УДК 517.929

А.В. Шатырко, Д.Я. Хусаинов

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Доказаны достаточные условия абсолютной интервальной устойчивости решений нелинейных систем регулирования нейтрального типа, равномерной по отклонению аргумента. Построены оценки экспоненциального затухания решений. Аппаратом исследования выбран метод функций Ляпунова.

Асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения систем с нелинейностью «секторного вида» получила название абсолютной устойчивости [1, 2]. В настоящей статье рассматриваются системы дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Исследование проводится методом функций Ляпунова с функцией вида суммы квадратичной формы и интеграла от нелинейности [2, 3]. В последнее время исследуются системы с неточно заданными коэффициентами. Получила развитие так называемая «интервальная абсолютная устойчивость» [4–7]. Настоящая работа является продолжением статей [1, 5–8]. Цель ее — улучшить с позиций прикладной математики ранее полученные авторами результаты. С помощью терминологии, определений и обозначений работ [1, 5–8] получены конструктивные, с вычислительной точки зрения, достаточные условия абсолютной интервальной равномерной по запаздыванию устойчивости и вычислены коэффициенты экспоненциального затухания решений интервальной системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Dx(t-\tau)] = Ax(t)+Bx(t-\tau)+bf(\sigma(t)),\ \sigma(t)=c^{\mathrm{T}}x(t),\ \ t\geq 0\,. \quad (1)$$

Здесь $x(t)\in R^n$, A, B, D — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами, $b, c\in R^n$, $\tau>0$ — постоянное запаздывание, $f(\sigma)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица, $f(0)=0$ и условию «сектора»

$$[k\sigma - f(\sigma)]\sigma > 0\,,\ k>0\,. \quad (2)$$

Под решением системы будем понимать кусочно-непрерывно дифференцируемую функцию $x(t)$, которая тождественно удовлетворяет системе (1) и начальным условиям $x(t)=\varphi(t),\ \dot{x}(t)=\psi(t),$ где $\varphi(t),\ \psi(t)$ — произвольные непрерывные функции, определенные при $-\tau \le t \le 0$.

Большинство реальных объектов, процессов, систем функционирует в условиях неопределенности. Например, параметры систем могут быть не точно известны, но принимают свои значения из некоторых заранее заданных интервалов, и тогда более адекватной моделью системы управления является система дифференциальных уравнений с неточно заданными параметрами вида

$$\frac{d}{dt}[x(t)-Dx(t-\tau)] = (A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)x(t-\tau)+bf(\sigma(t)),$$
$$\sigma(t) = c^{\mathrm{T}}x(t),\ \ t\ge 0, \tag{3}$$

где $\Delta A=\{\Delta a_{ij}\},\ \Delta B=\{\Delta b_{ij}\},\ i,j=\overline{1,n}$ — матрицы с коэффициентами, принимающими значения из некоторых фиксированных интервалов

$$|\Delta a_{ij}|\le\alpha_{ij},\ |\Delta b_{ij}|\le\beta_{ij},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Определение. Будем говорить, что система (1) абсолютно интервально устойчива, если нулевое решение системы (3) экспоненциально устойчиво при произвольной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей «условиям сектора» (2), и матрицах $\Delta A=\{\Delta a_{ij}\},\ \Delta B=\{\Delta b_{ij}\},\ i,j=\overline{1,n},$ с коэффициентами, принимающими значения из интервалов (4).

2. Абсолютная устойчивость систем регулирования, описываемых уравнениями нейтрального типа

Для исследования абсолютной интервальной устойчивости используем функцию Ляпунова вида Лурье–Постникова [2, 3] с экспоненциальным множителем

$$V(x,t) = e^{\gamma t}\{x^{\mathrm{T}}Hx+\beta\int_0^{\sigma(x)} f(\sigma)\,d\sigma\} \tag{5}$$

и с положительно-определенной матрицей H. Как следует из введенных векторных и матричных норм [1, 5–8] и условия (2), для функции $V(x,t)$ справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$e^{\gamma t}\lambda_{\min}(H)|x|^2 \le V(x,t)\le e^{\gamma t}\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)|x|^2,$$
$$\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta) = \lambda_{\max}(H)+\frac{1}{2}\beta k|c|^2\ . \tag{6}$$

Для дальнейших исследований в конечномерных пространствах (вычислительная конструктивность) существенным является использование условий Б.С. Разумихина [9, 10] при построении оценки полной производной функции $V(x,t)$ вдоль решений системы.

Будем считать, что система без отклонения аргумента

$$\frac{d}{dt}(I-D)x(t)=(A+B)x(t)+bf(\sigma(t)),\ \sigma(t)=c^{\mathrm{T}}x(t),\ t\geq 0,$$

асимптотически устойчива. Поскольку по условию $|D|<1$, то ее можно записать в виде

$$\dot{x}(t)=(I-D)^{-1}(A+B)x(t)+(I-D)^{-1}bf(\sigma(t)),\ \ \sigma(t)=c^{\mathrm{T}}x(t),\ \ t\geq 0. \qquad (7)$$

И если матрица $(I-D)^{-1}(A+B)$ асимптотически устойчивая, то матричное уравнение Ляпунова

$$[(I-D)^{-1}(A+B)]^{\mathrm{T}}H+H(I-D)^{-1}(A+B)=-C \qquad (8)$$

при произвольной положительно-определенной матрице C имеет единственное решение — положительно-определенную матрицу H [11]. Пусть $\partial V_t^{\alpha,\gamma}$ — поверхность уровня $V(x,t)=\alpha$ функции Ляпунова (5), а $V_t^{\alpha,\gamma}$ — область в расширенном фазовом пространстве $R^n\times R$, которую она ограничивает, т.е.

$$\partial V_t^{\alpha,\gamma}=\{(x,t)\in R^n\times R: V(x,t)=\alpha\},\quad V_t^{\alpha,\gamma}=\{(x,t)\in R^n\times R: V(x,t)<\alpha\}. \qquad (9)$$

Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $(m-1)\tau\ \leq\ t<m\tau$. Тогда система уравнений нейтрального типа (3) эквивалентна системе уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=D^m\dot{x}(t-m\tau)+Ax(t)+\sum_{i=1}^{m-1}D^{i-1}[DA+B]x(t-i\tau)+D^{m-1}Bx(t-m\tau)+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}D^i bf(\sigma(t-i\tau))+\sum_{i=0}^{m-1}D^i\Delta Ax(t-i\tau)+\sum_{i=1}^{m}D^{i-1}\Delta Bx(t-i\tau) \qquad (10)$$

с начальными условиями $x(t)\equiv\varphi(t),\ \ \dot{x}(t)=\psi(t),\ \ -\tau\leq t\leq 0$.

Доказательство. Перепишем систему (3) в виде

$$\dot{x}(t)=D\dot{x}(t-\tau)+(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)x(t-\tau)+bf(\sigma(t)). \qquad (11)$$

Подставив вместо $\dot{x}(t-\tau)$ его значение, определенное аналогичной зависимостью

$$\dot{x}(t-\tau)=D\dot{x}(t-2\tau)+(A+\Delta A)x(t-\tau)+(B+\Delta B)x(t-2\tau)+bf(\sigma(t-\tau)),$$

и проделав так $m-1$ итераций $((m-1)\tau\ \leq\ t<m\tau)$, получим соотношение

$$\dot{x}(t)=D^m\dot{x}(t-m\tau)+(A+\Delta A)x(t)+\sum_{i=1}^{m-1}D^{i-1}[D(A+\Delta A)+(B+\Delta B)]x(t-i\tau)+$$

$$+D^{m-1}(B+\Delta B)x(t-m\tau)+\sum_{i=0}^{m-1} D^i b f(\sigma(t-i\tau)).$$

Отсюда следует соотношение (10).

Лемма 2. Пусть для производной функции $V(x,t)$ вдоль решения системы (3) $x(t)$ при $t>0$ выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) < -Me^{\gamma t}|x(t)|^2 + Ne^{\theta t}|x(t)|, \quad M>0, \ N>0. \tag{12}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|x(t)| < \sqrt{\varphi(H,\beta)}\,\|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)}\times$$

$$\times\frac{N}{M+(2\theta+\gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\times\left[\exp\{(\theta-\gamma)t\}-\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right)\right]. \tag{13}$$

Доказательство проводится аналогично лемме 3 [1].

Лемма 3. Пусть для решения $x(t)$ системы (3) при $-\tau \le s < T$, $T \ge 0$, выполняется $(x(s),s)) \in V_t^{\alpha,\gamma}$, $(x(T),T)) \in \partial V_t^{\alpha,\gamma}$. Тогда справедливо неравенство

$$|x(T)-x(T-\tau)| \le [1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|. \tag{14}$$

Доказательство. Как следует из двусторонних оценок (6), имеет место соотношение

$$e^{\gamma(T-\tau)}\lambda_{\min}(H)|x(T-\tau)|^2 \le V(x(T-\tau),T-\tau) < V(x(T),T) \le$$

$$\le e^{\gamma T}\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)|x(T)|^2.$$

Отсюда

$$|x(T-\tau)| < e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\,|x(T)|.$$

В результате

$$|x(T)-x(T-\tau)| \le |x(T)|+|x(T-\tau)| < [1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|.$$

Лемма 4. Пусть для решения $x(t)$ системы (3) при $-\tau \le s < T$, $T \ge 0$, выполняется $(x(s),s)) \in V_t^{\alpha,\gamma}$, $(x(T),T)) \in \partial V_t^{\alpha,\gamma}$. Тогда справедливо неравенство

$$|\dot{x}(T)-\dot{x}(T-\tau)| \le 2|D|^{m-1}(1+|D|)\,\|\dot{x}(0)\|_\tau + K[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|+$$

$$+\frac{|\Delta A|}{1-|D|}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|+\frac{|\Delta B|}{1-|D|}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|, \qquad (15)$$

$$K=\frac{|A|+|B|+k|b||c|}{1-|D|}.$$

Доказательство. Как следует из вида системы (3), имеет место неравенство

$$|\dot{x}(T)-\dot{x}(T-\tau)|\le |D||\dot{x}(T)-\dot{x}(T-2\tau)|+|A+\Delta A||x(T)-x(T-\tau)|+$$

$$+|B+\Delta B||x(T)-x(T-2\tau)|+|b|\|f(\sigma(T))-f(\sigma(T-\tau))\|.$$

Повторив оценку $(m-1)$ раз, получим

$$|\dot{x}(T)-\dot{x}(T-\tau)|\le |D|^{m-1}[|\dot{x}(T-(m-1)\tau)-\dot{x}(0)|+|\dot{x}(0)-\dot{x}(T-m\tau)|]+$$

$$+|A+\Delta A||x(T)-x(T-\tau)|+|D||A+\Delta A||x(T-\tau)-x(T-2\tau)|+\ldots$$

$$\ldots+|D|^{m-2}|A+\Delta A||x(T-(m-2)\tau)-x(T-(m-1)\tau)|+$$

$$+|B+\Delta B||x(T-\tau)-x(T-2\tau)|+|D||B+\Delta B||x(T-2\tau)-x(T-3\tau)|+\ldots$$

$$\ldots+|D|^{m-2}|B+\Delta B||x(T-(m-1)\tau)-x(T-m\tau)|+$$

$$+|b||f(\sigma(T))-f(\sigma(T-\tau))|+|D||b||f(\sigma(T-\tau))-f(\sigma(T-2\tau))|+\ldots$$

$$\ldots+|D|^{m-2}|b||\sigma(T-(m-2)\tau)-\sigma(T-(m-1)\tau)|<$$

$$<2|D|^{m-1}(1+|D|)\|\dot{x}(0)\|_\tau+\frac{|A+\Delta A|}{1-|D|}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|+$$

$$+\frac{|B+\Delta B|}{1-|D|}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|+\frac{k|b||c|}{1-|D|}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|x(T)|.$$

Отсюда следует утверждение (15) леммы 4.

Для большей наглядности дальнейших результатов введем следующие обозначения:

$$S_1[H,\beta,\nu,\gamma]=\begin{bmatrix} S_{11}^0-\frac{1}{1}\gamma\beta k^2 & S_{12}^0+\frac{1}{2}\nu c \\ (S_{12}^0)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\nu c^{\mathrm{T}} & S_{22}^0+\frac{1}{k}\nu \end{bmatrix},\quad S_0[H,\beta,\gamma]=\begin{bmatrix} S_{11}^0 & S_{12}^0 \\ (S_{12}^0)^{\mathrm{T}} & S_{22}^0 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^0=-\gamma H-[(I-D)^{-1}(A+B)]^{\mathrm{T}}H-H[(I-D)^{-1}(A+B)],$$

$$S_{12}^{0} = -H[(I-D)^{-1}b] - \frac{1}{2}\beta(A+B)c\,,\ S_{22}^{0} = -\beta c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}b\,,$$

$$R_1(B,D) = \{2[\,|HB(I-D)^{-1}| + |HD(I-D)^{-1}|\,k] + \beta k\,|c|\,\times$$

$$\times[\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}B| + |c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}|\,K]\}\times[1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}],$$

$$R_2(B,D) = 2(1+D)\,[\,|HD(I-D)^{-1}| + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D|\,], \qquad (16)$$

$$L_1(\bullet) = \frac{2\,|HD(I-D)^{-1}| + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D|}{1-|D|}[1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}] +$$

$$+\beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}H(I-D)^{-1}|,$$

$$L_2(\bullet) = \left[\frac{2\,|HD(I-D)^{-1}D| + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D|}{1-|D|} +\right.$$

$$\left. + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}| + 2\,|H(I-D)^{-1}|\right]\times$$

$$\times\ [1 + e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}] + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}H(I-D)^{-1}|,$$

$$L_3(\bullet) = 2(1+|D|)[2\,|HD(I-D)^{-1}| + \beta k\,|c|\,|c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D|\,],$$

$$\widetilde{M}[\bullet] = (1-\alpha_1-\alpha_2)\{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)\},\ \ N[\bullet] = \frac{N(B,D)}{|D|}\,\|\dot{x}(0)\|_{\tau},$$

$$\alpha_1 > 0,\ \ \alpha_2 > 0,\ \ \alpha_1+\alpha_2 < 1,\ \ \theta = \gamma - \frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}\,.$$

Приведем утверждение об интервальной абсолютной устойчивости системы (1), соответственно получим оценки сходимости решений системы (3).

Теорема. Пусть $|D|<1$ и существует положительно-определенная матрица H и параметры $\beta>0,\ \nu>0,\ 0<\gamma<\frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}$, при которых выполняется неравенство

$$\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D) > 0\,, \qquad (17)$$

а «возмущенные» матрицы удовлетворяют соотношениям

$$|\Delta A| < \alpha_1\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{L_1(\bullet)},\ |\Delta B| < \alpha_2\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{L_2(\bullet)},\ \alpha_1>0\,,\ \alpha_2>0\,,\ \alpha_1+\alpha_2<1\,. \qquad (18)$$

Тогда система (1) абсолютно интервально устойчива в метрике C^1 при произвольном $\tau>0$, причем для произвольного решения $x(t)$, $t>0$, системы (3) справедлива следующая оценка сходимости:

$$|x(t)| \le \sqrt{\varphi(H,\beta)}\, \| x(0) \|_\tau \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right\} + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)} \frac{\widetilde{N}[\bullet]}{\widetilde{M}[\bullet]+(2\theta-\gamma)\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} \times$$

$$\times\left[\exp\{(\theta-\gamma)\,t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right\}\right], \tag{19}$$

а для его производной —

$$|\dot{x}(t)| \le \left[\| \dot{x}(0)\|_\tau + \frac{|B|}{|D|}\| x(0) \|_\tau\right] e^{-\frac{t}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}} +$$

$$+\left[|A| + \frac{k\,|b\|c| + |DA+B| + |\Delta A| + |\Delta B|}{1-|D|}\right] \times \sqrt{\varphi(H,\beta)}\, \| x(0) \|_\tau \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right\} + \frac{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)} \times \frac{\widetilde{N}[\bullet]}{\widetilde{M}[\bullet]+(2\theta+\gamma)\,\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)} \times$$

$$\times\left[\exp\{(\theta-\gamma)t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{M}[\bullet]}{\overline{\lambda}_{\max}(H,\beta)}+\gamma\right)t\right\}\right]. \tag{20}$$

Доказательство. Перепишем систему (3) в виде

$$(I-D)\dot{x}(t) = (A+B)x(t) + B[x(t-\tau) - x(t)] + D[\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)] + bf(\sigma(t)) +$$

$$+ (\Delta A + \Delta B)\,x(t) + \Delta B[x(t-\tau) - x(t)].$$

Поскольку $|D|< 1,$ можно записать

$$\dot{x}(t) = (I-D)^{-1}\{(A+B)x(t) + B[x(t-\tau)-x(t)] + D[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)] + bf(\sigma(t))\} +$$

$$+(I-D)^{-1}(\Delta A+\Delta B)x(t) + (I-D)^{-1}\Delta B[x(t-\tau)-x(t)]. \tag{21}$$

Вычислим полную производную функции Ляпунова вида (5) вдоль решений системы (21). Проведя несложные преобразования и используя обозначения (16), запишем ее в виде суммы квадратичной формы с «возмущениями»:

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t) = -e^{\gamma t}(x^{\mathrm{T}}(t), f(\sigma(t))) \times S_0[H,\beta,\gamma] \times (x^{\mathrm{T}}(t), f(\sigma(t)))^{\mathrm{T}} +$$

$$+\,2e^{\gamma t}[x(t-\tau)-x(t)]^{\mathrm{T}}[(I-D)^{-1}B]^{\mathrm{T}}Hx(t)+2e^{\gamma t}[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)]\times$$

$$\times\;[(I-D)^{-1}D]^{\mathrm{T}}Hx(t)+\beta e^{\gamma t}f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}B[x(t-\tau)-x(t)]+$$

$$+\,\beta e^{\gamma t}f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)]+\gamma\beta e^{\gamma t}\int\limits_0^{\sigma(t)}f(\sigma)d\sigma+$$

$$+\,e^{\gamma t}[\beta f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}+2x^{\mathrm{T}}(t)H](I-D)^{-1}(\Delta A+\Delta B)x(t)+$$

$$+\,e^{\gamma t}[\beta f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}+2x^{\mathrm{T}}(t)H](I-D)^{-1}\Delta B[x(t-\tau)-x(t)].$$

Используя так называемую S-процедуру [12] и свойства (2) функции $f(\sigma)$ и мажорируя значение интеграла, запишем полученное выражение с матрицей $S_1[H,\beta,\nu,\gamma]$ в виде

$$\frac{d}{dt}V(x(t),t)=-e^{\gamma t}(x^{\mathrm{T}}(t),\,f(\sigma(t)))\times S_1[H,\beta,\nu,\gamma]\times(x^{\mathrm{T}}(t),\,f(\sigma(t)))^{\mathrm{T}}+$$

$$+\,2e^{\gamma t}[x(t-\tau)-x(t)]^{\mathrm{T}}[(I-D)^{-1}B]^{\mathrm{T}}Hx(t)\;+\;2e^{\gamma t}[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)]\times$$

$$\times[(I-D)^{-1}D]^{\mathrm{T}}Hx(t)\;+\;\beta e^{\gamma t}f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}B[x(t-\tau)-x(t)]\;+$$

$$+\,\beta e^{\gamma t}f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D[\dot{x}(t-\tau)-\dot{x}(t)]-\nu e^{\gamma t}f(\sigma(t))[\sigma(t)-\frac{1}{k}f(\sigma(t))]+$$

$$+\,e^{\gamma t}[\beta\,f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}+2x^{\mathrm{T}}(t)H](I-D)^{-1}(\Delta A+\Delta B)x(t)+$$

$$+\,e^{\gamma t}[\beta\,f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}}+2x^{\mathrm{T}}(t)H](I-D)^{-1}\Delta B[x(t-\tau)-x(t)].\tag{22}$$

Рассмотрим каждое из «возмущений» в момент $(m-1)\tau\;\le\;T<m\tau.$

1. Для первого «возмущения» получаем оценку

$$[x(T-\tau)-x(T)]^{\mathrm{T}}[(I-D)^{-1}B]^{\mathrm{T}}Hx(T)\;\le\;|\,HB(I-D)^{-1}\,||\,x(T)\,||\,x(T-\tau)-x(T)\,|\le$$

$$\le\;|\,HB(I-D)^{-1}\,|\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\,]\,|\,x(T)\,|^2\;.\tag{23}$$

2. Для второго «возмущения» получаем

$$[\dot{x}(T-\tau)-\dot{x}(T)][(I-D)^{-1}D]^{\mathrm{T}}Hx(T)\le|\,HD(I-D)^{-1}\,\|\,x(T)\,\|\,\dot{x}(T-\tau)-\dot{x}(T)\,|\le$$

$$\le|\,HD(I-D)^{-1}\,|\{2\,|\,D\,|^{m-1}\,(1+|\,D\,|)\,\|\,\dot{x}(0)\,\|_{\tau}\,+K\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\,]\,|\,x(T)\,|+$$

$$+\frac{|\,\Delta A\,|}{1-|\,D\,|}\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\,]\,|\,x(T)\,|+\frac{|\,\Delta B\,|}{1-|\,D\,|}\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}\,]\,|\,x(T)\,|\}\,|\,x(T)\,|=$$

$$= 2\,|HD(I-D)^{-1}\|\,D|^{m-1}\,(1+|D|)\,\|\dot{x}(0)\|_{\tau}|\,x(T)\,| + |HD(I-D)^{-1}|\times$$

$$\times K\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2} + \frac{|\Delta A|}{1-|D|}\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2} +$$

$$+\frac{|\Delta B|}{1-|D|}\,[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2}\,. \qquad (24)$$

3. Для третьего «возмущения» имеем

$$\beta f(\sigma(T))\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}B[x(T)-x(T-\tau)] \le \beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}B\,|\times$$

$$\times[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2}\,. \qquad (25)$$

4. Для четвертого «возмущения» получаем

$$\beta f(\sigma(T))\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D[\dot{x}(T)-\dot{x}(T-\tau)] \le$$

$$\le \beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D\,\|\,\dot{x}(T)-\dot{x}(T-\tau)\,\|\,x(T)\,| \le$$

$$\le 2\beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D\,|\,(1+|D|)\,|\,D\,|^{m-1}\|\,\dot{x}(0)\,\|_{\varsigma}|\,x(T)\,| +$$

$$+\beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D\,|\,K[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2} +$$

$$+\beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D\,|\,\frac{|\Delta A|}{1-(D)}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2} +$$

$$+\beta k\,|\,c\,\|\,c^{\mathrm{T}}(I-D)^{-1}D\,|\,\frac{|\Delta B|}{1-(D)}[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2}\,. \qquad (26)$$

5. Для пятого «возмущения» имеем

$$[\beta f(\sigma(t))c^{\mathrm{T}} + 2x^{\mathrm{T}}(T)H\,](I-D)^{-1}(\Delta A+\Delta B)x(T) \le$$

$$\le [\beta k\,|\,c\,|^{2} + 2\,|\,H\,|]\,|\,(I-D)^{-1}\,\|\,\Delta A\,\|\,x(T)x(T)\,|^{2} +$$

$$+[\,\beta k\,|\,c\,|^{2} + 2\,|\,H\,|]\,|\,(I-D)^{-1}\,\|\,\Delta B\,\|\,x(T)\,|^{2}\,. \qquad (27)$$

6. Для шестого «возмущения» получаем

$$[\beta f(\sigma(t))\,c^{\mathrm{T}} + 2x^{\mathrm{T}}(t)H](I-D)^{-1}\Delta B[x(t-\tau)-x(t)] \le [\beta k\,|\,c\,|^{2} +$$

$$+\,2\,|\,H\,|]\,|\,(I-D)^{-1}\,\|\,\Delta B\,|[1+e^{\gamma\tau}\sqrt{\varphi(H,\beta)}]\,|\,x(T)\,|^{2}\,. \qquad (28)$$

После подстановки оценок возмущений (23)–(28) в момент времени $t = T$ в значение полной производной функции Ляпунова с использованием обозначений (16) для $R_1(B,D)$, $R_2(B,D)$, $L_1(\bullet)$, $L_2(\bullet)$ получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(T),T) \le -e^{\gamma T}\{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)\}\,|\,x(T)\,|^2 + e^{\gamma T}L_1(\bullet)\times$$

$$\times|\,\Delta A\|\,x(T)\,|^2 + e^{\gamma T}L_2(\bullet)\,|\,\Delta B\,\|\,x(T)\,|^2 + e^{\gamma T}R_2(B,D)\,\|\,\dot{x}(0)\,\|_\tau\,|\,x(T)\,|.$$

Пусть существуют симметричная, положительно-определенная матрица H и параметры $\beta,\nu,\gamma,$ при которых выполняется условие (17). Тогда, положив

$$|\,\Delta A\,| < \alpha_1\frac{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)}{L_1(\bullet)},$$

$$|\,\Delta B\,| < \alpha_2\frac{\lambda_{\min}(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D)}{L_2(\bullet)},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 < 1,$$

и обозначив

$$\tilde{M}[\bullet] = (1-\alpha_1-\alpha_2)\,\lambda_{\min}\,(S_1[H,\beta,\nu,\gamma]) - R_1(B,D),$$

получим

$$\frac{d}{dt}V(x(T),T) \le -e^{\gamma t}\tilde{M}(\bullet)\,|\,x(T)\,|^2 + e^{\gamma T}L_3(\bullet)\,\|\,\dot{x}(0)\,\|_\tau\,|\,x(T)\,|.$$

Поскольку по предположению $(m-1)\tau \le T < m\tau$, то

$$|\,D\,|^{m-1} = \frac{1}{|\,D\,|}e^{-m\ln\frac{1}{|D|}} < \frac{1}{|\,D\,|}e^{-\frac{T}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}},$$

поэтому для оценки полной производной

$$\frac{d}{dt}V(x(T),T) < -e^{-\gamma T}\tilde{M}[\bullet]\,|\,x(T)\,|^2 + e^{\theta T}\tilde{N}[\bullet]\,|\,x(T)\,|,\quad \theta = \gamma - \frac{1}{\tau}\ln\frac{1}{|\,D\,|},$$

$$\tilde{N}(\bullet) = \frac{L_3(\bullet)}{|\,D\,|}\,\|\,\dot{x}(0)\,\|_\tau.$$

Поскольку согласно условиям теоремы параметры системы таковы, что $\tilde{M}[\bullet] > 0,$ выполняются условия (12) леммы 2, поэтому при $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$x(t)\,\| < \sqrt{\varphi(H,\beta)}\,\|\,x(0)\,\|_\tau\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{M}[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)}\times$$

$$\times\frac{\tilde{N}[\bullet]}{\tilde{M}[\bullet] + (2\theta+\gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}\times\left[\exp\{(\theta-\gamma)\,t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{M}[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\}\right].$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы экспоненциальная устойчивость будет и в метрике C^1. Как следует из результатов леммы 1, для производной $\dot{x}(t)$ в момент времени $(m-1)\tau \le T < m\tau$ будет выполняться соотношение

$$|\dot{x}(T)| \le |D|^m \|\dot{x}(0)\|_\tau + |A\| x(T)| + |DA+B| \sum_{i=1}^{m-1} |D|^{i-1} |x(T-i\tau)| +$$

$$+|D|^{m-1}|B\| x(0)\|_\tau + \sum_{i=0}^{m-1} |D|^i |b\| f(\sigma(T-i\tau))| + |\Delta A| \sum_{i=0}^{m-1} |D|^i |x(T-i\tau)| +$$

$$+|\Delta B| \sum_{i=1}^{m} |D|^{i-1} |\Delta B\| x(T-i\tau)|.$$

С учетом ограничений (2), накладываемых на функцию $f(\sigma(t))$, $\sigma(t) = c^{\mathrm{T}} x(t)$, имеем

$$|f(\sigma(T-i\tau))| \le k|\sigma(T-i\tau)| \le k|c\| x(T-i\tau)|.$$

Отсюда

$$|\dot{x}(T)| \le |D|^m \|\dot{x}(0)\|_\tau + |D|^{m-1}|B\|| x(0)\|_\tau + [|A| + |D|k|b\| c|]|x(T)| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} |D|^{i-1} [|DA+B| + |D|k|b\| c|]|x(T-i\tau)| + |\Delta A| \sum_{i=0}^{m-1} |D|^i |x(T-i\tau)| +$$

$$+|\Delta B| \sum_{i=1}^{m} |D|^{i-1} |\Delta B\| x(T-i\tau)|.$$

Подставив вместо $|x(T)|$ и $|x(T-i\tau)|$ их верхние оценки, записанные в (19), получим

$$|\dot{x}(T)| \le |D|^m \|\dot{x}(0)\|_\tau + |D|^{m-1}|B\|| x(0)\|_\tau +$$

$$+\left[|A| + \frac{k|b\| c| + |DA+B| + |\Delta A| + |\Delta B|}{1-|D|}\right] \max_{0 \le s \le T} |x(s)|,$$

а поскольку

$$|D|^m \|\dot{x}(0)\|_\tau + |D^{m-1}\| B\|| x(0)\|_\tau \le [\|\dot{x}(0)\|_\tau + \frac{|B|}{|D|} \|x(0)\|_\tau] e^{-\frac{T}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}},$$

то для любого t следует

$$|\dot{x}(t)| \le [\|\dot{x}(0)\|_\tau + \frac{|B|}{|D|}\|x(0)\|_\tau] e^{-\frac{t}{\tau}\ln\frac{1}{|D|}} + \left[|A| + \frac{k|b\| c| + |DA+B| + |\Delta A| + |\Delta B|}{1-|D|}\right] \times$$

$$\times \sqrt{\varphi(H,\beta)}\, \|x(0)\|_\tau \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{M}[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\} + \frac{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)}{\lambda_{\min}(H)} \times$$

$$\times \frac{\tilde{N}[\bullet]}{\tilde{M}[\bullet] + (2\theta+\gamma)\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)} \times [\exp\{(\theta-\gamma)t\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{M}[\bullet]}{\bar{\lambda}_{\max}(H,\beta)} + \gamma\right)t\right\}],$$

т.е. неравенство (20) теоремы.

Замечание 1. В условиях абсолютной устойчивости, сформулированных в теореме 1, требуется существование положительно-определенной матрицы H и параметров $\beta > 0, \nu > 0,\ 0 < \gamma < \frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{|D|}$, при которых разность $\lambda_{\min}(S_1[H, B, \nu, \gamma]) - R_1(B, D)$ также положительно определена. Нахождение конструктивных значений этих величин переходит в отдельную задачу нелинейной оптимизации.

Замечание 2. В условиях теоремы 1 получены условия равномерной по запаздыванию абсолютной устойчивости. Поэтому условия накладывают очень строгие ограничения на матрицу B.

1. *Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я.* Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем специального вида с последействием методом функций Ляпунова // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2011. — № 4. — С. 7–20.
2. *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.; Л.: Гостехиздат, 1951. — 251 с.
3. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 261 с.
4. *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997. — 236 с.
5. *Шатирко А.В., Хусаінов Д.Я.* Дослідження інтервальної стійкості диференціальних систем регулювання із запізненням за допомогою функціоналів Ляпунова–Красовського // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Фіз.-мат. науки. — 2009. — Вип. 3. — С. 212–221.
6. *Шатирко А.В., Хусаінов Д.Я.* Абсолютна інтервальна стійкість диференціальних систем регулювання нейтрального типу // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 3. — С. 232–247.
7. *Шатырко А.В., Хусаинов Д.Я.* Абсолютная интервальная устойчивость систем непрямого регулирования нейтрального типа // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 3. — С. 5–16.
8. *Шатырко А.В.* Абсолютная интервальная устойчивость систем регулирования нейтрального типа // Доп. НАНУ. — 2011. — № 2. — С. 18–23.
9. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. — М.: Наука, 1988. — 112 с.
10. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. — 1956. — **20**, № 4. — С. 500–512.
11. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
12. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун-та. Мат.–Мех.–Астрономия. — 1971. — № 1. — С. 62–77.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко

Получено 14.09.2011