УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк, В. С. Денисенко**

Об устойчивости и ограниченности движений относительно части переменных в метрическом пространстве

We present an results a new Lyapunov stability with respect to a part of variables for dynamical systems in a metric space. This model is very general and includes most of the nonlinear systems considered in the literature as special cases. We apply the matrix-valued mapping preserving the stability and the comparison principle.

Одним из обобщений прямого метода Ляпунова является анализ устойчивости систем в метрическом пространстве (см. [1, 2] и др.). В данной работе предлагается некоторое развитие прямого метода Ляпунова в этом направлении на основе матричнозначных отображений, сохраняющих устойчивость и принцип сравнения.

1. Постановка задачи. Пусть символ $\mathbb{T}$ обозначает временную шкалу, (X, ρ) — метрическое пространство, допускающее декомпозицию на два подпространства (Y, ρ_y), (Z, ρ_z), т. е. $X = Y \times Z$ для любых $x \in X$, $x = (y, z)$, $y \in Y$ и $z \in Z$. Мера ρ определяется формулой $\rho = [\rho_y^p + \rho_z^p]^{1/p}$ при всех $1 \leqslant p < +\infty$. Если $p = +\infty$, то $\rho = \max\{\rho_y(y_1, y_2), \rho_z(z_1, z_2)\}$. Следуя [2], приведем необходимые для дальнейшего определения.

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство с подмножеством $A \subseteq X$ и $\mathbb{T}$ — временная шкала. Отображение $p(\cdot; a, t_0)\colon T_{a,t_0} \to X$ называется движением, если $p(t_0; a, t_0) = a$, где $a \in A$, $t_0 \in \mathbb{T}$ и $T_{a,t_0} = [t_0, \tau_1) \bigcap \mathbb{T}$, $\tau_1 > t_0$, причем τ_1 — конечное или символ бесконечности.

Определение 2. Пусть $T_{a,t_0} \times \{a\} \times \{t_0\} \to X$ обозначает множество отображений $T_{a,t_0} \times \{a\} \times \{t_0\}$ в X, $\Lambda = \bigcup_{(a,t_0) \in A \times \mathbb{T}} (T_{a,t_0} \times \{a\} \times \{t_0\} \to X)$ и S — семейство движений, т. е. $S \subset \{p(\cdot; a, t_0) \in \Lambda \mid p(t_0; a, t_0) = a\}$, тогда кортеж множеств и пространств $(\mathbb{T}, X, A, S)$ будем называть динамической системой.

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ и все движения $p \in S$ непрерывные по t, то динамическая система $(\mathbb{R}_+, X, A, S)$ непрерывна. В том случае, когда элементы множества S не являются непрерывными, динамическая система является разрывной.

Далее предполагается, что движения динамической системы $p(\cdot; a, t_0)$ являются разделяющимися, т. е. $p(t; a, t_0) = (p_y(t; a, t_0), p_z(t; a, t_0))^{\mathrm{T}}$, где $p_y \in Y$ и $p_z \in Z$ при любом $t \in T_{a,t_0}$.

Принимая во внимание предположение о разделяемости движения $p(\cdot; a, t_0)$ на пространстве (X, ρ), введем подмножество $M \subset A \subset X$ и предположим, что $M = M_y \times M_z$, где $M_y \subset Y$ и $M_z \subset Z$. В этом случае для любого $x = (y, z) \in M$ будем иметь $y \in M_y$ и $z \in M_z$.

Определение 3. Пусть $(\mathbb{T}, X, A, S)$ — динамическая система с разделяющимися движениями. Множество $M \subset A$ называется инвариантным относительно движений на M_y, если $p_y(t; a, t_0) \in M_y$ при всех $t \in T_{a,t_0}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, как только $a \in M$ и $p(\cdot; a, t_0) \in S$.

Определим расстояние между точками $p_y \in Y$, $p_z \in Z$ и множествами M_y и M_z так:

$$\rho_3(p_y, M_y) = \inf_{q_y \in M_y} \rho_y(p_y, q_y), \qquad \rho_4(p_z, M_z) = \inf_{q_z \in M_z} \rho_z(p_z, q_z).$$

Предположим, что $(\mathbb{T}, X, A, S)$ — динамическая система с разделяющимися движениями и подмножество $M = M_y \times M_z \subset A$ — инвариантно относительно семейства движений S.

Определение 4. ([2]). Для заданного семейства движений S подмножество $M = M_y \times \times M_z \subset A$ является:

а) M_y-устойчивым, если M является M_y-инвариантным и для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon$ при всех $t \in T_{a,t_0}$ и при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S$, как только $\rho(a, M) < \delta$;

б) если условия определения 4, *а* не выполняются, то подмножество M является M_y-неустойчивым;

в) равномерно M_y-устойчивым, если в определении 4, *а* $\delta = \delta(\varepsilon)$ не зависит от $t_0 \in \in \mathbb{R}_+$;

г) M_y-притягивающим, если для любого $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\eta = \eta(t_0) > 0$ такое, что $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) = 0$ при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S$, как только $\rho(a, M) < \eta$;

д) асимптотически M_y-устойчивым, если пара (S, M) является M_y-устойчивой и M_y-притягивающей;

е) экспоненциально M_y-устойчивым, если существует $\alpha > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}$ при всех $t \in T_{a,t_0}$ и при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S$, как только $\rho(a, M) < \delta$.

Определение 5. Семейство движений S динамической системы $(\mathbb{T}, X, A, S)$ с разделяющимися движениями является:

а) равномерно M_y-ограниченным, если для любого $\alpha > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\beta = \beta(\alpha) > > 0$ такое, что при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S$ выполняется оценка $\rho_3(p_y(t; a, t_0), y_0) < \beta$ при $t \in T_{a,t_0}$, как только $\rho(a, x_0) < \alpha$, где $x_0 = (y_0, z_0)$ — фиксированная точка в X;

б) равномерно предельно M_y-ограниченным, если существует $\beta > 0$ и если для любых $\alpha > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\tau = \tau(\alpha) > 0$ такое, что при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S$, $\rho_3(p_y(t; a, t_0), y_0) < \beta$ при всех $t \in T_{a,t_0+\tau}$, как только $\rho(a, x_0) < \alpha$.

Определение 6. Для динамической системы $(\mathbb{T}, X, A, S)$ пара (S, M) является:

а) асимптотически M_y-устойчивой в целом, если она M_y-устойчива и для любых движений $p(\cdot; a, t_0) \in S$ и $(t_0, a) \in \mathbb{T} \times A$ имеет место $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) = 0$;

б) равномерно асимптотически M_y-устойчивой в целом, если она равномерно M_y-устойчива, равномерно M_y-ограничена и равномерно M_y-притягивающая в целом, т. е. для любого $\alpha > 0$ при любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{T}$ существует $\tau = \tau(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что при любых $p(\cdot; a, t_0) \in S$, $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon$ при всех $t \in T_{a,t_0+\tau}$ как только $\rho(a, M) < \alpha$;

в) экспоненциально M_y-устойчивой в целом, если существуют $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и для любого $\beta > 0$ существует $K(\beta) > 0$ такое, что

$$\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < K(\beta)[\rho(a, M)]^\gamma e^{-\alpha(t-t_0)},$$

при всех $t \in T_{a,t_0}$, $p(\cdot; a, t_0) \in S$, как только $\rho(a, M) < \beta$.

Таким образом, целью данной работы является получение условий устойчивости и ограниченности относительно части переменных динамической системы, определенной в метрическом пространстве.

2. Принцип сравнения с матричнозначным отображением. Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — некоторые полные метрические пространства с мерами ρ_1, ρ_2 соответственно и $(\mathbb{T}, X_1, A_1, S_1)$ — исходная динамическая система, генерируемая системой дифференциальных уравнений или некоторой системой неравенств. Предположим, что каким-либо способом построено матричнозначное отображение [3]

$$U(t,p)\colon \mathbb{T}\times X_1 \to X_2, \tag{1}$$

где U — $(m\times m)$-матричнозначная функция с элементами $u_{ij}(t,p)$, i, $j=1,2,\ldots,m$, и будем предполагать, что для любого движения $p(\cdot;a,t_0)\in S_1$ функция $q(\cdot;b,t_0)=U(\cdot;p(\cdot,a,t_0))$ с начальным значением $b=U(t_0,a)$ является другим движением, для которого $T_{a,t_0}=T_{b,t_0}$, $b\in A_2\subset X_2$.

Пусть S_2 обозначает множество движений q, которое определяется вариацией начальных значений $(t_0,a)\in\mathbb{T}\times A_1$. В этом случае $(\mathbb{T},X_2,A_2,S_2)$ является динамической системой, порождаемой движениями q. При этом множество S_2 определяется так:

$$S_2=\{q(\cdot;t_0,b)\mid q(\cdot;t_0,b)=U(t,p(t;t_0,a))\}. \tag{A}$$

Таким образом, функция (1) индуцирует отображение множества S_1 в множество S_2, которое обозначим $\mathfrak{M}$, т. е. $S_2=\mathfrak{M}(S_1)$. Введем пары множеств (S_1,M_1) и (S_2,M_2) для указанных динамических систем, для которых $M_1\subset A_1$ и $M_2\subset A_2$ являются инвариантными относительно множеств S_1 и S_2. Множества M_2 и A_2 определим так:

$$M_2\supset\{q^*\in X_2\mid q^*=U(t^*,p^*)\ \text{при некоторых}\ p^*\in M_1\ \text{и}\ t^*\in\mathbb{T}\}; \tag{B}$$

$$A_2\supset\{\widetilde{q}\in X_2\mid \widetilde{q}=U(t^*,\widetilde{p})\ \text{при некоторых}\ \widetilde{p}\in A_1\ \text{и}\ t^*\in\mathbb{T}\}. \tag{C}$$

Сформулируем теперь принцип сравнения для динамической системы в полном метрическом пространстве.

Пусть в полном метрическом пространстве определена динамическая система $(\mathbb{T},X_1,A_1,S_1)$, для которой при помощи отображения $U\colon\mathbb{T}\times X_1\to X_2$ построена другая динамическая система $(\mathbb{T},X_2,A_2,S_2)$.

Динамическая система $(\mathbb{T},X_2,A_2,S_2)$ является системой сравнения для системы $(\mathbb{T},X_1,A_1,S_1)$, если для множеств A_1, M_1, A_2, M_2, определенных выше, выполняются следующие условия:

1) $S_2=\mathfrak{M}(S_1)$ при $p(\cdot;a,t_0)\in S_1$ и $q(\cdot;b,t_0)\in S_2$, определяемых условием (A);

2) инвариантность пары (S_1,M_1) эквивалентна инвариантности пары (S_2,M_2);

3) устойчивость определенного типа пары (S_1,M_1) эквивалентна устойчивости того же типа пары (S_2,M_2);

4) ограниченность определенного типа пары (S_1,M_1) эквивалентна ограниченности того же типа пары (S_2,M_2).

3. Достаточные условия устойчивости относительно части переменных. Далее нам понадобятся функции сравнения для оценки снизу и сверху отображения (1).

Определение 7. Непрерывную функцию $\psi\colon[0,\alpha)\to[0,\infty)$, такую, что $\psi(0)=0$ и строго возрастающую на $[0,\alpha)$ будем называть функцией класса K.

Если условия этого определения выполняются при $\alpha=+\infty$, то функция $\psi\in KR$-классу.

На пространствах X_1, X_2 и Y_1 введем меры ρ_1, ρ_2 и ρ_3 соответственно. Пусть $M_1=M_y\times M_z$ и $M_y\subset Y_1$, $M_1\subset A_1\subset X_1$ и $M_2\subset A_2\subset X_2$.

Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что для заданной динамической системы* $(\mathbb{T},X_1,A_1,S_1)$ *построена система сравнения* $(\mathbb{T},X_2,A_2,S_2)$ *при помощи отображения* (1). *Если при этом:*

1) имеет место включение $S_2 \supset \mathfrak{M}(S_1)$;

2) для заданных мер ρ_1, ρ_2 и ρ_3 существуют функции сравнения ψ_1, $\psi_2 \in K$-классу такие, что

$$\psi_1(\rho_3(p_y, M_y)) \leqslant \rho_2(U(t,p), M_2) \leqslant \psi_2(\rho_1(p, M_1)) \text{ при всех } p \in X_1 \text{ и } t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

то

а) из инвариантности пары (S_2, M_2) следует M_y-инвариантность пары (S_1, M_1);

б) из устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости пары (S_2, M_2) следует M_y-устойчивость, равномерная M_y-устойчивость, асимптотическая M_y-устойчивость, и равномерная асимптотическая M_y-устойчивость пары (S_1, M_1) соответственно;

в) если существуют постоянные $N > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что

$$\psi_1(\rho_3(p_y, M_y)) = N[\rho_3(p_y, M_y)]^{\lambda}, \tag{3}$$

то из экспоненциальной устойчивости пары (S_2, M_2) следует экспоненциальная M_y-устойчивость пары (S_1, M_1);

г) если в оценках (2) функции ψ_1, $\psi_2 \in KR$-классу, то из асимптотической устойчивости в целом пары (S_2, M_2) следует асимптотическая M_y-устойчивость в целом пары (S_1, M_1);

если множества M_y и M_2 ограничены и замкнуты и если в оценках (2) функции ψ_1, $\psi_2 \in KR$-классу, то

д) из равномерной асимптотической устойчивости в целом пары (S_2, M_2) следует равномерная асимптотическая M_y-устойчивость в целом пары (S_1, M_1);

е) если существуют постоянные $\theta_1 > 0$ и $\mu_1 > 0$ такие, что

$$\psi_1(\rho_3(p_y, M_y)) = \theta_1[\rho_3(p_y, M_y)]^{\mu_1},$$

то из экспоненциальной устойчивости в целом пары (S_2, M_2) следует экспоненциальная M_y-устойчивость в целом пары (S_1, M_1).

Доказательство. Докажем утверждение *а*, т. е. что из инвариантности пары (S_2, M_2) следует M_y-инвариантность пары (S_1, M_1). Пусть пара (S_2, M_2) инвариантна. Из условия 1 теоремы 1 следует, что для любого $a \in M_1$ и любого движения $p(\cdot; a, t_0) \in S_1$ будет $q(\cdot; b, t_0) = U(\cdot, p(\cdot; a, t_0))$, где $b = U(t_0, a)$, $b \in M_2$. Так как пара (S_2, M_2) инвариантна, то $q(t; b, t_0) = U(t, p(t; a, t_0)) \in M_2$ при всех $t \in T_{b,t_0}$.

Из условия 2 теоремы 1 следует, что $p_y(t; a, t_0) \in M_y$ при всех $t \in T_{a,t_0} = T_{b,t_0}$ так как M_y замкнуто. Этим утверждение *а* теоремы 1 доказано.

Теперь докажем утверждение *б*. Пусть пара (S_2, M_2) устойчива. Тогда для любого $\varepsilon_2 > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon_2) > 0$ такое, что $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2$ при любых $q(\cdot; b, t_0) \in S_2$ и $t \in T_{b,t_0}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$. Покажем, что пара (S_1, M_1) — M_y-устойчива. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выберем ε_2 из соотношения $\varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$ и $\delta_1 = \psi_2^{-1}(\delta_2)$. Если $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$, то вследствие оценки (2) получим

$$\rho_2(b, M_2) \leqslant \psi_2(\rho_1(a, M_1)) < \psi_2(\delta_1) = \delta_2.$$

Отсюда следует, что при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S_1$ и $t \in T_{a,t_0} = T_{b,t_0}$ выполняется оценка

$$\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) \leqslant \psi_1^{-1}(\rho_2(U(t, p(t; a, t_0)), M_2)) < \psi_1^{-1}(\varepsilon_2) = \psi_1^{-1}(\psi_1(\varepsilon_1)) = \varepsilon_1$$

как только $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$. Этим доказано, что пара (S_1, M_1) — M_y-устойчива.

Доказательство равномерной M_y-устойчивости пары (S_1, M_1) проводим по той же схеме, учитывая, что δ_1 и δ_2 выбираются независимо от t_0.

Для доказательства асимптотической M_y-устойчивости пары (S_1, M_1) достаточно показать, что из притяжения пары (S_2, M_2) следует M_y-притяжение пары (S_1, M_1). Итак, пусть пара (S_2, M_2) притягивающая. В этом случае существует $\Delta_2 = \Delta_2(t_0)$ и для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon_2, t_0, q) > 0$, $q = q(\cdot; b, t_0) \in S_2$ такое, что $\rho_2(q, M_2) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{b,t_0+\tau}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \Delta_2$. Далее для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$ и положим $\Delta_1 = \psi_2^{-1}(\Delta_2)$. При этом для любого движения $p \in S_1$ получим, что

$$\rho_2(b, M_2) \leqslant \psi_2(\rho_1(a, M_1)) < \psi_2(\Delta_1) = \psi_2(\psi_2^{-1}(\Delta_2)) = \Delta_2,$$

т. е. $\rho_2(b, M_2) < \Delta_2$, как только $\rho_1(a, M_1) < \Delta_1$ и $t \in T_{a,t_0+\tau} = T_{b,t_0+\tau}$. Следовательно, $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{b,t_0+\tau}$. Возвращаясь вновь к оценке (2), находим, что

$$\rho_3(p_y, M_y) \leqslant \psi_1^{-1}(\rho_2(q, M_2)) < \psi_1^{-1}(\varepsilon_2) = \psi_1^{-1}(\psi_1(\varepsilon_1)) = \varepsilon_1.$$

Отсюда следует, что пара (S_1, M_1) — M_y-притягивающая и поэтому она асимптотически M_y-устойчива.

Доказательство равномерной асимптотической M_y-устойчивости пары (S_1, M_1) проводится аналогично, с учетом того, что Δ_1 и Δ_2 выбираются независимо от $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Докажем далее утверждение *в*. Пусть пара (S_2, M_2) — экспоненциально устойчива. При этом существует $\mu_2 > 0$ и для любых ε_2 и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2)$ такое, что

$$\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 \exp[-\mu_2(t - t_0)]$$

при всех $t \in T_{b,t_0}$ и при всех $q(\cdot; b, t_0) \in S_2$, как только $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$. Далее для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = N\varepsilon_1^{\lambda}$. Пусть $\mu_1 = \mu_2/\lambda$ и $\delta_1 = \psi_2^{-1}(\delta_2) = \delta_1(\varepsilon_1)$. В этом случае, согласно (2), имеем

$$\rho_2(b, M_2) \leqslant \psi_2(\rho_1(a, M_1)) < \psi_2(\psi_2^{-1}(\delta_2)) = \delta_2,$$

т. е. $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$, как только $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$.

Из условия (2) следует, что

$$\begin{aligned} N[\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y)]^{\lambda} &\leqslant \rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 \exp[-\mu_2(t - t_0)] = \\ &= N\varepsilon_1^{\lambda} \exp[-\lambda\mu_1(t - t_0)] \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Неравенство (4) эквивалентно следующему:

$$\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \varepsilon_1 \exp[-\mu_1(t - t_0)]$$

при всех $t \in T_{a,t_0}$ и при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S_1$, как только $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$. Следовательно, пара (S_1, M_1) экспоненциально M_y-устойчива.

Доказательство асимптотической M_y-устойчивости в целом пары (S_1, M_1) проводится по той же схеме, что и доказательство асимптотической M_y-устойчивости пары (S_1, M_1). При этом следует учесть, что ψ_1, $\psi_2 \in KR$-классу и ψ_1^{-1}, $\psi_2^{-1} \in KR$-классу.

4. Достаточные условия ограниченности относительно части переменных динамической системы. Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что для заданной динамической системы* $(\mathbb{T}, X_1, A_1, S_1)$ *построена система сравнения* $(\mathbb{T}, X_2, A_2, S_2)$ *при помощи отображения* (1). *Если при этом:*

1) множества движений S_1 *и* S_2 *такие, что* $S_2 = \mathfrak{M}(S_1)$;

2) для заданных мер ρ_1, ρ_2 *и* ρ_3 *существуют функции сравнения* ψ_1, $\psi_2 \in KR$*-классу, удовлетворяющие оценке 2;*

3) множества M_y, M_2 *ограничены, но необязательно замкнуты.*

Тогда из равномерной ограниченности и равномерной предельной ограниченности множества движений S_2 *следует равномерная* M_y*-ограниченность и равномерная предельная* M_y*-ограниченность множества движений* S_1 *соответственно.*

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 ограничены и семейство движений S_2 равномерно ограничено. В этом случае для любых $\alpha_2 > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\gamma_2 = \gamma_2(\alpha_2) > 0$ такое, что для движений $q(\cdot; b, t_0) \in S_2$ с начальными условиями $\rho_2(b, M_2) < \alpha_2$ будет выполняться неравенство $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \gamma_2$ при всех $t \in T_{b,t_0}$. Для любого $\alpha_1 > 0$ выберем $\alpha_2 = \psi_2(\alpha_1)$, $\gamma_1 = \psi_1^{-1}(\gamma_2)$. Если $\rho_1(a, M_1) < \alpha_1$, то $\rho_2(b, M_2) < \psi_2(\alpha_1) = \alpha_2$ и, следовательно, $\rho_2(q(t; \tau_0, b), M_2) < \gamma_2$. Из оценки (2) получим $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \psi_1^{-1}(\gamma_2) = \gamma_1$. Отсюда следует, что семейство движений S_1 является равномерно M_y-ограниченным.

Далее докажем, что множество движений S_1 является равномерно предельно M_y-ограниченным. Пусть в оценке (2) функции ψ_1, $\psi_2 \in KR$-классу и множества M_y и M_2 ограничены. Согласно условиям теоремы 2, множество S_2 равномерно предельно ограничено, поэтому для любого $\alpha_2 > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\beta_2 > 0$ и $\tau_2 = \tau_2(\alpha_2) > 0$ такие, что при всех $q(\cdot; b, t_0) \in S_2$ имеет место оценка $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \beta_2$ при всех $t \in T_{b,t_0+\tau_2}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \alpha_2$. Выберем $\beta_1 = \psi_1^{-1}(\beta_2)$ и для любых $\alpha_1 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ примем $\alpha_2 = \psi_2(\alpha_1)$. Пусть $\rho_1(a, M_1) < \alpha_1$, тогда для $b = U(t_0, a)$ получим $\rho_2(b, M_2) < \psi_2(\alpha_1) = \alpha_2$ и, следовательно, $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \beta_2$. Теперь из оценки (2) следует, что $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \psi_1^{-1}(\beta_2) = \beta_1$ при всех $t \in T_{a,t_0+\tau_1} = T_{b,t_0+\tau_2}$. Этим доказаны утверждения теоремы 2.

Докажем далее утверждение *д* теоремы 1. Чтобы доказать равномерную глобальную асимптотическую M_y-устойчивость пары (S_1, M_1) достаточно показать, что пара (S_1, M_1) равномерно M_y — притягивающая. Пусть пара (S_2, M_2) равномерно притягивающая в целом. Тогда для любых $\beta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выберем $\alpha = \psi_2(\beta)$ и $\varepsilon_2 = \psi_1(\varepsilon_1)$. В этом случае найдется $\tau_2 = \tau_2(\varepsilon_2, \alpha) = \tau_2(\varepsilon_1, \beta)$ такое, что если $\rho_2(b, M_2) < \alpha$, тогда $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{a,t_0+\tau_2}$. Пусть $\tau_1 = \tau_2$. Если $\rho_1(a, M_1) < \beta$, тогда $\rho_2(b, M_2) < \alpha$. Из оценки (2) получим $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) < \psi_1^{-1}(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ при всех $t \in T_{a,t_0+\tau_1} = T_{b,t_0+\tau_2}$. Этим утверждение *д* доказано.

Утверждение *е* доказывается так. Пусть пара (S_2, M_2) — экспоненциально устойчива в целом. Тогда существует $\alpha_2 > 0$, $\mu_2 > 0$ и для любого $\beta_2 > 0$ существует $k_2(\beta_2) > 0$ такое, что $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) \leqslant k_2(\beta_2)[\rho_2(b, M_2)]^{\mu_2} \exp[-\alpha_2(t - t_0)]$ при всех $q(\cdot; b, t_0) \in S_2$ и при всех $t \in T_{b,t_0}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \beta_2$. Из оценки (2) и условия *е* теоремы 1 имеем

$$\theta_1[\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y)]^{\mu_1} \leqslant \rho_2(q(t; b, t_0), M_2), \qquad \rho_2(b, M_2) \leqslant \theta_2[\rho_1(a, M_1)]^{\mu_1}.$$

Отсюда следует, что $\theta_1[\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y)]^{\mu_1} \leqslant k_2(\beta_2)\theta_2^{\mu_2}[\rho_1(a, M_1)]^{\mu_2\mu_1} \exp[-\alpha_2(t - t_0)]$.

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2/\mu_1$, $\mu_1 = \mu_2$ и для любого $\beta_1 > 0$ пусть $\theta_2^{\mu_1} k_2(\beta_2) = \theta_1[k_1(\beta_1)]^{\mu_1}$. При этом получим $\rho_3(p_y(t; a, t_0), M_y) \leqslant k_1(\beta_1)[\rho_1(a, M_1)]^{\mu_1} \exp[-\alpha_1(t - t_0)]$ при всех $p(\cdot; a, t_0) \in S_1$ и при всех $t \in T_{a,t_0}$, как только $\rho_1(a, M_1) < \beta_1$. Отсюда следует, что пара (S_1, M_1) экспоненциально M_y-устойчива в целом.

Этим завершено доказательство всех утверждений теорем 1 и 2.

1. *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Ленинград: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1957. – 238 с.
2. *Michel A. N., Wang K., Hu B.* Qualitative theory of dynamical systems. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
3. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения разрывных динамических систем // Докл. АН. – 2004. – **397 (3)**. – С. 308–312.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.10.2007

УДК 539.3

Л. В. Назаренко

Деформативные свойства трансверсально-изотропных композитов с учетом долговременной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции микродолговечности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошуном)

The theory of long-term damageability for homogeneous materials is generalized to the case of discrete-fiber composite materials of stochastic structure. The equations of mechanics of microнонuniform media of stochastic structure are put in a basis of the theory. The process of damageability of components of a composite is modeled by the appearance of stochastically located micropores. The criterion of the destruction of an individual microvolume is characterized by its long-term durability determined by dependence of the time of fragile destruction on a degree of closeness of an equivalent stress to its limiting value, describing the short-term durability by the Huber–Mises criterion which is taken as a stochastic function of coordinates. Effective deformative properties and the stress strain state of a discrete-fiber composite with microdamages in components are determined on the basis of the stochastic equations of elasticity of discrete-fiber media with porous components. An algorithm of calculation of dependences of microdamageability of components of a discrete-fiber material and macrostresses or macrodeformations on time are constructed, and the corresponding curves are obtained in the case of an exponential-power function of microdurability.

Структурная теория длительной повреждаемости однородного материала, построенная на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, изложена в работе [1] и обобщена для зернистых композитов. В настоящей работе теория длительной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции микродолговечности обобщается на случай композитного материала, армированного однонаправленными сфероидальными волокнами.