через \dot{x}_{si} :

$$\dot{x} = x_{si} + \dot{x}_e + \dot{x}_{mi} = \dot{x}_{si} + \frac{1}{c}(b_s \ddot{x}_{si} + g \dot{x}_{si}) + \frac{1}{b_m}(b_s \dot{x}_{si} + g x_{si}). \quad (14)$$

После преобразований имеем вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_{si} + \left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \dot{x}_{si} + \frac{cg}{b_s b_m} x_{si} = \frac{c}{b_s} \dot{x} \quad (15)$$

или

$$\ddot{x}_{si} + \gamma_2 \dot{x}_{si} + \gamma_1 x_{si} = \frac{c}{b_s} \dot{x} = \frac{c}{b_s} v, \quad (15a)$$

позволяющее по известным значениям общего удлинения x или общей скорости v , полученным в результате решения уравнения (12), определить необратимое удлинение деформируемого тела x_{si} . В уравнении (15a) введены обозначения

$$\gamma_1 = cg(b_s b_m)^{-1}; \quad \gamma_2 = (c+g)b_s^{-1} + cb_m^{-1}.$$

Применяя, как и в случае уравнения (1) из [2], операторный метод решения (с учетом того, что $(\gamma_2/2)^2 - \gamma_1 > 0$, и, следовательно, корни характеристического трехчлена действительны), получим

$$x_{si} = e^{-pt} \left(\frac{c}{qb_s} \int_0^t v(\tau) e^{p\tau} \operatorname{sh}q(t-\tau) d\tau + \frac{1}{q} (px_{si(0)} + \dot{x}_{si(0)}) \operatorname{sh}qt + x_{si(0)} \operatorname{ch}qt \right), \quad (16)$$

где $p := \gamma_2/2$; $q := \sqrt{p^2 - \gamma_1}$; $x_{si(0)} = x_{si(t=0)}$.

Чтобы определить x_{si} , необходимо найти также скорость удлинения деформируемого тела:

$$\dot{x}_{si}(t) = e^{-pt} \left(\frac{1}{q} \left(\frac{c}{b_s} v(t) - \gamma_1 x_{si(0)} - p \dot{x}_{si(0)} \right) \operatorname{sh}qt + \dot{x}_{si(0)} \operatorname{ch}qt \right). \quad (17)$$

При выборе узких интегралов интегрирования общую скорость v в указанных интервалах можно усреднить, тогда, введя среднюю скорость $\langle v \rangle$, вместо решений (16) и (17) следует записать

$$x_{si}(t) = e^{-pt} (A_1 \operatorname{sh}qt + B_1 \operatorname{ch}qt) + \frac{b_m}{g} \langle v \rangle; \quad (18)$$

$$\dot{x}_{si} = e^{-pt} ((qB_1 - pA_1) \operatorname{sh}qt + (qA_1 - pB_1) \operatorname{ch}qt), \quad (19)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{q} \left(px_{si(0)} + \dot{x}_{si(0)} - \frac{pb_m}{g} \langle v \rangle \right); \quad B_1 = x_{si(0)} - \frac{b_m}{g} \langle v \rangle.$$

Движение системы за пределом упругости вязкоупругого деформационно упругиего тела описывается неавтономной динамической системой, эквивалентной уравнению (12). Для системы с гидравлическим нагружением характерны три случая: нагружение переменной силой; воздействие постоянной силы и постоянная скорость нагружения. Рассмотрим последовательно эти случаи.

Воздействие переменной силы. Для решения динамической системы воспользуемся операторным методом, полагая управляющие параметры в левой части и коэффициенты в правой части уравнения (12) постоянными. Переписав уравнение при отличных от нуля начальных условиях $x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0$ и \ddot{x}_0 , имеем

$$X(s) = \frac{1}{MsD(s)} (s^2 + \gamma_2 s + \gamma_1) N(s) + \Psi(s). \quad (20)$$

Здесь $X(s)$ и $N(s)$ – однозначные функции комплексной переменной s (изображение), связанные с однозначными функциями $x(t)$ и $N(t)$ действительной переменной t (оригинал) интегральным преобразованием Лапласа; $D(s) = s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1 = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$; s_1, s_2 и s_3 – корни полинома $D(s)$; γ_1 и γ_2 определены выше;

$$\Psi(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{1}{sD(s)} (\dot{x}_0 s^2 + \xi_2 s + \xi_1), \quad (21)$$

где

$$\xi_1 = a_2 \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0 + \ddot{x}_0 - \gamma_2 N_0 M^{-1} - \dot{N}_0 M^{-1}; \quad \xi_2 = a_3 \ddot{x}_0 + \dot{x}_0 - N_0 M^{-1}.$$

После разложения выражений (20) и (21) на множители, преобразования к оригиналу (с действительной переменной t) с учетом свертки функций для первого члена в (20) справа для трех различных корней полинома $D(s)$ решение рассматриваемой неавтономной динамической системы принимает вид

$$x(t) = x_0 + \int_0^t N(\tau) (Ae^{s_1(t-\tau)} + Be^{s_2(t-\tau)} + Ce^{s_3(t-\tau)} + K) d\tau +$$

$$+A_{\psi} e^{s_1 t} + B_{\psi} e^{s_2 t} + C_{\psi} e^{s_3 t} + K_{\psi}; \quad (22)$$

$$\dot{x}(t) = N(Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{s_3 t} + K) + \dot{\psi}(t); \quad (23)$$

$$\ddot{x}(t) = A(\dot{N} + s_1 N)e^{s_1 t} + B(\dot{N} + s_2 N)e^{s_2 t} + C(\dot{N} + s_3 N)e^{s_3 t} + \dot{N}K + \ddot{\psi}(t); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = & A(\ddot{N} + s_1 \dot{N} + s_1^2 N)e^{s_1 t} + B(\ddot{N} + s_2 \dot{N} + s_2^2 N)e^{s_2 t} + \\ & + C(\ddot{N} + s_3 \dot{N} + s_3^2 N)e^{s_3 t} + \ddot{N}K + \ddot{\psi}(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$A = -\frac{s_1^2 + \gamma_2 s_1 + \gamma_1}{Ms_1(s_1 - s_2)(s_3 - s_1)}; \quad B = \frac{s_2^2 + \gamma_2 s_2 + \gamma_1}{Ms_2(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)};$$

$$C = \frac{s_3^2 + \gamma_2 s_3 + \gamma_1}{Ms_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}; \quad K = -\frac{\gamma_1}{Ms_1 s_2 s_3} = \frac{\gamma_1}{Ma_1};$$

$$A_{\psi} = -\frac{\dot{x}_0 s_1^2 + \xi_2 s_1 + \xi_1}{s_1(s_1 - s_2)(s_3 - s_1)}; \quad B_{\psi} = \frac{\dot{x}_0 s_2^2 + \xi_2 s_2 + \xi_1}{s_2(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)};$$

$$C_{\psi} = \frac{\dot{x}_0 s_3^2 + \xi_2 s_3 + \xi_1}{s_3(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}; \quad K_{\psi} = -\frac{\xi_1}{s_1 s_2 s_3} = \frac{\xi_1}{a_1}.$$

При двух комплексно сопряженных корнях $s_{1,2} = -p \pm iq$ и одном действительном корне $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$, где p и q определяются теми же соотношениями, что и для системы с механическим приводом [2], если в них параметры α_n заменить на a_n , решение (22) для удлинения преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \\ & + e^{-pt} \left(\int_0^t N(\tau) e^{p\tau} (A_0 \sin q(t-\tau) + B_0 \cos q(t-\tau)) d\tau + A_1 \sin qt + B_1 \cos qt \right) + \\ & + e^{(2p-a_3)t} \left(C_0 \int_0^t N(\tau) e^{-(2p-a_3)\tau} d\tau + C_1 \right) + K_0 \int_0^t N(\tau) d\tau + K_1, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{Mq((3p - a_3)^2 + q^2)} \left(p(3p - a_3) + q^2 - (3p - a_3) \left(\frac{c + g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(p(3p - a_3) - q^2)cg}{(p^2 + q^2)b_s b_m} \Big); \\
 B_0 = & -\frac{1}{M((3p - a_3)^2 + q^2)} \left(2p - a_3 + \frac{c + g}{b_s} + \frac{c}{b_m} - \frac{(4p - a_3)cg}{(p^2 + q^2)b_s b_m} \right); \\
 C_0 = & \frac{1}{M((3p - a_3)^2 + q^2)} \left(2p - a_3 + \frac{c + g}{b_s} + \frac{c}{b_m} + \frac{cg}{(2p - a_3)b_s b_m} \right); \\
 K_0 = & -\frac{cg(b_s b_m)^{-1}}{M(2p - a_3)(p^2 + q^2)} = \frac{cg}{a_1 M b_s b_m}; \\
 A_1 = & \frac{1}{q((3p - a_3)^2 + q^2)} \times \\
 & \times \left((p(3p - a_3) + q^2)\dot{x}_0 - (3p - a_3)\xi_2 + \frac{p(3p - a_3) - q^2}{p^2 + q^2}\xi_1 \right); \\
 B_1 = & -\frac{1}{(3p - a_3)^2 + q^2} \left((2p - a_3)\dot{x}_0 + \xi_2 - \frac{4p - a_3}{p^2 + q^2}\xi_1 \right); \\
 C_1 = & \frac{1}{(3p - a_3)^2 + q^2} \left((2p - a_3)\dot{x}_0 + \xi_2 + \frac{1}{2p - a_3}\xi_1 \right); \\
 K_1 = & \frac{1}{a_1} \left(a_2 \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0 + \ddot{x}_0 - \left(\frac{c + g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \frac{N_0}{M} - \frac{\dot{N}_0}{M} \right).
 \end{aligned}$$

Скорость, ускорение и производную ускорения (вторую производную скорости) по времени выразим общим соотношением:

$$x_n(t) = e^{-pt}(A_n \sin qt + B_n \cos qt) + C_n e^{(2p - a_3)t} + K_n, \quad (27)$$

где индекс $n = 2$ соответствует скорости $x_2(t) := \dot{x}(t)$, $n = 3$ – ускорению $x_3(t) := \ddot{x}(t)$, $n = 4$ – производной ускорения по времени $x_4(t) := \ddot{\dot{x}}(t)$;

$$A_2 = NA_0 - pA_1 - qB_1; \quad B_2 = NB_0 - pB_1 + qA_1; \quad C_2 = NC_0 + (2p - a_3)C_1;$$

$$K_2 = NK_0; \quad A_3 = A_0(\dot{N} - pN) - qB_0N + (p^2 - q^2)A_1 + 2pqB_1;$$

$$B_3 = B_0(\dot{N} - pN) + qA_0N + (p^2 - q^2)B_1 - 2pqA_1;$$

$$C_3 = C_0(\ddot{N} + (2p - \alpha_3)\dot{N}) + (2p - \alpha_3)^2 C_1; \quad K_3 = \dot{N}K_0;$$

$$A_4 = A_0(\ddot{N} - 2p\dot{N} + (p^2 - q^2)N) - 2qB_0(\dot{N} - pN) - \\ - p(p^2 - 3q^2)A_1 - q(3p^2 - q^2)B_1;$$

$$B_4 = B_0(\ddot{N} - 2p\dot{N} + (p^2 - q^2)N) - 2qA_0(\dot{N} - pN) - \\ - p(p^2 - 3q^2)B_1 + q(3p^2 - q^2)A_1;$$

$$C_4 = C_0(\ddot{N} + 2(2p - \alpha_3)\dot{N} + (2p - \alpha_3)^2 N) + (2p - \alpha_3)^3 C_1; \quad K_4 = \ddot{N}K_0.$$

При различных действительных корнях $s_{1,2} = -p \pm q$ и $s_3 = 2p - \alpha_3$ полинома $D(s)$ решение (22) имеет вид, аналогичный выражению (26), но при этом тригонометрические функции должны быть заменены на гиперболические, а в выражениях для коэффициентов в членах, содержащих q^2 , — знаки на противоположные. С учетом сказанного скорость, ускорение и производную ускорения по времени выразим подобно (27) общим соотношением (с теми же индексами):

$$x_n(t) = e^{-pt}(A_n \operatorname{sh}qt + B_n \operatorname{ch}qt) + C_n e^{(2p - \alpha_3)t} + K_n, \quad (28)$$

где

$$A_2 = NA_0 - pA_1 + qB_1; \quad B_2 = NB_0 - pB_1 + qA_1; \quad C_2 = NC_0 + (2p - \alpha_3)C_1;$$

$$K_2 = NK_0; \quad A_3 = A_0(\dot{N} - pN) + qB_0N + (p^2 + q^2)A_1 - 2pqB_1;$$

$$B_3 = B_0(\dot{N} - pN) + qA_0N + (p^2 + q^2)B_1 - 2pqA_1;$$

$$C_3 = C_0(\dot{N} + (2p - \alpha_3)N) + (2p - \alpha_3)^2 C_1; \quad K_3 = \dot{N}K_0;$$

$$A_4 = A_0(\ddot{N} - 2p\dot{N} + (p^2 + q^2)N) + 2qB_0(\dot{N} - pN) - \\ - p(p^2 + 3q^2)A_1 + q(3p^2 + q^2)B_1;$$

$$B_4 = B_0(\ddot{N} - 2p\dot{N} + (p^2 + q^2)N) + 2qA_0(\dot{N} - pN) - \\ - p(p^2 + 3q^2)B_1 + q(3p^2 + q^2)A_1;$$

$$C_4 = C_0(\ddot{N} + 2(2p - \alpha_3)\dot{N} + (2p - \alpha_3)^2 N) + (2p - \alpha_3)^3 C_1; \quad K_4 = \ddot{N}K_0.$$

При кратном корне $s_1 = s_2 = -p$ и $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$ изображение координаты $X(s)$ принимает вид

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2 + \gamma_2 s + \gamma_1}{Ms(s-s_1)^2(s-s_3)} N(s) + \frac{x_0}{s} + \frac{\dot{x}_0 s^2 + \xi_2 s + \xi_1}{s(s-s_1)^2(s-s_3)} = \\ &= \left(\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{(s-s_1)^2} + \frac{C}{s-s_3} + \frac{K}{s} \right) N(s) + \\ &+ \frac{x_0}{s} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{B_1}{(s-s_1)^2} + \frac{C_1}{s-s_3} + \frac{K_1}{s}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{M(s_3 - s_1)^2} \left(s_3 + \gamma_2 - \frac{s_3 - 2s_1}{s_1^2} \gamma_1 \right) = \\ &= -\frac{1}{M(3p - a_3)^2} \left(2p - a_3 + \frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} - \frac{(4p - a_3)cg}{p^2 b_s b_m} \right); \\ B &= -\frac{s_1^2 + s_1 \gamma_2 + \gamma_1}{Ms_1(s_3 - s_1)} = \frac{1}{M(3p - a_3)} \left(p - \frac{c+g}{b_s} - \frac{c}{b_m} + \frac{cg}{pb_s b_m} \right); \\ C &= \frac{s_3^2 + s_3 \gamma_2 + \gamma_1}{Ms_3(s_3 - s_1)^2} = \frac{1}{M(3p - a_3)^2} \left(2p - a_3 + \frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} + \frac{cg}{(2p - a_3)b_s b_m} \right); \\ K &= -\frac{\gamma_1}{Ms_1^2 s_3} = \frac{cg}{a_1 M b_s b_m}; \\ A_1 &= -\frac{s_1^2 s_3 \dot{x}_0 + s_1^2 \xi_2 - (s_3 - 2s_1) \xi_1}{s_1^2 (s_3 - s_1)^2} = \\ &= -\frac{1}{(3p - a_3)^2} \left((2p - a_3) \dot{x}_0 + \xi_2 - \frac{4p - a_3}{p^2} \xi_1 \right); \\ B_1 &= -\frac{s_1^2 \dot{x}_0 + s_1 \xi_2 + \xi_1}{s_1 (s_3 - s_1)} = \frac{1}{3p - a_3} (p \dot{x}_0 - \xi_2 + p^{-1} \xi_1); \\ C_1 &= \frac{s_3^2 \dot{x}_0 + s_3 \xi_2 + \xi_1}{s_3 (s_3 - s_1)^2} = \frac{1}{(3p - a_3)^2} \left((2p - a_3) \dot{x}_0 + \xi_2 + \frac{1}{2p - a_3} \xi_1 \right), \end{aligned}$$

коэффициент K_1 определен выше.

Преобразование изображения к оригиналу дает зависимость удлинения от времени:

$$x(t) = x_0 + e^{-pt} \left(\int_0^t N(\tau) e^{p\tau} (A + B(t - \tau)) d\tau + A_1 + B_1 t \right) + e^{(2p-a_3)t} \left(C \int_0^t N(\tau) e^{-(2p-a_3)\tau} d\tau + C_1 \right) + K \int_0^t N(\tau) d\tau + K_1. \quad (30)$$

Скорость, ускорение и производную ускорения выразим общим соотношением с теми же индексами, что и для (27) и (28):

$$x_n(t) = e^{-pt} (A_n + B_n t) + C_n e^{(2p-a_3)t} + K_n, \quad (31)$$

где

$$A_2 = AN - pA_1 + B_1, \quad B_2 = BN - pB_1, \quad C_2 = CN + (2p - \alpha_3)C_1, \quad K_2 = KN;$$

$$A_3 = A(\dot{N} - pN) + p^2 A_1 - 2pB_1, \quad B_3 = B(\dot{N} - pN) + p^2 B_1,$$

$$C_3 = C(\dot{N} + (2p - \alpha_3)N) + (2p - \alpha_3)^2 C_1, \quad K_3 = K\dot{N};$$

$$A_4 = A(\ddot{N} - 2p\dot{N}) + B\dot{N} + p(pA - B)N - p^2(pA_1 - 3B_1),$$

$$B_4 = B_0(\ddot{N} - 2p\dot{N} + p^2 N) - p^3 B_1,$$

$$C_4 = C(\dot{N} + 2(2p - \alpha_3)\dot{N} + (2p - \alpha_3)^2 N) + (2p - \alpha_3)^3 C_1, \quad K_4 = K\ddot{N}.$$

Воздействие постоянной силы. При воздействии постоянной силы N_0 или выборе узких интервалов интегрирования, когда силу можно усреднить, поведение механической системы до предела упругости деформируемого тела описывается, как отмечено выше, уравнением (28) из [2].

Выше предела упругости тела решения (26), (27) динамической системы в случае комплексно сопряженных корней $s_{1,2} = -p \pm iq$ и действительного корня $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$ преобразуются к виду

$$x(t) = x_0 + e^{-pt} (A_1 \sin qt + B_1 \cos qt) + C_1 e^{(2p-a_3)t} + Jt + K; \quad (32)$$

$$x_2(t) := \dot{x}(t) = e^{-pt} (A_2 \sin qt + B_2 \cos qt) + C_2 e^{(2p-a_3)t} + J. \quad (33)$$

При $n = 3$ и $n = 4$, соответствующим ускорению и производной ускорения, имеем

$$x_n(t) = e^{-pt} (A_n \sin qt + B_n \cos qt) + C_n e^{(2p-a_3)t}. \quad (34)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{q((3p-a_3)^2 + q^2)} (((p-a_3)(3p-a_3) + q^2)(\dot{x}_0 - J) -$$

$$-(3p-a_3)\ddot{x}_0 - (2p-a_3)(p(3p-a_3) - q^2)K);$$

$$B_1 = -\frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 + (2p-a_3)(4p-a_3)K}{(3p-a_3)^2 + q^2};$$

$$C_1 = \frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - (p^2 + q^2)K}{(3p-a_3)^2 + q^2};$$

$$J = \frac{N_0 cg}{a_1 M b_s b_m}; \quad K = \frac{1}{a_1} (a_2(\dot{x}_0 - J) + a_3 \ddot{x}_0 + \ddot{x}_0);$$

$$A_2 = -pA_1 - qB_1; \quad B_2 = -pB_1 + qA_1; \quad C_2 = (2p - \alpha_3)C_1;$$

$$A_3 = (p^2 - q^2)A_1 + 2pqB_1; \quad B_3 = (p^2 - q^2)B_1 - 2pqA_1;$$

$$C_3 = (2p - \alpha_3)^2 C_1; \quad A_4 = -p(p^2 - 3q^2)A_1 - q(3p^2 - q^2)B_1;$$

$$B_4 = -p(p^2 - 3q^2)B_1 + q(3p^2 - q^2)A_1; \quad C_4 = (2p - \alpha_3)^3 C_1.$$

Для трех различных действительных корней $s_{1,2} = -p \pm q$ и $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$ выражения для переменных поведения системы $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ и $x_4(t)$ имеют вид, аналогичный приведенным выше соотношениям (32), (33) и (34) соответственно, в которых тригонометрические функции заменены гиперболическими, а в выражениях для коэффициентов знаки в членах, содержащих q^2 , заменены на противоположные. При этом изменяются также выражения для A_n и B_n :

$$A_2 = -pA_1 + qB_1, \quad B_2 = -pB_1 + qA_1;$$

$$A_3 = (p^2 + q^2)A_1 - 2pqB_1, \quad B_3 = (p^2 + q^2)B_1 - 2pqA_1;$$

$$A_4 = -p(p^2 + 3q^2)A_1 + q(3p^2 + q^2)B_1,$$

$$B_4 = -p(p^2 + 3q^2)B_1 + q(3p^2 + q^2)A_1.$$

Для кратного корня $s_1 = s_2 = -p$ и $s_3 = 2p - a_3$ зависимости удлинения, скорости, ускорения и производной ускорения от времени при постоянной силе или усреднении ее в интервале интегрирования имеют вид

$$x(t) = x_0 + e^{-pt}(A_1 + B_1t) + C_1e^{(2p-a_3)t} + Jt + K; \quad (35)$$

$$x_2(t) := \dot{x}(t) = e^{-pt}(A_2 + B_2t) + C_2e^{(2p-a_3)t} + J; \quad (36)$$

$$x_n(t) = e^{-pt}(A_n + B_nt) + C_ne^{(2p-a_3)t} \quad (37)$$

для $n=3$ и $n=4$, соответствующим ускорению и производной ускорения. Здесь

$$A_1 = -\frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 + (2p - a_3)(4p - a_3)K}{(3p - a_3)^2};$$

$$B_1 = -\frac{(p + a_3)\dot{x}_0 + \ddot{x}_0 - (5p - a_3)J + p(2p - a_3)K}{3p - a_3};$$

$$C_1 = \frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - p^2K}{(3p - a_3)^2},$$

при этом соотношения для J и K такие же, как и в предыдущем случае;

$$A_2 = -pA_1 + B_1, \quad B_2 = -pB_1, \quad C_2 = (2p - a_3)C_1;$$

$$A_3 = p^2A_1 - 2pB_1, \quad B_3 = p^2B_1, \quad C_3 = (2p - a_3)^2C_1;$$

$$A_4 = -p^2(pA_1 - 3B_1), \quad B_4 = -p^3B_1, \quad C_4 = (2p - a_3)^3C_1.$$

Постоянная скорость нагружения системы. При постоянной скорости нагружения $\dot{N} = N_0 = \text{const}$ механической системы с гидравлическим приводом, воздействующим на упругое тело (или в общем случае на деформируемое тело до его предела упругости), ввиду того, что $b_s = \infty$ и вследствие этого изменяются управляющие параметры динамической системы, уравнение (12) принимает вид

$$\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_2x = \frac{1}{M} \left(\dot{N}_0 + \frac{c}{b_m}(N_0 + \dot{N}_0t) \right), \quad (38)$$

где $a_2 = cM^{-1}(1 + rb_m^{-1})$; $a_3 = cb_m^{-1} + rM^{-1}$; N_0 – начальная сила.

Для решения этого уравнения операторным методом представим его изображение при $s_1 \neq s_2$:

$$X(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{\dot{x}_0s^3 + ls^2 + ms + n}{s^3(s^2 + a_3s + a_2)} = \frac{x_0}{s} + \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \frac{H}{s^3} + \frac{J}{s^2} + \frac{K}{s}, \quad (39)$$

где

$$l := a_3 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0; \quad m := M^{-1}(\dot{N}_0 + cb_m^{-1} N_0); \quad n := \dot{N}_0 c (Mb_m)^{-1};$$

$$A = \frac{\dot{x}_0 - J + Ks_2}{s_1 - s_2}; \quad B = -\frac{\dot{x}_0 - J + Ks_1}{s_1 - s_2}; \quad H = \frac{n}{s_1 s_2} = \frac{n}{a_2} = \frac{\dot{N}_0 c}{a_2 Mb_m};$$

$$J = \frac{1}{a_2} \left(\frac{1}{M} \left(\dot{N}_0 + \frac{c}{b_m} N_0 \right) - a_3 H \right); \quad K = \frac{1}{a_2} (a_3 (\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - H).$$

Преобразование изображения (39) к оригиналу дает решение

$$x(t) = x_0 + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + \frac{1}{2} Ht^2 + Jt + K, \quad (40)$$

которое для комплексных корней $s_{1,2} = -p \pm iq$ (где $p = a_3 / 2$ и $q = \sqrt{a_2 - p^2}$) приобретает вид

$$x(t) = x_0 + e^{-pt} (A_1 \sin qt + B_1 \cos qt) + \frac{1}{2} Ht^2 + Jt + K, \quad (41)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{q} (\dot{x}_0 - J - pK); \quad B_1 = -K;$$

H, J и K определены выше.

Временные зависимости скорости и ускорения выражаются соотношениями

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + e^{-pt} (A_2 \sin qt + B_2 \cos qt) + Ht + J; \quad (42)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-pt} (A_3 \sin qt + B_3 \cos qt) + H, \quad (43)$$

где

$$A_2 = \frac{1}{q} (-p(\dot{x}_0 - J) + a_2 K); \quad B_2 = \dot{x}_0 - J;$$

$$A_3 = \frac{1}{q} ((p^2 - q^2)(\dot{x}_0 - J) - pa_2 K); \quad B_3 = \ddot{x}_0 - H.$$

В случае действительных корней $s_{1,2} = -p \pm q$ ($p = a_3 / 2$ и $q = \sqrt{p^2 - a_2}$) трехчлена $s^2 + a_3 s + a_2$ в приведенных выше соотношениях следует заменить тригонометрические функции гиперболическими, а для коэффициентов использовать формулы, приведенные выше.

При кратном корне $s_1 = s_2 = -p$ полученное таким же методом решение имеет вид

$$x(t) = x_0 + e^{-pt}(A_1 + B_1t) + \frac{1}{2}Ht^2 + Jt + K; \quad (44)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-pt}(A_2 + B_2t) + Ht + J; \quad (45)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-pt}(A_3 + B_3t) + H, \quad (46)$$

где

$$A_1 = -K; \quad B = \dot{x}_0 - J - pK,$$

при этом коэффициенты A_n и B_n , входящие в соотношения (45) и (46), выражаются через A_1 и B_1 по тем же формулам, что и для соотношений (36) и (37), а коэффициенты H, J и K – по приведенным выше соотношениям (для случая разных корней трехчлена $D(s)$).

Постоянной скорости нагружения рассматриваемой системы выше предела упругости вязкоупругого деформационно упрочняемого тела соответствует уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d^4x}{dt^4} + a_3 \frac{d^3x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} = \\ & = \frac{1}{M} \left(\left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \dot{N}_0 + \frac{cg}{b_s b_m} (N_0 + \dot{N}_0 t) \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Преобразование его в изображение с комплексной переменной s представим в виде

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{x_0}{s} + \frac{\dot{x}_0 s^4 + ks^3 + ls^2 + ms + n}{s^3(s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1)} = \\ &= \frac{x_0}{s} + \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s-s_3} + \frac{H}{s^3} + \frac{J}{s^2} + \frac{K}{s}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь

$$k := a_3 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0; \quad l := a_2 \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0 + \ddot{\ddot{x}}_0;$$

$$m := \frac{1}{M} \left(\left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \dot{N}_0 + \frac{cg}{b_s b_m} N_0 \right); \quad n := \frac{\dot{N}_0 cg}{M b_s b_m},$$

при этом коэффициенты разложения на множители определяются соотношениями

$$A = - \frac{\dot{x}_0 s_1 + k - H + J(s_2 + s_3) - K s_2 s_3}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_1)},$$

$$B = \frac{\dot{x}_0 s_2 + k - H + J(s_1 + s_3) - K s_1 s_3}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)};$$

$$C = \frac{\dot{x}_0 s_3 + k - H + J(s_1 + s_2) - K s_1 s_2}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)};$$

$$H = -\frac{n}{s_1 s_2 s_3} = \frac{n}{a_1} = \frac{\dot{N}_0 c g}{a_1 M b_s b_m};$$

$$J = \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{M} \left(\left(\frac{c+g}{b_s} + \frac{c}{b_m} \right) \dot{N}_0 + \frac{c g}{b_s b_m} N_0 \right) - a_2 H \right);$$

$$K = \frac{1}{a_1} (a_2 (\dot{x}_0 - J) + a_3 (\ddot{x}_0 - H) + \ddot{x}_0).$$

Преобразование (48) к оригиналу с действительной переменной t дает решение уравнения (47) для трех разных корней полинома $D(s)$:

$$x(t) = x_0 + A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} + C e^{s_3 t} + 2^{-1} H t^2 + J t + K. \quad (49)$$

В случае комплексно сопряженных корней $s_{1,2} = -p \pm iq$ и действительного корня $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$ это решение принимает вид

$$x(t) = x_0 + e^{-pt} (A_1 \sin qt + B_1 \cos qt) + C_1 e^{(2p-a_3)t} + 2^{-1} H t^2 + J t + K. \quad (50)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{q((3p-a_3)^2 + q^2)} (((p-a_3)(3p-a_3) + q^2)(\dot{x}_0 - J) -$$

$$-(3p-a_3)(\ddot{x}_0 - H) - (2p-a_3)(p(3p-a_3) - q^2)K);$$

$$B_1 = -\frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - H + (2p-a_3)(4p-a_3)K}{(3p-a_3)^2 + q^2};$$

$$C_1 = \frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - H - (p^2 + q^2)K}{(3p-a_3)^2 + q^2};$$

H, J, K определены выше для разложения (48).

Временная зависимость скорости определяется соотношением

$$x_2 := \dot{x}(t) = e^{-pt} (A_2 \sin qt + B_2 \cos qt) + C_2 e^{(2p-a_3)t} + H t + J, \quad (51)$$

а временные зависимости ускорения и производной ускорения – соотношениями

$$x_3(t) := \ddot{x}(t) = e^{-pt}(A_3 \sin qt + B_3 \cos qt) + C_3 e^{(2p-a_3)t} + H; \quad (52)$$

$$x_4(t) := \ddot{\ddot{x}}(t) = e^{-pt}(A_4 \sin qt + B_4 \cos qt) + C_4 e^{(2p-a_3)t} \quad (53)$$

с выражениями для коэффициентов A_n, B_n и C_n через A_1, B_1 и C_1 такими же, как и для зависимостей (33), (34).

В случае трех действительных корней полинома $D(s)$ можно либо непосредственно воспользоваться решением (49), либо, если представить корни как $s_{1,2} = -p \pm q$ и $s_3 = 2p - a_3$, решением (50), в котором при этом следует заменить тригонометрические функции гиперболическими и изменить знаки при q^2 на противоположные в выражениях для коэффициентов A_1, B_1 и C_1 . Коэффициенты A_n, B_n и C_n в зависимостях скорости, ускорения и производной ускорения от времени определяются через A_1, B_1 и C_1 по формулам, приведенным для действительных корней после зависимостей (32)–(34).

Для случая кратного корня $s_1 = s_2 = -p$ и $s_3 = 2p - a_3$ полинома $D(s)$ решение рассматриваемой динамической системы имеет вид

$$x(t) = x_0 + e^{-pt}(A_1 + B_1 t) + C_1 e^{(2p-a_3)t} + 2^{-1} H t^2 + J t + K; \quad (54)$$

$$\dot{x}(t) = e^{-pt}(A_2 + B_2 t) + C_2 e^{(2p-a_3)t} + H t + J; \quad (55)$$

$$\ddot{x}(t) = e^{-pt}(A_3 + B_3 t) + C_3 e^{(2p-a_3)t} + H; \quad (56)$$

$$\ddot{\ddot{x}}(t) = e^{-pt}(A_4 + B_4 t) + C_4 e^{(2p-a_3)t}, \quad (57)$$

где

$$A_1 = -\frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - H + (2p - a_3)(4p - a_3)K}{(3p - a_3)^2};$$

$$B_1 = -\frac{(p + a_3)\dot{x}_0 + \ddot{x}_0 - H - (5p - a_3)J + p(2p - a_3)K}{3p - a_3};$$

$$C_1 = \frac{2p(\dot{x}_0 - J) + \ddot{x}_0 - H - p^2 K}{(3p - a_3)^2};$$

коэффициенты H, J и K определены выше. Определение коэффициентов A_n, B_n и C_n по приведенным здесь коэффициентам A_1, B_1 и C_1 производится так же, как и для соотношений (35)–(37).

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета зависимостей общего удлинения x , удлинения упругих элементов x_e и необратимого удлинения деформируемого тела x_{si} от времени при постоянной скорости нагружения $N_0 = 1000$ Н/с системы с гидравлическим элементом, обладающим вязким сопротивлением $b_m = 55000$ Н·с/м, и при остальных параметрах системы таких же, как в сообщении [2], т.е. $c = 10$ МН/м, $b_{si} = 5$ МН·с/м, $g = 5$ МН/м, $M = 1000$ кг, $r = 1000$ МН·с/м в предположении предела упругости деформируемого тела при $N = 300$ Н. Значение вязкого сопротивления гидравлического элемента системы выбрано с таким расчетом, чтобы оно было не слишком высоким, а решения системы были бы периодическими, что позволило бы сопоставить их с такими же решениями механической системы без гидравлического элемента.

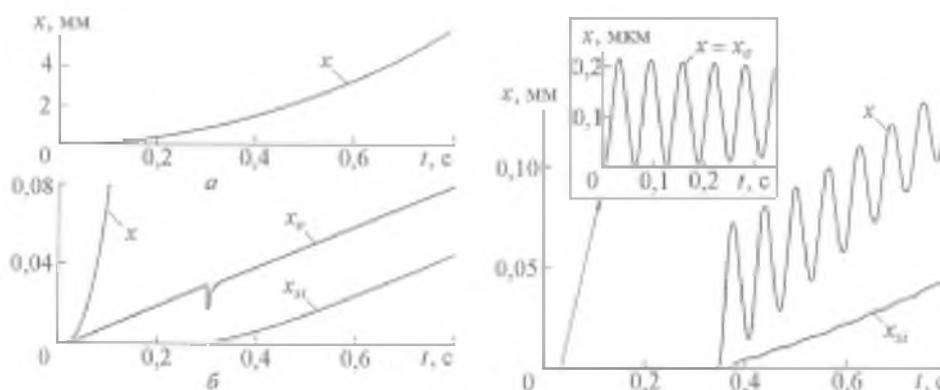


Рис. 2. Временные зависимости общего удлинения x (а), удлинения упругих элементов x_e и необратимого удлинения деформируемого тела x_{si} (б) при постоянной скорости нагружения системы с гидравлическим приводом.

Рис. 3. Временные зависимости общего удлинения x и необратимого удлинения деформируемого тела x_{si} при постоянной скорости нагружения механической системы.

Результаты расчета механической системы, не содержащей гидравлического элемента, представлены на рис. 3. Расчет поведения этой системы до предела упругости деформируемого тела при той же постоянной скорости нагружения проведен с использованием решения динамической системы, эквивалентной уравнению

$$\ddot{x} + \frac{r}{M} \dot{x} + \frac{c}{M} x = \frac{1}{M} (N_0 + \dot{N}_0 t), \quad (58)$$

и выше предела упругости тела – с использованием решений системы, соответствующей уравнению

$$\ddot{x} + \alpha_3 \dot{x} + \alpha_2 x + \alpha_1 x = \frac{1}{M} \left(\dot{N}_0 + \frac{c+g}{b_s} (N_0 + \dot{N}_0 t) \right). \quad (59)$$

Сопоставление результатов расчетов показывает, что, несмотря на периодический характер решения, поведение системы с гидравлическим элементом резко отличается от такой же системы без гидравлического элемента. Наличие последнего сильно сокращает переходный процесс, и в целом система с гидравлическим элементом проявляет вязкое поведение уже на стадии упругого растяжения деформируемого тела. При переходе через предел упругости обнаруживается кратковременное снижение удлинения упругих элементов системы x_e . Для системы без гидравлического элемента начальная стадия нагружения характеризуется интенсивными упругими колебаниями с небольшой амплитудой, составляющей десятые доли мкм. При переходе через предел упругости вследствие естественного затягивания стадии упругого растяжения до завершения полупериода колебаний (достижения его верхней точки) обнаруживается резкое увеличение амплитуды колебаний общего удлинения x . При этом изменение во времени необратимого (вязкого) удлинения деформируемого тела имеет заметно выраженный пульсирующий характер.

Из сопоставления поведения рассмотренных систем можно сделать вывод о том, что испытание материалов в машинах с гидравлическим приводом носит весьма спокойный характер. При этом деформируемый материал не подвергается дополнительным колебательным воздействиям, влияющим на структурные повреждения в процессе испытания. Такие испытания в большей мере соответствуют “статическим” испытаниям, чем испытаниям в машине с механическим нагружением, где могут проявляться динамические эффекты, связанные с переходным процессом нагружения. В то же время обработка материалов в машинах с механическим нагружением может оказаться более эффективной в связи с присущими этим системам переходными колебательными процессами, которые могут оказать благоприятное воздействие на формирование более мелкозернистой структуры обрабатываемого материала и в итоге на повышение его механических свойств.

Резюме

Проаналізовано рух відкритої механічної системи з одним ступенем свободи, що моделює одноосьове розтягування в'язкопружного деформаційно зміцнюваного тіла в машині з гідравлічним приводом, який створює змінну силу і в той же час є демпфівальним елементом. Показано, що перехідним процесам руху відповідає неавтономна динамічна система четвертого порядку, яка в залежності від її керуючих параметрів має стійкі періодичні та аперіодичні розв'язки. З огляду суттєвого зниження в'язкого опору системи, викликаного наявністю гідравлічного приводу, аперіодичне згасання є характерним для перехідного процесу. Показано, що система з гідравлічним елементом суттєво відрізняється від механічної системи, що немає такого елемента.

1. *Ковальченко М. С.* Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщ. 1. Предписанное движение системы // Пробл. прочности. – 1998. – № 4. – С. 16 – 27.
2. *Ковальченко М. С.* Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщ. 2. Воздействие внешней силы // Там же. – № 5. – С. 12 – 26.

Поступила 04. 03. 99