УДК 519.21

Ю.Ф. ГРИЗА, А.В. МАМОНОВА

ФЛЮКТУАЦИИ ПРОЦЕССА ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЕТИ С ПОЛУМАРКОВСКИМ (ИМПУЛЬСНЫМ) ВХОДНЫМ ПОТОКОМ

Ключевые слова: *система обслуживания типа* $[SM|M|1|\infty]^N$, *схема усреднения и диффузионной аппроксимации, флюктуации процесса обслуживания, полумарковский процесс, стационарное фазовое укрупнение, компенсирующий оператор, порождающий оператор, задача сингулярного возмущения*.

В работе [1] эволюция процесса обслуживания в сети с полумарковским входным потоком требований типа $[SM|M|\infty]^N$ рассматривается на возрастающих интервалах времени, что позволяет получить аппроксимацию процесса обслуживания в виде детерминированной эволюции, которая задается решением эволюционного уравнения. При этом возникает проблема изучения флюктуаций процесса обслуживания относительно усредненной детерминированной эволюции. В итоге процесс обслуживания в сети аппроксимируется детерминированной эволюцией с флюктуациями, которые описываются диффузионным процессом [2, 3].

В данной работе входной полумарковский поток требований задается в «импульсной форме», что означает наличие в потоке групповых требований, возникающих с малыми вероятностями, удовлетворяющими условиям пуассоновской аппроксимации (ПА) (см. [4, 5]).

В результате импульсный поток требований расщепляется на два потока: поток «одиночных» требований, который аппроксимируется детерминированной эволюцией, и поток «групповых» требований, который аппроксимируется пуассоновским стохастическим процессом.

В связи с этим флюктуации процесса обслуживания рассматриваются относительно детерминированной усредненной эволюции без учета стохастической составляющей импульсного потока входных требований.

1. Импульсный полумарковский поток. Определяется суммой

$$\delta^\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)}\delta^\varepsilon(\kappa_n),\ t\ge 0,\ c_k^\varepsilon:=\mathrm{E}[\delta^\varepsilon(k)]^2=\varepsilon^2[c_k+\theta_c^\varepsilon(k)].$$

Случайных величин $\delta^\varepsilon(k)$, $k\in\hat{E}=\{1,2,\dots,N\}$, заданных на фазовом пространстве $\hat{E}$ полумарковского процесса (ПМП) $\kappa(t)$, $t\ge 0$. Соответствующий процесс марковского восстановления (ПМВ) κ_n, θ_n, $n\ge 0$, задается полумарковской матрицей

$$Q(t)=\lfloor Q_{kr}(t),\ k,r\in\hat{E}\rfloor,\ t\ge 0,$$

$$Q_{kr}(t)=P_{kr}G_k(t)=P\{\kappa_{n+1}=r|\kappa_n=k\}P\{\theta_{n+1}\le t|\kappa_n=x\}.$$

Вложенная цепь Маркова (ВЦМ) κ_n, $n\ge 0$, предполагается эргодической со стационарным распределением $\rho=(\rho_k, k\in\hat{E})$. Кроме того, предполагается конечной усредненная интенсивность $q=1/g$, $g=\sum_{k=1}^{N}\rho_k g_k$, $g_k=E\theta_k=\int_0^\infty\overline{G}_k(t)dt.$

Считающий процесс $\nu(t):=\max\{n:\tau_n\le t\}$, $t\ge 0$, [5] фиксирует число моментов восстановления $\tau_{n+1}=\tau_n+\theta_{n+1}$, $n\ge 0$, до момента t.

Случайные величины $\delta^\varepsilon(k)$, $k\in\hat{E}$, задают нормированное число требований, поступающих в узел $k\in\hat{E}$, и принимают два значения:

$$P\{\delta^\varepsilon(k)=\varepsilon^2 b_k\}=1-\varepsilon^2\Lambda(k),\ k\in\hat{E},$$

$$P\{\delta^\varepsilon(k)=l_k\}=\varepsilon^2\Lambda(k),\ k\in\hat{E}.$$

Остаточные члены $|\theta^\varepsilon_\bullet(k)|\to 0$, $\varepsilon\to 0$. С вероятностью, близкой к 1, в каждый узел поступает по b_k требований; с вероятностями $\varepsilon^2\Lambda(k)$, $k\in\hat{E}$, число требований равно l_k/ε^2. Так что случайные величины $\delta^\varepsilon(k)$, $k\in\hat{E}$ удовлетворяют условиям ПА (см. [2, гл. 7]):

$$\text{ПА1: } b_k^\varepsilon:=E\delta^\varepsilon(k)=\varepsilon^2[b_k+\Lambda(k)]+\varepsilon^2\theta_b^\varepsilon(k), \tag{1}$$

$$\text{ПА2: } g_k^\varepsilon:=Eg(\delta^\varepsilon(k))=\varepsilon^2 g(l)\Lambda(k)+\varepsilon^2\theta_g^\varepsilon(k),\ g(u)\in C_3(R). \tag{2}$$

Импульсный поток требований в условиях ПА 1, 2 расщепляется на два потока:

1) поток «одиночных» требований

$$\delta_1^\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)}\delta_1^\varepsilon(\kappa_n),\ t\ge 0,\ \delta_1^\varepsilon(\kappa_n):=\delta^\varepsilon(k)\mathbf{I}(\delta^\varepsilon(k)=\varepsilon^2 b_k); \tag{3}$$

2) поток групповых требований

$$\delta_l^\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)}\delta_1^\varepsilon(\kappa_n),\ t\ge 0,\ \delta_1^\varepsilon(\kappa_n):=\delta^\varepsilon(k)\mathbf{I}(\delta^\varepsilon(k)=l_k). \tag{4}$$

Предполагается следующая дисциплина обслуживания в сети [6]. Одиночные требования поступают в очередь на обслуживание; групповые накапливаются в специальном накопителе для групповых требований.

Эволюция требований в сети задается матрицей маршрутизации $P_0=\lfloor p_{kr}^0;\ k,r\in\hat{E}\rfloor$, $\hat{E}:=\{1,2,\dots,N\}$ и вектором экспоненциально распределенных времен обслуживания требования в узлах системы $\mu=(\mu_k,k\in\hat{E})$ [7].

2. Эволюция процесса обслуживания. В сети она описывается двумя компонентами: процесс обслуживания $\overline{\rho}^\varepsilon(t)=(\rho_k^\varepsilon(t),\ k\in\hat{E})$ задает число требований в сети в момент времени t [8]; процесс накопления $\overline{\delta}_l^\varepsilon(t)=(\delta_k^\varepsilon(t),k\in\hat{E})$ задает число групповых требований в накопителе в момент t.

Теорема. Пусть существует положительное решение системы

$$d\rho(t)/dt=\rho(t)Q^0+b,\quad b=q\sum_{k=1}^N\rho_k b_k\,,$$

а также единственная точка равновесия $\overline{\rho}^0$, удовлетворяющая условию $b-\overline{\rho}^0Q^0=0$, $Q^0=\mu^d\lfloor P^0-\mathbf{I}\rfloor$. В этом случае имеет место слабая сходимость флюктуаций процесса обслуживания и процесса накопления:

$$\lfloor\overline{\rho}^\varepsilon(t)-\overline{\rho}^0\rfloor/\varepsilon^2\Rightarrow\zeta(t),\ \varepsilon\to 0,$$

$$\overline{\delta}_l^\varepsilon(t)\Rightarrow\overline{\delta}_l^0(t),\ \varepsilon\to 0.$$

Предельный процесс флюктуаций $\zeta(t)$, $t \ge 0$, задается генератором

$$L\varphi(u) = uQ^0\varphi'(u) + \frac{1}{2}B\varphi''(u);$$

$$B = \lfloor B_{kr};\ k, r \in \hat{E} \rfloor,\ B_{kr} = \rho_k b_k R_{kr} b_r + \rho_r b_r R_{rk} b_k.$$

Предельный процесс накопления $\overline{\delta}_l^0(t)$, $t \ge 0$, задается генератором

$$\Gamma\varphi(u) = \Lambda[\varphi(u+l) - \varphi(u)],$$

$$\Lambda = q\sum_{k=1}^{N} \rho_k \Lambda(k),\ l = q\sum_{k=1}^{N} \rho_k l_k.$$

3. Обоснование флюктуации процесса обслуживания. Входной поток одиночных требований задается процессом (см.(1)) $\delta_1^\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \delta_1^\varepsilon(\kappa_n)$, $t \ge 0$. Случайные величины $\delta_1^\varepsilon(k) := \delta^\varepsilon(k)\, \mathbf{I}\,(\delta^\varepsilon(k) = \varepsilon^2 b_k)$ удовлетворяют условиям ПА 1, 2 (см. (1), (2)):

$$b_{1k}^\varepsilon := E\delta_1^\varepsilon(k) = \varepsilon^2 \lfloor b_k + \theta_b^\varepsilon(k) \rfloor,$$

$$g_{1k}^\varepsilon := Eg(\delta_1^\varepsilon(k)) = \varepsilon^2 \theta_g^\varepsilon(k),\ \theta_g^\varepsilon(k) \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

В соответствии с законом больших чисел [3] имеет место слабая сходимость

$$\delta_1^\varepsilon(t) \Rightarrow \delta_1^0(t) = bt,\ \varepsilon \to 0,\ b = q\sum_{k=1}^{N} \rho_k b_k.$$

Процесс обслуживания требований в сети представлен суммой [9]

$$\rho^\varepsilon(t) = \eta^\varepsilon(t) + \delta_1^\varepsilon(t),\ t \ge 0.$$

Здесь $\eta^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, марковский процесс эволюции требований в сети задается генератором (см. [2])

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u) = \sum_{k,r=0}^{N} \mu_{kr}(u)[\varphi(u + \varepsilon^2 e_{kr}) - \varphi(u)]. \tag{5}$$

Вектор и интенсивность скачков определяются по формулам

$$e_{kr} := e_r - e_k,\ e_k := (\delta_k(l), l = \overline{1,N}),\ \delta_k(l) = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l \ne k; \end{cases}\ e_0 := 0,\ k \in \hat{E},$$

$$\mu_{kr}(u) := u_k \mu_k p_{kr}^0,\ k = \overline{1,N},\ r = \overline{0,N},\ k \ne r.$$

Процесс марковского восстановления [5, 9, 10]

$$\rho_n^\varepsilon := \rho^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\ \kappa_n := \kappa(\tau_n^\varepsilon),\ \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \tau_n,\ n \ge 0, \tag{6}$$

характеризуется компенсирующим оператором (КО) [2]

$$L^\varepsilon\varphi(u,k) = \varepsilon^{-2} q_k \int_0^\infty G_k(dt)[\Gamma_t^\varepsilon P D^\varepsilon(k) - \mathbf{I}]\varphi(u,k), \tag{7}$$

здесь полугруппа Γ_t^ε, $t \ge 0$, задается генератором (5), а оператор $D^\varepsilon(k)$ представляется в виде

$$D^\varepsilon(k)\varphi(u) = \varphi(u + \varepsilon^2 b_k) - \varphi(u).$$

Лемма 1. Имеет место асимптотическое разложение КО (7) на достаточно гладких (по u) тест-функциях $\varphi(u,k)$

$$L^\varepsilon \varphi(u,k) = \lfloor \varepsilon^{-2} Q + Q_1(k) + \theta_L^\varepsilon(k) \rfloor \varphi(u,k),$$

где

$$Q_1(k)\varphi(u) = uQ^0 \varphi'(u) - b^0(k)\varphi'(u), \; b^0(k) := Q_0 b(k),$$

с пренебрежимым членом

$$|\theta_L^\varepsilon(k)\varphi(u)| \to 0 \quad \varepsilon \to 0, \quad \varphi(u) \in C^3(R^N).$$

Лемма 2. Флюктуации процесса обслуживания в сети

$$\rho_0^\varepsilon(t) := \lfloor \rho^\varepsilon(t) - \rho^0 \rfloor / \varepsilon, \; t \ge 0,$$

характеризуются КО

$$L_\rho^\varepsilon \varphi(u,k) = \varepsilon^{-2} q_k \int_0^\infty G_k(t) [\Gamma_t^\varepsilon(\rho^0) P D^\varepsilon(k) - \mathbf{I}] \varphi(u,k). \tag{8}$$

Здесь полугруппа Γ_t^ε, $t \ge 0$, задается генератором

$$\Gamma^\varepsilon(\rho^0)\varphi(u) = \sum_{k,r=0}^{N} \mu_{kr}(\rho^0 + \varepsilon u)[\varphi(u + \varepsilon^2 e_{kr}) - \varphi(u)],$$

имеющим асимптотические представления

$$\Gamma^\varepsilon(\rho^0)\varphi(u) = \varepsilon^2(\rho^0 + \varepsilon u) Q^0 \varphi'(u) + \varepsilon^2 \theta_\Gamma^\varepsilon(\rho^0)\varphi(u).$$

Лемма 3. Имеет место асимптотическое представление КО (8)

$$L_\rho^\varepsilon \varphi(u,k) = \lfloor \varepsilon^2 Q + \varepsilon^{-1} Q^1(k) + Q_2(k) + \theta_L^\varepsilon(k) \rfloor \varphi(u,k).$$

Здесь

$$Q^1(k)\varphi(u) = (\rho^0 Q^0 - b^0(k))\varphi'(u), \quad Q_2(k)\varphi(u) = uQ^0 \varphi'(u).$$

Заключительная часть доказательства теоремы 1 состоит в использовании решения проблемы сингулярного возмущения [2, гл. 5] для урезанного оператора

$$L_{\rho^0}^\varepsilon \varphi(u,k) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} Q^1(k) + Q_2(k)] \varphi(u,k).$$

Лемма 4. Предельный оператор задается решением ПСВ

$$L = \Pi Q^1(k) R_0 Q^1(k) \Pi + \Pi Q_2(k) \Pi. \tag{9}$$

Вычисления по формуле (9) дают параметры предельной диффузии: снос uQ^0 и диффузию

$$B = \lfloor B_{kr};\; k,r \in \hat{E} \rfloor, \; B_{kr} = q[\rho_k b_k R_{kr} b_r + \rho_r b_r R_{rk} b_k].$$

Пример. Для $N = 2$ имеем уравнение $d\rho(t)/dt = b + \rho(t) Q^0$, $Q^0 = \mu^d \lfloor P^0 - \mathbf{I} \rfloor$, где

$$P^0 = \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < p_1 p_2 < 1, \; P^0 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & p_1 \\ p_2 & -1 \end{bmatrix}, \; Q^0 = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \mu_1 p_1 \\ \mu_2 p_2 & -\mu_2 \end{bmatrix}.$$

Система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \rho_1' + \mu_1 \rho_1 = b_1 + q_2 \rho_2, \\ \rho_2' + \mu_2 \rho_2 = b_2 + q_1 \rho_1. \end{cases}$$

Определим эквилибриум:

$$b + \rho^0 Q^0 = 0, \; Q^0 = \mu^d \lfloor P^0 - \mathbf{I} \rfloor, \; P^0 = \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_2 & 0 \end{bmatrix}, \; 0 < p_1 p_2 \le 1,$$

$$P^0 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & p_1 \\ p_2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q^0 = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\mu_2 \end{bmatrix}.$$

Решение системы $\begin{cases} \rho_1^0 \mu_1 - \gamma_2 \rho_2^0 = b_1 \\ -\rho_1^0 \gamma_1 + \mu_2 \rho_2^0 = b_2 \end{cases} \left| \begin{matrix} \mu_2 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right.$ задается формулой

$$\rho_1^0 (\mu_1 \mu_2 - \gamma_1 \gamma_2) = b_1 \mu_2 + b_2 \gamma_2 =: h_1.$$

Используя формулы Крамера и введенные выше обозначения, получаем

$$\rho_1^0 = h_1 / \Delta, \quad \rho_2^0 = h_2 / \Delta, \quad \Delta := \mu_1 \mu_2 - \gamma_1 \gamma_2 = \mu_1 \mu_2 (1 - p_1 p_2),$$

$$h_1 = (b_1 + b_2 p_2) \mu_2, \; h_2 = (b_2 + b_1 p_1) \mu_1.$$

В результате имеем $\rho_1^0 = (b_1 + b_2 p_2) / \mu_1 p, \;\; \rho_2^0 = (b_2 + b_1 p_1) / \mu_2 p, \;\; p := 1 - p_1 p_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V., Limnios N. Queuing Systems with semi-Markov Flow in Average and Diffusion Approximation Schemes. Methodol // Comput. Appl. Probab. — 2009. — **11**. — P. 201–209.
2. Korolyuk V.S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. — Singapore: World Scientific., 2005. — 331 p.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 498 с.
4. Анисимов В.В., Лебедев Е.О. Стохастические системы обслуживания. Марковские модели. — Киев: Либідь, 1992. — 208 р.
5. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — 197 p.
6. Лебедев Е.А. Сети обслуживания с многоканальными узлами и рекуррентным входным потоком // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 4. — С. 48–52.
7. Мамонова Г.В. Експлуатаційна система обслуговування у схемі дифузійної апроксимації // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2005. — № 3. — С. 333–337.
8. Мамонова А.В. Суперпозиция процессов марковского восстановления в стационарном фазовом укрупнении // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 5. — С. 119–135.
9. Mamonova G., Griza J. Queuing system evolution in phase merging scheme // Бюллетень АН Республики Молдова. — 2008. — № 3(58) — С. 83–88.
10. Мамонова А.В. Гриза Ю.Ф. Эволюция системы обслуживания в схеме диффузионной аппроксимации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 3. — С. 136–145.

Поступила 26.10.2009