УДК 531.36

В. И. Слынько

Об устойчивости стационарных вращений динамически симметричного твердого тела на струнном колеблющемся подвесе

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)

The equations of movement are introduced, and the stability of stationary movements of a solid body on the oscillating string suspension is investigated.

Исследованию стационарных задач динамики твердого тела на струнном подвесе посвящено большое количество исследований, которые подытожены в работе [1], где также приведен достаточно полный обзор полученных теоретических и экспериментальных результатов. Уравнения движения твердого тела в случае переменного подвеса выведены в работе [2]. В настоящей работе рассматривается устойчивость простейшего вращения твердого тела на колеблющемся струнном подвесе в случае, когда колебания точки подвеса носят импульсный характер.

1. Уравнения движения. Рассмотрим тяжелое осесимметричное, однородное, абсолютно твердое тело, подвешенное на струнном подвесе в подвижной точке O_1 [1]. Перемещение этой точки описывается 2θ периодической функцией

$$\chi(t) = \begin{cases} v_0 t, & \left(-\dfrac{1}{2} + 2k\right)\theta \leqslant t \leqslant \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)\theta, \\ v_0(\theta - t), & \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)\theta \leqslant t \leqslant \left(\dfrac{3}{2} + 2k\right)\theta. \end{cases}$$

Другим своим концом струнный подвес прикреплен к телу в некоторой точке O_2, расположенной на оси его симметрии. Принимается, что струнный подвес является абсолютно твердым невесомым телом (стержнем). Исходя из вида функции $\chi(t)$, можем заключить, что на интервалах времени $(k\theta, (k+1)\theta)$ точка подвеса движется равномерно, а в моменты времени $t = k\theta$ происходит удар, в результате которого обобщенные скорости системы претерпевают разрыв первого рода, а соответствующие обобщенные координаты остаются непрерывными.

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с начальной в точке O и с осью ζ, направленной вертикально вверх (рис. 1). При этом относительно этой системы координат точка подвеса O_1 движется по закону $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \chi(t)$. В центре масс G твердого тела поместим начала двух других систем координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и xyz. Оси первой системы координат постоянно параллельны соответствующим осям подвижной системы $\xi\eta\zeta$, оси второй — жестко связаны с твердым телом. При этом ось z системы xyz направлена по оси динамической симметрии тела и является главной центральной осью инерции. Положение тела и жестко связанной с ним системы координат xyz относительно поступательно перемещающейся системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ определим тремя углами Эйлера–Крылова α, β и γ [3], изображенными на рис. 2. В свою очередь, углами α_1 и β_1 (см. рис. 1) зададим положение струны O_1O_2 по

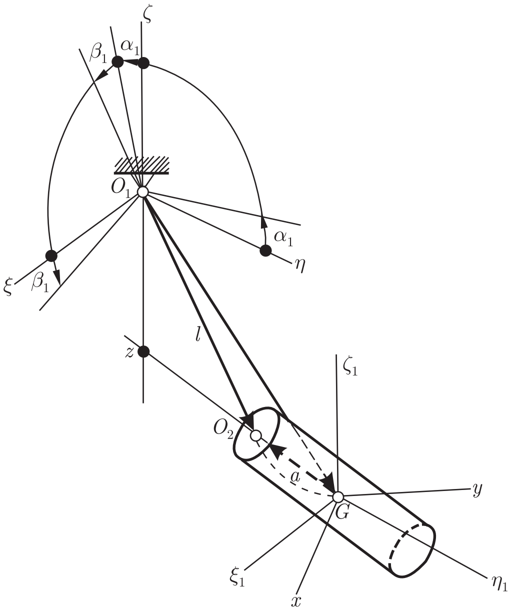

Рис. 1

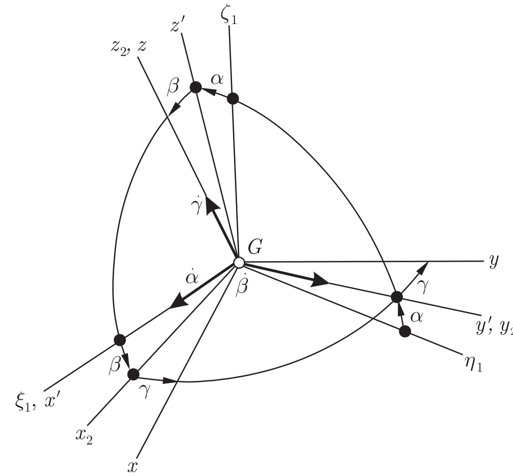

Рис. 2

отношению к неподвижной системе координат $\xi\eta\zeta$. Струнный подвес можно рассматривать как реономную геометрическую связь

$$x^2 + y^2 + (z - \chi(t))^2 = l^2,$$

где x, y, z — координаты точки O_2 в неподвижной системе координат. Координаты ξ_G, η_G, ζ_G центра масс тела G определяются по формулам

$$\xi_G = -l\sin\beta_1 - a\sin\beta,$$

$$\eta_G = l\sin\alpha_1\cos\beta_1 + a\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\zeta_G = -l\cos\alpha_1\cos\beta_1 - a\cos\alpha\cos\beta + \chi(t).$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}(m(\dot\xi_G^2 + \dot\eta_G^2 + \dot\zeta_G^2) + A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2),$$

а потенциальная энергия определяется формулой

$$V = mg\zeta_G = -mg(l\cos\alpha_1\cos\beta_1 + a\cos\alpha\cos\beta).$$

Примем также, что кроме силы тяжести на систему действуют малые силы трения в шарнире O_1, которые можно задать функцией Релея

$$R = \frac{\mu(\dot\alpha_1^2 + \dot\beta_1^2)}{2},$$

μ — положительный коэффициент.

При $t \neq k\theta$ уравнения движения имеют форму уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_q,$$

где q — обобщенная координата, а Q_q — соответствующая ей обобщенная сила

$$Q_q = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}.$$

При $t = k\theta$ уравнения движения по Голдстейну имеют форму

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=k\theta-0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=k\theta+0}.$$

Из этих уравнений получается следующая нелинейная система уравнений движения при $t \neq k\theta$:

$$\begin{aligned}
&(ma^2\cos^2\beta + A\cos^2\beta + C\sin^2\beta)\ddot{\alpha} + \\
&\quad + mal(\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\ddot{\alpha}_1 + \\
&\quad + mal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\ddot{\beta}_1 + \\
&\quad + mal(\cos\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\dot{\alpha}_1^2 - \\
&\quad - 2(ma^2\sin\beta\cos\beta + A\sin\beta\cos\beta - C\sin\beta\cos\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} - \\
&\quad - 2amal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 + \\
&\quad + mal(cos\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\dot{\beta}_1^2 + C\cos\beta\dot{\beta}\dot{\gamma} + \\
&\quad + mga\sin\alpha\cos\beta + C\sin\beta\ddot{\gamma} = Q_\alpha; \\
&ma^2\ddot{\beta} - mal(\sin\beta_1\cos\beta - \cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\dot{\beta}_1^2 - \\
&\quad - 2mal(\sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1 + \\
&\quad + mal(\sin\alpha\sin\beta\sin\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\sin\beta)\dot{\alpha}_1^2 + \\
&\quad + mal(\sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha_1\cos\beta_1)\ddot{\alpha}_1 + \\
&\quad + mal(\cos\beta_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\ddot{\beta}_1 + \\
&\quad + (ma^2\cos\beta\sin\beta + A\sin\beta\cos\beta)\dot{\alpha}^2 - C(\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\cos\beta\dot{\alpha} + mga\sin\beta\cos\beta = Q_\beta; \\
&ml^2\ddot{\beta}_1 - mal(\cos\beta_1\sin\beta - \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\dot{\beta}^2 - \\
&\quad - 2aml(\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + \\
&\quad + mal(\cos\beta_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\ddot{\beta} + \\
&\quad + mal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\dot{\alpha}^2 + \\
&\quad + mal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\ddot{\alpha} + \\
&\quad + ml^2\sin\beta_1\cos\beta_1\dot{\alpha}_1^2 + mgl\sin\beta_1\cos\alpha_1 = Q_{\beta_1}; \\
&C(\sin\beta\ddot{\alpha} + \cos\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\gamma}) = Q_\gamma;
\end{aligned}$$

при $t = k\theta$:

$$
\begin{aligned}
&(A\cos^2\beta + C\sin^2\beta + ma^2\cos^2\beta)\Delta\dot{\alpha} + \\
&\qquad + mal(\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\cos\beta + + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\Delta\dot{\alpha}_1 + \\
&\qquad + mal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\Delta\dot{\beta}_1 + C\sin\beta\Delta\dot{\gamma} = \\
&\qquad = (-1)^k 2mv_0 a\sin\alpha\cos\beta; \\
&ml^2\cos^2\beta_1\Delta\dot{\alpha}_1 + mal(\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\alpha\cos\beta)\Delta\dot{\alpha} + \\
&\qquad + mal(-\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\sin\beta)\Delta\dot{\beta} = \\
&\qquad = (-1)^k 2mv_0 l\sin\alpha_1\cos\beta_1; \\
&(A + ma^2)\Delta\dot{\beta} + mal(\cos\beta_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\Delta\dot{\beta}_1 + \\
&\qquad + mal(-\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\cos\beta_1\cos\alpha\sin\beta)\Delta\dot{\alpha}_1 = \\
&\qquad = (-1)^k 2mv_0 a\cos\alpha\sin\beta; \\
&ml^2\Delta\dot{\beta}_1 + mal(\cos\beta_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\sin\beta)\Delta\dot{\beta} + \\
&\qquad + mal(\cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\alpha\cos\beta)\Delta\dot{\alpha} = \\
&\qquad = (-1)^k 2mv_0 l\cos\alpha_1\sin\beta_1; \\
&\Delta\dot{\alpha}\sin\beta + \Delta\dot{\gamma} = 0; \\
&\Delta\alpha = 0, \qquad \Delta\beta = 0, \qquad \Delta\alpha_1 = 0, \qquad \Delta\beta_1 = 0, \qquad \Delta\gamma = 0.
\end{aligned}
$$

2. Стационарные движения. Нетрудно показать, что уравнения движения имеют решение

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \qquad \dot{\gamma} = \omega, \qquad \gamma = \omega t + \gamma_0. \tag{1}$$

Для этого стационарного решения определим переменные возмущенного движения

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \beta_1, \qquad x_3 = \alpha, \qquad x_4 = \beta.$$

Тогда уравнения возмущенного движения представимы в виде системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [4]

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}\ddot{x}(t) + (\mathcal{B} + \mathcal{G})\dot{x}(t) + \mathcal{C}x(t) = 0, \qquad t \neq k\theta, \\
&x(t^+) = x(t), \qquad \mathcal{A}\dot{x}(t^+) = \mathcal{A}\dot{x}(t) + \mathcal{D}_k x(t), \qquad t = k\theta,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где постоянные матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ соответствуют инерционным, диссипативным, гироскопическим и потенциальным силам и имеют вид

$$
\mathcal{A} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & mal & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 & mal \\ mal & 0 & A + ma^2 & 0 \\ 0 & mal & 0 & A + ma^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C\omega \\ 0 & 0 & -C\omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} mgl & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mga & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mga \end{pmatrix},
$$

а матрицы $\mathcal{D}_k$ имеют вид

$$
\mathcal{D}_k = 2(-1)^k m v_0 \begin{pmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2.
$$

3. Устойчивость стационарных движений. Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову рассматриваемого стационарного движения. Для этого в первом приближении достаточно рассмотреть вопрос об устойчивости линейной системы уравнений возмущенного движения (2). Эту систему уравнений можно привести к нормальной форме

$$
\dot{z}(t) = \widetilde{\mathcal{A}} z(t), \qquad t \neq k\theta,
$$

$$
z(t^+) = \widetilde{\mathcal{B}_k} z(t), \qquad t = k\theta,
$$

где $z = (x^T, \dot{x}^T)^T$, а $\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}_k$ — блочно-диагональные матрицы вида

$$
\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{C} & -\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{G}) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathcal{B}_k} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}^{-1} D_k & I \end{pmatrix}.
$$

Определим матрицу монодромии [4] $\Phi = \mathcal{B}_2 e^{\mathcal{A}\theta} \mathcal{B}_1 e^{\mathcal{A}\theta}$, тогда необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы уравнений возмущенного движения (2) будет принадлежность всех характеристических чисел матрицы монодромии открытому единичному кругу комплексной плоскости. Однако, в отличие от системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где аналогичные условия асимптотической устойчивости сведены к неравенствам на коэффициенты системы (например, условия Рауса–Гурвица), получение таких условий для системы уравнений (2) затруднительно, поскольку для вычисления матричных экспонент в аналитическом виде необходимо решить задачу нахождения собственных значений матрицы восьмого порядка. Приведем некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости стационарного движения (1).

Определим матрицы H, H_1 и H_2

$$
H = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-\dfrac{(A+ma^2)g}{Al} & 0 & \dfrac{mga^2}{Al} & 0 & -\dfrac{(A+ma^2)\mu}{mAl^2} & 0 & 0 & \dfrac{aC\omega}{lA} \\
0 & -\dfrac{(A+ma^2)g}{Al} & 0 & \dfrac{mga^2}{Al} & 0 & -\dfrac{(A+ma^2)\mu}{mAl^2} & -\dfrac{aC\omega}{lA} & 0 \\
\dfrac{mga}{A} & 0 & -\dfrac{mga}{A} & 0 & \dfrac{a\mu}{Al} & 0 & 0 & -\dfrac{C\omega}{A} \\
0 & \dfrac{mga}{A} & 0 & -\dfrac{mga}{A} & 0 & \dfrac{a\mu}{Al} & \dfrac{C\omega}{A} & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
H_1 = \begin{pmatrix}
-2ml & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2ml & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2ma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2ma & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{2\mu(A+ma^2)}{Al} & 0 & 0 & -\dfrac{2a^2mC\omega}{Al} & 2ml & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{2\mu(A+ma^2)}{Al} & \dfrac{2a^2mC\omega}{Al} & 0 & 0 & 2ml & 0 & 0 \\
-\dfrac{2ma\mu}{A} & 0 & 0 & \dfrac{2maC\omega}{A} & 0 & 0 & 2ma & 0 \\
0 & -\dfrac{2ma\mu}{A} & \dfrac{2maC\omega}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2ma
\end{pmatrix},
$$

$$
H_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4m^2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -4m^2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -4m^2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -4m^2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Пусть G — симметричная положительно-определенная матрица; p — четное натуральное число. Рассмотрим матричное уравнение

$$
\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{l}(1+(-1)^{l-1})\frac{C_l^k\theta^{l-1}}{l!}H^kX(H^T)^{l-k} = -G, \tag{3}
$$

где $C_l^k = \dfrac{l!}{k!(l-k)!}$ — биноминальные коэффициенты.

Теорема. *Предположим, что матричное уравнение* (3) *имеет положительно-определенное симметричное решение* X *и выполняется неравенство*

$$
\frac{e^{2\|H\|\theta}}{\theta}(e^{2\|H\|\theta(v_0\|H^{-1}H_1\|+v_0^2\|H^{-1}H_2\|)}-1) < \frac{\lambda_m(G)}{\lambda_M(X)} + O(\theta^p). \tag{4}
$$

Тогда стационарное движение (1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство проводится на основе работы [5].

Численный пример. Рассмотрим стационарное движение твердого тела на струнном подвесе при значениях параметров $m = 0{,}01$, $A = C = 0{,}01$, $a = 0{,}1$, $l = 10$, $g = 9{,}8$, $\omega = 1$, $\mu = 0{,}1$.

Условие устойчивости стационарного движения можно представить в виде неравенства

$$
\frac{e^{3{,}88\theta}}{\theta}(e^{\theta(1{,}09v_0+0{,}22v_0^2)}-1) < 1{,}01,
$$

ограничивающего изменения параметров импульсных колебаний точки подвеса.

1. *Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – Москва: Наука. – 1991. – 345 с.

2. *Золотенко Г. Ф.* Движение твердого тела, подвешенного на нити переменной длины // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 1. – С. 16–19.
3. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – Москва: Наука, 1976. – 670 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 286 с.
5. *Слынько В. И.* Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 68–71.
6. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the equilibrium states of an inverted pendulum // Int. Apl. Mech. – 2007. – **43**, No 4. – P. 121–129.
7. *Lobas L. G., Koval'chuk V. V., Bambura O. V.* Evolution of the equilibrium states of an inverted pendulum // Ibid. – No 3. – P. 344–351.
8. *Мартынюк А. А., Никитина Н. В.* Нахождение предельного значения энергии двойного математического маятника // Ibid. – № 9. – С. 106–115.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.11.2007