УДК 62.507:338
І.С. Сакунова

Імітаційне моделювання в задачах дослідження матеріальних потоків логістичних систем

Теорія і практика управління логістичними системами потребують залучення різноманітних методів створення систем безперервного прогнозування, контролю та оперативного управління матеріальними потоками. В статті розглядається вибір та практичне застосування засобів формального опису матеріальних та інформаційних потоків логістичних систем як універсальних алгоритмічних схем, що володіють теоретично обґрунтованою концептуальною базою і враховують стохастичний характер реальних систем.
***Ключові слова**: імовірнісні автомати, кусково-лінійні агрегати, модулі-агрегати, логістичні системи, однорідні матеріальні потоки, модельні інформаційні потоки, стохастичні інформаційні потоки, процеси перетікання.*

A theory and practice of the logistic systems' management needs use of various methods for creation of the systems of continuous prognostication, control and operative management of material streams. In the article a choice and practical application for facilities of formal specification of financial and informative streams as logistic system. These facilities are universal algorithmic charts which own the conceptual base grounded on theory and take into account stochastic character of the real systems.
***Keywords:** probabilistic automats, piece-linear aggregates, modules-aggregates, logistic systems, homogeneous material streams, informative streams of models, stochastic informative streams, flowing processes.*

Вступ. Зростаючий інтерес до логістики як теорії і практики управління матеріальними та інформаційними потоками пов'язаний із зміною пріоритетів в економічній діяльності від дослідження суб'єктів переміщення до управління потоковими процесами, що обумовлює сучасну ефективну форму інтеграції постачання, виробництва, транспортного розподілення та ринку.

Концептуальна сутність логістики інтерпретується як сукупність засобів та способів комплексного вирішення проблем, що виникають в процесі управління матеріальними та інформаційними потоками, з метою гармонізації інтересів всіх учасників переміщення потоків [1].

Сутністю матеріального потоку як ключової категорії логістичної системи є неперервне переміщення продуктів праці в процесі застосування до них логістичних операцій формування, транспортування та збуту продукції.

Кожному елементарному однорідному матеріальному потокові (ОМП) логістичної системи відповідає деяка сукупність інформаційних потоків, що визначає його структурно-функціональні складові - характеристики:

- **часова складова**: неперервний або дискретний вид пересування матеріальних об'єктів, що належать даному ОМП; визначення часу надходження матеріальних об'єктів потоку в конкретну точку траєкторії пересування матеріалів; швидкість переміщення ОМП; прогнозні та реальні строки виконання замовлення і доставки продукції;

- **структурна складова:** даний ОМП є вхідним, внутрішнім або вихідним; структурні зв'язки даного ОМП з другими ОМП в логістичній системі; параметри траєкторії переміщення матеріалів даного ОМП;

- **кількісна складова:** найменування матеріального ресурсу, що складає даний ОМП; кількість матеріальних ресурсів, що знаходяться в конкретній точці траєкторії переміщення матеріалів потоку; габаритні та вагові характеристики ОМП;

- якісна **складова:** якісний стан ОМП в даний момент часу (перебування в стані навантаження-розвантаження, процес переміщення ОМП, стан простою в результаті поломки-ремонту, форс-мажорних обставин, або через неможливість початку пересування ОМП або неможливість доставки продукції до споживача); рівень відповідності прогнозних характеристик ОМП реальним характеристикам; оцінка забезпечення синхронізації процесів збереження, доставки і збуту продукції.

Невирішені проблеми. З метою реалізації мети логістики – організації оптимальних процесів переміщення – розглядають певні потокоутворюючі сукупності дій з матеріальними об'єктами та супроводжуючими їх інформаційними потоками – так звані логістичні операції.

Класифікуючи основні логістичні операції (ЛО) за природою потоку, розподілимо їх на:

- ЛО з реальними матеріальними потоками,
- ЛО з реальними інформаційними потоками,
- Регулюючі ЛО по управлінню матеріальними потоками, що включають в себе прогнозування, контроль, оперативне управління, формування та вибір оптимальних рішень за допомогою математичних методів.

В статті основну увагу буде приділено регулюючим ЛО, оскільки реалізація більшості передових логістичних концепцій і систем стає неможливою без застосування методів математичного моделювання та інформаційно-програмного забезпечення. Математичні моделі формують віртуальні (імітаційні) матеріальні та інформаційні потоки, постаючи інструментом методологічної бази логістики, призначеним на допомогу спеціалістам в прийнятті оптимальних рішень.

Важливо відмітити розподіл віртуальних інформаційних потоків в процесі побудови моделей на дві категорії. До першої категорії слід віднести **модельні інформаційні потоки (МІП)**, які визначають структурно-функціональні характеристики однорідних матеріальних потоків (ОМП) на кожний момент модельного часу. До них відносяться часові, структурні, кількісні та якісні інформаційні складові ОМП. В кожний момент часу моделювання вони актуалізуються (переобчислюються) за допомогою алгоритму моделі.

В моделі є присутніми також інформаційні потоки другої категорії – **стохастичні інформаційні потоки (СІП)**, які імітують реальні послідовності зовнішніх та внутрішніх випадкових впливів на логістичну систему і беруть участь в процесі створення моделі. Прикладами таких СІП можуть слугувати послідовності моментів надходження на вхід логістичної системи партій ОМП (сировини, товарів, комплектуючих), або моментів настання проблемних ситуацій на шляху ОМП (форс-мажорні обставини, початок/закінчення поломки/ремонта транспортних засобів), моментів зміни траєкторії та (або) швидкості переміщення ОМП, габаритних та вагових характеристик нових партій продуктів праці при надходженні на вхід системи.

Одним із основних методологічних принципів логістики є системний підхід, у відповідності з яким логістичні системи включаються в загальноприйнятне поняття системи або складної системи.

Мета. В процесі дослідження логістичних систем виникає задача пошуку оптимального управління матеріальними потоками, метою якої в загальному вигляді є реалізація комплексу логістики, який повинен забезпечувати необхідну кількість товару необхідних виду та якості в потрібному місці і в потрібний час для потрібного споживача з мінімальними або заданими витратами [1, 2]. Одним із успішних розв'язань комплексу логістики є створення математичних моделей реальних транспортно-перевантажувальних систем з моделюванням впливу на них зовнішніх випадкових факторів, а також виникнення в них ряду проблемних ситуацій.

Моделювання дозволяє знаходити математичні очікування невипадкових характеристик систем, що досліджуються, і оптимізувати поле керованих параметрів при різноманітних варіантах переважання цільової функції. Отримані рекомендації приймаються до відома при створенні систем планування перевозок, в процесі реконструкції об'єктів транспортних вузлів і т.і.

Основний матеріал. Складність досліджуваних логістичних систем диктує вибір засобів їх формального опису у вигляді універсальних алгоритмічних схем з концептуальною базою, з високим ступенем адекватності і точності отримуваних результатів, з бажаною простотою у відображенні алгоритмічних особливостей, стандартизацією та уніфікацією побудови моделей. В цьому плані увагу привертають схеми моделювання динаміки матеріальних потоків логістичних систем за допомогою систем кусково-лінійних та кусково-неперервних агрегатів, а також схеми моделювання за допомогою систем агрегатів спеціального вигляду – ініціальних імовірносних автоматів (СІА) Мура з детермінованими виходами [3].

Коротко наведемо тези теоретичного обгрунтування принципової можливості побудови автоматних моделей.

При формалізації досліджуваної складної системи опис моделі у вигляді багатовимірного стохастичного процесу може бути зведений до завдання деякого багатовимірного ланцюга Маркова за допомогою матриць структурних зв'язків між компонентами ланцюга і алфавітів, функцій вихідних значень компонент, матриці імовірностей переходу і початкового розподілу імовірностей. Опис складної системи можливо здійснювати також у вигляді СІА, яка за означенням задається за допомогою п'яти об'єктів: матриці алфавітів, вектора початкових станів, системи функцій виходів, таблиці умовних функціоналів переходів і системи розподілу випадкових величин, що приймають участь в реалізації алгоритму моделі. При порівнянні цих двох видів формалізації досліджуваної системи стає очевидною аналогія при описанні моделі. Так, компоненти марківського вектору є аналогічними внутрішнім станам автоматів, зв'язки між компонентами ланцюга – вхідним та вихідним сигналам автоматів, функції вихідних значень компонент ланцюга співвідносяться з обчисленням станів автоматів СІА.

Проведені дослідження в цьому напрямку показали, що при вельми широких припущеннях багатовимірний марківський ланцюг, який досліджує реальну систему S, можна перетворити в ланцюг, який має властивість так званої умовної незалежності компонент, і ця обставина обгрунтовує принципову можливість побудови автоматної моделі системи S. Наведемо основні положення даних досліджень.

Припустимо, що для досліджуваної реальної імовірносної системи S вихідна модель представлена у вигляді n – мірного стохастичного процесу

$\xi(t)=\{\xi_k(t)\}\quad (k=\overline{1,n};\, t\in T)$ з дискретним параметром t (t = 0,1,2,…) на просторі елементарних подій $(\Omega, \mathrm{N}, \mathrm{P})$ в фазовому просторі (E, B^*). Нехай маємо деяку систему імовірносних автоматів $\Gamma=\{A_1,\ldots,A_m\}\quad (m\geq n)$.

Розглянемо стохастичний процес

$$\overline{a}(t)=\{a_1(t),a_2(t),\ldots,a_m(t)\}\quad (t\in T), \qquad (1)$$

де $a_i\quad (i=\overline{1,m})$ - стани автоматів. Позначимо через $(\Sigma, \wp, \mu)$ простір елементарних подій процесу $\overline{a}(t)$, а через $(\mathrm{X}, \aleph)$ - його фазовий простір. Очевидно, що X є добутком внутрішніх алфавітів автоматів A_i, а $\aleph$ - добутком σ - алгебр, вибраних в цих алфавітах.

Нехай I_n - деяка підмножина з n чисел множини $\{1,\ldots m\}$, наприклад, $I_n=\overline{1,n}$.

Введемо позначення $\overline{a'}(t)=\{a_i(t)\}\quad (i\in I_n)$ для стохастичного процесу, що отримується із виразу (1) в результаті відбирання компонент, індекси яких не входять у множину I_n. Нехай $\Sigma', X', \wp', \aleph', \mu'$ - проєкції відповідних множин Σ, X, σ-алгебр $\wp, \aleph$, і міри μ на координатний простір $\{a_i(t)\}\quad (i\in I_n)$.

Якщо множини Ω, Σ і E, X', а також σ-алгебри $N, \wp'$ *і* $B^*, \aleph'$ попарно співпадають і процеси $\xi(t), \overline{a}(t)$ еквівалентні, то систему імовірносних автоматів Γ будемо називати автоматною моделлю системи S.

Нехай $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}\ (k=\overline{1,n})$ - n – мірний простий однорідний марківський ланцюг в фазовому просторі (X, B^*), де

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n; \quad B^* = B_1^* \times B_2^* \times \ldots \times B_n^*;$$

X_k и B_k^* $(k=\overline{1,n})$ - відповідно простори компонент вектору $\xi(t)$, $\sigma-$ алгебри, вибрані з цих просторів.

Назвемо компоненти $\xi_k(t)\ (k=\overline{1,n})$ марківського вектору $\xi(t)$ **умовно незалежними (у сукупності),** якщо при кожному $i\ (i=\overline{1,n})$ для довільних $B_i \in B_i^*$, $x \in X$ и $x_k \in X_k$ $(k=\overline{1,n},\ k \neq i)$ маємо співвідношення

$$P\{\xi_i(t+1) \in B_i \,/\, \xi(t)=x,\ \xi_k(t+1)=x_k$$
$$(k=\overline{1,n},\ k \neq i)\} = P\{\xi_i(t+1) \in B_i \,/\, \xi(t)=x\} \qquad (2)$$
$$(t=0,1,2,\ldots)$$

Очевидно, що умовно незалежні компоненти $\xi_k(t)$ стохастичного вектору $\xi(t)$ в загальному випадку є залежними випадковими величинами, а поняття умовної незалежності компонент має сенс також і для неоднорідного ланцюгу. Із визначення умовної незалежності компонент ланцюгу $\xi(t)$ випливає постулат, який стверджує, що умовна незалежність компонент простого n – мірного ланцюгу Маркова $\xi(t)$ в фазовому просторі (X, B^*) рівнозначна виконанню рівності

$$P\{\xi(t+1)\in B\ /\ \xi(t)=x\}=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}P\{\xi_k(t+1)\in B_k\ /\ \xi(t)=x\} \qquad (3)$$
$$(B\in B^*;\ B_k\in B_k^*\ (k=\overline{1,n});\ B=B_1\times\ldots\times B_n;$$
$$B^*=B_1^*\times\ldots\times B_n^*).$$

Введемо поняття **незалежності** компонент марківського ланцюгу.

Нехай $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}$ $(k=\overline{1,n})$ - n – мірний простий однорідний ланцюг Маркова. Компоненти $\xi_k(t)$ $(k=\overline{1,n})$ цього ланцюгу називаються незалежними, якщо для довільних $B_k\in B_k^*,\ x\in X,\ x_k\in X_k$ $(k=\overline{1,n})$ справедливим є співвідношення

$$P\{\xi_k(t+1)\in B_k\ /\ \xi(t)=x\}=$$
$$P\{\xi_k(t+1)\in B_k\ /\ \xi_k(t)=x_k\} \qquad (4)$$
$$(k=\overline{1,n};\ t=0,1,2,\ldots;\ x=(x_1,\ldots,x_n)).$$

Останнє співвідношенн є рівнозначним (5).

Порівняння (4) і (2), або (5) и (3) допомагає зрозуміти різницю між цими поняттями. Поняття **незалежності** компонент визначає можливість розглядати заданий n – мірний ланцюг як **сукупність незалежних** n – мірних ланцюгів.

$$P\{\xi(t+1)\in B\ /\ \xi(t)=x\}=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}P\{\xi_k(t+1)\in B_k\ /\ \xi_k(t)=x_k\} \tag{5}$$
$$(B\in B^*;\ B_k\in B_k^*\quad (k=\overline{1,n});\ B=B_1\times\ldots\times B_n;$$
$$B^*=B_1^*\times\ldots\times B_n^*;\ t=0,1,\ldots).$$

Поняття **умовної незалежності** компонент визначає імовірносну залежність кожної компоненти ланцюгу в **момент** $t+1$ від **сукупності всіх компонент ланцюгу в попередній момент часу** t.

Наведемо формулювання теорем, що лежать в основі застосування властивості умовної незалежності компонент багатовимірного ланцюга Маркова при побудові автоматних моделей імовірносних систем [4].

Теорема 1. Умовна незалежність компонент простого n - мірного ланцюга Маркова $\xi(t)$ в фазовому просторі (X,B^*) рівнозначна виконанню рівності

$$P\{\xi(t+1)\in B/\xi(t)=x\}=\prod_{k=1}^{n}P\{\xi_k(t+1)\in B_k/\xi(t)=x\};$$
$$(B\in B^*;\ B_k\in B_k^*\ (k=\overline{1,n});\ B=B_1\times\ldots\times B_n;$$
$$B^*=B_1^*\times\ldots\times B_n^*).$$

Теорема 2. Нехай $\xi(t)=\{\xi_k(t)\quad (k=\overline{1,n})\}-n-$ мірний однорідний ланцюг Маркова в фазовому просторі (X,B^*) з перехідною імовірносною функцією

$$P\{\xi(t+1)\in B\ /\ \xi(t)=x\}=P\{f(x,w)\in B\}$$
$$(B\in B^*,\ x\in X).$$

Тут $w = \{w_1, ..., w_M\}$ - скінченновимірний стохастичний вектор в фазовому просторі *(G, L)*, $w_k \quad (k = \overline{1, M})$ - в загальному випадку залежні випадкові величини, f – деяка детермінована функція, що задається на *X* і *G*. Тоді існує ланцюг Маркова

$$\zeta(t) = \{\zeta_i(t) \quad (i = \overline{1, m})\} \quad (m \geq n)$$

з умовно незалежними компонентами в розширеному фазовому просторі *(Z, L)* такий, що сукупність $\{\zeta_{ik}(t) \quad (k = \overline{1, n})\}$ деяких з її компонент еквівалентна вихідному ланцюгу $\xi(t)$.

Теорема 2 доводить, що виявлена властивість багатовимірних ланцюгів Маркова дає можливість в більшості випадків шляхом розширення фазового простору замінювати ланцюг Маркова з умовно залежними компонентами ланцюгом більшої розмірності з умовно незалежними компонентами.

Теорема 3. Якщо математична модель даної імовірносної системи *S* допускає подання у вигляді простого однорідного n – мірного ланцюгу Маркова $\xi(t)$ в фазовому просторі (X, B^*) з кінцевою множиною станів з умовно незалежними компонентами, то існує система імовірносних автоматів Г, яка представляє собою автоматну модель системи *S*.

Таким чином, властивість умовної незалежності компонент багатовимірного ланцюга Маркова, що описує реальну складну систему, гарантує можливість побудови автоматної моделі цієї системи.

Виконання умов, при яких початковий багатовимірний марківський ланцюг можна привести до ланцюга, що володіє властивістю умовної незалежності компонент, є необхідною і достатньою умовою побудови відповідної автоматної моделі. Ця обставина є дуже істотньою, оскільки обгрунтовує можливість побудови автоматних моделей для широкого класу систем.

На практиці при побудові автоматної моделі забезпечення властивістю умовної незалежності компонент еквівалентного їй марківського вектора гарантується виконанням наступних необхідних і достатніх умов реалізації властивості марковості модельованого процесу:

– для окремо взятого автомата послідовність його вхідних сигналів повинна бути реалізацією незалежних, однаково розподілених випадкових величин.

– для системи імовірносних автоматів як моделі і як узагальнення однорідного марківського ланцюгу необхідна побудова такої сукупності автоматів, яка би повністю визначала реальну систему в кожний момент часу, що означає визначення стану кожного автомату моделі у поточний момент часу залежно від стану всієї системи автоматів в попередній момент часу.

При цьому всі випадкові величини, що беруть участь у побудові моделі, повинні задовольняти вимозі взаємної незалежності і обов'язково ідентифікуватися як стани відповідних автоматів.

Наведені необхідні та достатні умови принципової можливості побудови СІА логістичних систем (ЛС) лягли в основу розробки **єдиної інформаційної технології створення автоматних моделей ЛС,** яка об’єднує постулати забезпечення адекватності СІА, статистичні дослідження інформаційних потоків ЛС та ієрархічну побудову етапів розробки моделей [3].

Теоретичні дослідження та практична реалізація моделей ЛС виявили ефективність автоматного моделювання в плані відображення динаміки регулюючих логістичних операцій з модельними і стохастичними інформаційними потоками у вигляді **моделей замкнутих або розімкнених процесів перетікання.** Моделі такого роду застосовуються з метою прискорення і спрощення розв'язання задач до систем, що мають властивість обмеженості інформаційних зв'язків між окремими структурними блоками, що, вочевидь, має місце стосовно динаміки матеріальних потоків ЛС. Дослідження динаміки матеріальних потоків показало, що у кожній ЛС для кожної її ланки існує визначений обмежений «функціональний окіл», який складається з інших (суміжних) ланок, що впливають на динаміку даного вузла. Відмітимо, що термін «процеси перетікання» вказує лише на перетікання інформаційних потоків, моделюючих матеріальні потоки. Тобто, можна говорити про те, що процеси перетікання властиві динаміці **складних систем з обмеженими внутрішніми зв'язками.**

Принципова можливість імітації такої властивості за допомогою автоматних моделей обумовлена властивістю марковості СІА і можливістю покрокової актуалізації стану кожного віртуального однорідного матеріального потоку (елементарного матеріального потоку), а також властивістю відсутності просторової післядії для підмножин автоматів в моделях такого роду.

В деяких випадках, коли СІА складається з малої кількості автоматів, властивості процесів перетікання дозволяють отримувати аналітичне рішення задачі [5]. В складних випадках при побудові імітаційних моделей ЛС властивість обмеженості внутрішніх зв'язків між окремими ланками систем дозволяє розчленовувати такі моделі на визначені сукупності процесів, які володіють марківською властивістю, і допомагає будувати стандартизовані та компактні моделі, зручні для комп'ютерної імітації.

Наведемо приклад успішного використання властивості обмеженості внутрішніх зв'язків при побудові СІА-моделі взаємодії пасажиропотоків в пересадкових вузлах [6].

Формалізуючи динаміку переміщення пасажиропотоків вздовж площини вокзалу, домовимось вважати, що площина вокзалу являє собою структуру, що складається з $I * J$ прямокутних «клітин», де I - загальна кількість клітин по горизонталі, а J - загальна кількість клітин по вертикалі. Положення кожної клітини ідентифікується парою індексів (i, j), де $i = \overline{1, I}$, а $j = \overline{1, J}$. Домовимось називати змінний індекс j номером рівня. Назвемо першим з боку перону або верхнім рівнем рівень $j = 1$. Тоді $j = J$ - останній або нижній рівень (з боку виходу в місто). Всі структурні клітини вважаються однаковими (з однаковою довжиною сторони, наприклад, в 1,65 м), клітини кожного рівня нумеруються зліва направо.

Домовимось, що в кожній клітині площини вокзалу в кожний момент часу можуть знаходитись пасажири, в кожну клітину можуть надходити пасажири і з кожної клітини можуть виходити пасажири. Тобто, пасажири кожної клітини площини вокзалу (крім клітин, які зайняті об'єктами інфраструктури) одночасно переміщуються за своїм бажанням в таких напрямках:

- з міста до перону,

- від поїздів в місто,
- зліва направо (до об’єктів інфраструктури вокзалу),
- справа наліво (до об’єктів інфраструктури вокзалу).

Діагональні переміщення пасажирів вздовж клітини в моделі не розглядаються.

Аналіз змістовного опису даної системи і формалізованого представлення площини вокзалу у вигляді декартового добутку клітин $I * J$, а також такі фактори, як складність і імовірносний характер руху зустрічних потоків пасажирів вздовж клітин площини вокзалу, потреба в аналізі виникаючих ситуацій в необхідний момент (зріз) єдиного модельного часу, обумовлюють вибір методу моделювання реальної системи за допомогою СІА.

Дійсно, аналізуючи систему «вокзал - пасажиропотоки», впевнюємось в очевидності наявності властивості обмеженості структурно-функціональних і інформаційних зв’язків між клітинами $(i, j) \in I * J$. Реально, вздовж кожної елементарної клітини вокзалу в кожний момент часу одночасно може пересуватись вісім потоків пасажирів: чотири потоки назовні із клітини і чотири потоки всередину клітини. Кожний потік окремо, проходячи через клітини вокзалу, буде являти собою модель перетікання. Властивість обмеженості внутрішніх зв’язків дозволяє реалізовувати розподіл сукупного різновекторного потоку пасажирів на послідовність потоків за визначеними напрямками на один і той же момент часу і розраховувати послідовно всі проміжні наповнення кожної клітини. При цьому слід завчасно домовитись про однакову послідовність розрахунку наповнення клітин у відповідності із зафіксованим чергуванням напрямків потоків вздовж клітин.

Домовимось про введення наступної системи пріоритетів напрямків переміщення пасажиропотоків через $(i,\ j)$- у клітину площини вокзалу:

1) знизу $\to$ наверх (із міста до перону),
2) зверху $\to$ вниз (від поїздів в місто),
3) справа $\to$ наліво,
4) зліва $\to$ направо

Додержуючись наведеного чергування пріоритетів напрямків руху пасажиропотоків вздовж клітин, отримуємо можливість розчленовувати ці потоки і досліджувати проміжне наповнення клітин для кожного напрямку руху потоків, поступово сумуючи наповнення клітин за вище наведеною схемою на протязі одного й того ж зафіксованого одиничного інтервалу модельного часу $(t-1,\ t]$.

Для наведення сценарію функціонування моделі визначимо стани автоматів, що описують $(i,\ j)$- ю клітину:

$a_{ij}(t)$ - потік пасажирів в $(i,\ j)$-й клітині в момент t;

$\lambda_{ij}^{(1)}(t)$- потік бажаючих вийти в момент t з $(i,\ j)$-ї клітини наверх, в клітину $(i,\ j-1)$;

$L_{ij}^{(1)}(t)-$ потік пасажирів, що вийшли в момент t з клітини $(i,\ j)$ в клітину $(i,\ j-1)$;

$a_{ij}^{(1)}(t)$- потік пасажирів в клітині $(i,\ j)$ після завершення вертикального переміщення потоку - «знизу-вверх» на момент t;

$\lambda_{ij}^{(3)}(t)$ - потік бажаючих вийти вниз із (i, j)-ї клітини в $(i, j+1)$ - у клітину;

$L_{ij}^{(3)}(t)-$ потік пасажирів, що вийшли в момент t з клітини (i, j) в клітину $(i, j+1)$;

$a_{ij}^{(3)}(t)$ - потік в клітині (i, j) в момент t після завершення вертикального переміщення потоку – «зверху-вниз»;

$\lambda_{ij}^{(5)}(t)$ - потік бажаючих вийти в момент t з клітини (i, j) вліво, в клітину $(i-1, j)$;

$L_{ij}^{(5)}(t)-$ потік пасажирів, що вийшли в момент t з клітини (i, j) вліво, в клітину $(i-1, j)$;

$a_{ij}^{(5)}(t)$ - поточна кількість пасажирів в (i, j)-й клітині в момент t після завершення горизонтального переміщення потоку «справа-наліво»;

$\lambda_{ij}^{(7)}(t)$ - потік бажаючих вийти в момент t з $ij-$ї клітини вправо – в клітину $(i+1, j)$;

$L_{ij}^{(7)}(t)-$ потік пасажирів, що вийшли в момент t з клітини (i, j) в клітину $(i+1, j)$;

$a_{ij}^{(7)}(t)$ - завершуючий потік в клітині (i, j) в момент t (після завершення переміщення потоку «зліва - направо»).

Введемо позначення потоків пасажирів, що заходять в $(i,\ j)-$у клітину з чотирьох сторін в момент t, дотримуючись вище наведених приорітетів:

$L_{ij}^{(2)}(t)-$ потік пасажирів, що ввійшли в клітину $(i,\ j)$ з нижньої клітини $(i,\ j+1)$;

$L_{ij}^{(4)}(t)-$потік пасажирів, що ввійшли в клітину $(i,\ j)$ з верхньої клітини $(i,\ j-1)$;

$L_{ij}^{(6)}(t)$- потік пасажирів, що ввійшли в клітину $(i,\ j)$ із суміжної клітини справа $(i+1,\ j)$;

$L_{ij}^{(8)}(t)-$потік пасажирів, що ввійшли в клітину $(i,\ j)$ із суміжної клітини зліва $(i-1,\ j)$;

$A_{ij}=const-$ гранично допустима пасажиромісткість $(i,\ j)-$ї клітини;

$X_{ij}^{(pq)}(t)-$доля пасажирів від усього потоку, що ввійшли в клітину $(i,\ j)$ за приорітетом $q=2\vee 4\vee 6\vee 8$ і бажають вийти з неї за приорітетом $p=1\vee 3\vee 5\vee 7$ в момент .

Введемо позначення статистично заданих випадкових величин:

$\xi_i^{(1)}(t)-$потік пасажирів, що надійшли в момент t на вхід $i-$ї клітини нижнього $J-$го рівня із міста;

$\xi_i^{(3)}(t)-$ потік пасажирів, що надійшли на вхід $i-$ї клітини верхнього рівня;

$\lambda_i^{*(1)}(t)$, $\lambda_i^{*(3)}(t)-$ кількість пасажирів, що не ввійшли в приміщення вокзалу із міста (знизу) і від перону (зверху) через загрозу переповнення клітин входу-виходу;

$\eta_{ij}^{(pq)}(t)-$ доля потоку бажаючих вийти із клітини (i, j) за пріоритетом $p = 1 \vee 3 \vee 5 \vee 7$ із всього потоку пасажирів, що ввійшли в неї за пріоритетом $q = 2 \vee 4 \vee 6 \vee 8$.

Введемо наступні двоїсті індикатори:

$z_{ij}^{(q)}(t)-$приймає значення 1, якщо потік пасажирів, що ввійшли в у$(i, j)-$у клітину в момент t за пріоритетом $q = 2 \vee 4 \vee 6 \vee 8$, не нульовий (надходження реально здійснилось), в протилежному випадку дана величина приймає значення 0.

$\rho_{ij}^{(p)}-$ фіксована двоїста величина, ненульове значення якої визначає принципову можливість виходу із клітини (i, j) згідно пріоритету $p = 1 \vee 3 \vee 5 \vee 7$.

$V_{ij}^{(pq)}(t) = 1,$ якщо вихід із клітини (i, j) за пріоритетом p неможливий (вихід в сторону «забороненої» клітини) для пасажирів, які надійшли в клітину (i, j) за пріоритетом $q,$ і $V_{ij}^{(pq)}(t)$= 0 – в протилежному випадку.

$y_{ij}(t)$- індикатор «кризового» простою пасажирів в клітині (i, j).

Наведемо сценарій моделювання динаміки переміщення пасажирів між клітинами вокзалу:

1.Моделюється динаміка переміщення пасажирів із клітини (i, j) в клітину $(i, j-1)$, при цьому визначається потік вийшовших «наверх» - $L_{ij}^{(1)}(t)$- на слідуючий момент часу імітації t, а також перше поточне число пасажирів в $(i, j)-$й клітині - $a_{ij}^{(1)}(t)$.

2. Визначається потік вийшовших із (i, j) - ї клітини «вниз» і залишок пасажирів в ній на момент t - $L_{ij}^{(3)}(t)$ і $a_{ij}^{(3)}(t)$ відповідно.

3. Проводиться переобчислення потоку вийшовших «вліво» $L_{ij}^{(5)}(t)$ і новий залишок пасажирів в клітині (i, j) $a_{ij}^{(5)}(t)$ на момент t.

4. Здійснюється аналогічний «парний» крок визначення кількості пасажирів, що перемістились «вправо» із клітини (i, j) - $L_{ij}^{(7)}(t)$, а також поточне наповнення клітини - $a_{ij}^{(7)}(t)$, яке буде результуючим наповненням $a_{ij}(t)$ клітини в слідуючий момент часу t.

5. Подальші чотири послідовні кроки визначають потоки ввійшовших в клітину згідно із системою пріоритетів входження - $L_{ij}^{(q)}(t)$.

6. Визначаються індикатори реальної реалізації потоків входження в клітину (i, j) з різних сторін $z_{ij}^{(q)}(t)$

і оцінки принципової можливості виходу по різних напрямках $\rho_{ij}^{(p)}$.

7. Обчислюються реальні долі $X_{ij}^{(pq)}(t)$ потоків бажаючих вийти із $(i, j)-$ї клітини по трьох напрямках із всього потоку ввійшовших в клітину (i, j) в момент t з четвертої сторони.

8. Визначається потік бажаючих вийти із клітини (i, j) в різні сторони - $\lambda_{ij}^{(p)}(t)$.

Таким чином, на момент t стають відомими всі значення станів автоматов, що визначають наповнення кожної (i, j) - ї $(i = \overline{1, I};\ j = \overline{1, J})$ клітини площини вокзалу.

В більш складних випадках при дослідженні матеріальних потоків ЛС застосовується **універсальна уніфікована схема моделювання** за допомогою **кусково-лінійних агрегатів**.

Існує теоретичне обгрунтування [7] можливості представлення любого кусково-лінійного агрегату у вигляді системи, яка складається із сукупності трьох типів елементарних агрегатів: елементів пам’яті, елементів затримки і миттєвих кусково-лінійних стохастичних перетворювачів.

Більш детально, елементарні агрегати здатні зберігати інформацію у вигляді деякого дійсного числа x (елементу обліковуваної множини); в любий момент часу можуть володіти деяким станом $x(t)$ у вигляді невід’ємного числа, яке у відсутності вхідного сигналу убуває з одиничною швидкістю; мають властивості миттєвого кусково-лінійного стохастичного перетворювача, здатного сприймати і відсилати дискретні сигнали.

Слід відмітити одну важливу обставину, що розширює область застосування методу агрегативного моделювання. Побудова імітаційних моделей за допомогою агрегативних систем не включає в себе визначення способу завдання операторів, які використовуються в агрегатах, тому може бути вживаний, в принципі, любий спосіб опису стохастичного алгоритму.

В даному випадку з цією метою обирається задання операторів, що складають тіло агрегату, або, другими словами, спосіб опису стохастичного алгоритму в вигляді груп елементарних агрегатів, що являють собою, в свою чергу, г**рупи взаємопов'язаних імовірносних автоматів**. Кожна така група автоматів (назвемо її модулем) описує конкретний агрегат, що імітує однорідні за структурно-функціональними особливостями об'єкти складної ЛС.

Дійсно, при порівнянні властивостей імовірносних автоматів і кусково-лінійних агрегатів виявляється, що автомати по суті є елементарними одномірними агрегатами, у визначенні яких приймаються наступні спрощення:

- дискретний час функціонування;
- нема різниці між управляючими та вхідними сигналами;
- скалярний характер величини стану агрегату;
- існування можливості реалізації для кожного моменту часу вхідного та вихідного сигналів;
- детермінованість оператора виходу;
- можливість задання оператора переходу в вигляді умовного матричного стохастичного оператора;

- відсутність необхідності в застосуванні вихідних і перехідних операторів.

Очевидним постає тезис про те, що імовірносні автомати виконують функції елементарних агрегатів, оскільки їх стани володіють властивостями елементів пам'яті, елементів затримки і миттєвих кусково-лінійних стохастичних перетворювачів.

Висновок. Введення сукупності імовірносних автоматів в якості операторів при побудові тіла кусково-лінійного агрегату дозволяє будувати **агрегатно-автоматні моделі** складних ЛС з урахуванням їх часової, якісної та структурно-функціональної неоднорідності в неперервному режимі часу з дискретним втручанням випадків.

Перехід при моделюванні складних ЛС до агрегатно-автоматних моделей дозволяє єдинообразно описувати всі різнорідні за структурою і динамікою об'єкти ЛС, виділяючи однорідні об'єкти під «дах» відповідних агрегатів. Це дає можливість, в свою чергу, моделювати всю різноманітність, всі особливості досліджуваної системи.

Основним будівельним «матеріалом» таких моделей є **модулі-агрегати**, що визначають **однорідні** інформаційні та матеріальні потоки ЛС. Автоматно-агрегатні моделі використовуються при дослідженні функціонування морських та залізничних вузлів, морських паромних переправ, міждержавних контейнерних залізничних перевезень та інших ЛС.

Література

1. Леншин И.А., Смольняков Ю.И. Логистика. – М.: «Машиностроение», 1996. – 246 с.

2. Ballou R.H. Business Locistics Management. 3ed.- New York: Prentice-Hall International Inc., 1993.
3. Бакаев А.А., Гриценко В. И., Сакунова И.С. Автоматное моделирование в задачах исследования сложных систем. – К.: «Логос», 2007. – 208 с.
4. Бакаев А.А., Костина Н.И., Яровицкий Н.В. Имитационные модели в экономике. – К.: «Наукова думка», 1978. – 300 с.
5. Сакунова И.С., Яровицкий Н.В. Задача о кольцевом маршруте // Кибернетика. - 1973. - № 3. - С. 128-133.
6. Мирошниченко В.М., Сакунова И.С., Торопов Б.И. О модели пассажиропотоков в крупных пассажирских комплексах // Международная научная конференция «Транспорт XX1 века». Секция 4, Варшава, 19-21. ноября 2001. - С. 285-292.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978, - 309 с.