УДК 519.85

**И.В. ГРЕБЕННИК**

# ОПИСАНИЕ И ГЕНЕРАЦИЯ ПЕРЕСТАНОВОК, СОДЕРЖАЩИХ ЦИКЛЫ

**Ключевые слова:** *генерация комбинаторных объектов, перестановка, цикл, произведение циклов, циклическая перестановка, комбинаторный вид*.

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи генерации различных комбинаторных объектов являются актуальными в математических исследованиях и приложениях. Генерации комбинаторных конфигураций посвящены многие монографии и отдельные статьи [1–6]. Под генерацией понимается построение всех комбинаторных структур определенного типа [3]. При этом в литературе в основном рассматриваются вопросы генерации достаточно простых объектов — перестановок, сочетаний, разбиений, деревьев, двоичных последовательностей. Результаты решения задач генерации используются в моделировании, комбинаторной оптимизации и в других областях [7–10]. Генерация более сложных комбинаторных объектов затрудняется отсутствием конструктивных средств и необходимостью значительных вычислительных затрат, связанных с избыточностью результатов применения известных средств генерации.

Достаточно сложные комбинаторные конфигурации могут быть сгенерированы с помощью конструктивных средств описания композиционных $k$-образов комбинаторных множеств, предложенных в [11].

Многие задачи перечислительной комбинаторики связаны с решением вопроса о существовании комбинаторных объектов заданного типа и с оценкой их количества [12–14]. В некотором смысле обратными к ним являются задачи генерации комбинаторных объектов с указанными свойствами.

Одна из таких «прямых» задач — представление заданной перестановки в виде произведения циклов и подсчет количества перестановок заданного типа [4, 12]. «Обратной» к ней является задача генерации перестановок по заданным циклам.

Цель настоящей статьи — постановка и решение некоторых задач генерации перестановок, содержащих циклы, с применением конструктивных средств описания на основе композиционных $k$-образов комбинаторных множеств.

## СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК

Известны различные эквивалентные способы комбинаторного представления перестановки элементов множества $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (см., например, [4, 12]). Один из них — представление с помощью отношения, где в первом ряду указывается «естественный» порядок элементов множества $S$ , а во втором — новое упорядочение:

$$f=\begin{pmatrix} a_1, & a_2, \dots, a_n \\ a_{j_1}, & a_{j_2}, \dots, a_{j_n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Другой способ представления — упорядоченная последовательность элементов множества $S$-слова:

$$\pi=(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n}), \tag{2}$$

в котором подразумевается, что перестановка переводит $a_1$ в $a_{j_1}$, $a_2$ в $a_{j_2}, \dots$ $\dots, a_n$ в $a_{j_n}$. В этом случае запись перестановки совпадает со второй строкой представления (1).

Еще один способ представления перестановки — это произведение циклов $\pi=\sigma^{n_1}\cdot\sigma^{n_2}\cdot\ldots\cdot\sigma^{n_m}$. Здесь под циклом длины $m$ перестановки $\pi$ над множеством $S$ подразумевается подмножество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}\subset S$, на котором перестановка выполняет следующие действия:

$$\pi(a_{i_j})=a_{i_{j+1}},\quad i_j\in J_m,\quad j\in J_{m-1},\quad \pi(a_{i_m})=a_{i_1},\quad J_n=\{1,2,\dots,n\}.$$

Цикл длины $m$ принято записывать как $\sigma^m=(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_m})$. Следуя [12], обозначим $c_i$ число циклов длины $i$ в заданной перестановке $\pi$, при этом последовательность $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ называется типом перестановки $\pi$. Общее число циклов перестановки $\pi$ обозначим $c(\pi)=c_1+c_2+\dots+c_n$. Перестановку, которую можно представить единственным циклом длины $n$, называют циклической перестановкой. При этом количество перестановок типа $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ равно $n!/1^{c_1}\cdot c_1!\cdot 2^{c_2}\cdot c_2!\cdot\ldots\cdot n^{c_n}\cdot c_n!$ [12]. Отметим, что некоторые перечислительные задачи для перестановок типа $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ исследованы в [13].

## КОНСТРУКТИВНЫЕ СРЕДСТВА ОПИСАНИЯ И ГЕНЕРАЦИИ

Для решения различных задач описания и генерации перестановок, содержащих циклы, используем аппарат композиционных $k$-образов комбинаторных множеств [11]. Введем следующее комбинаторное множество.

**Определение**. Композиционный $k$-образ комбинаторных множеств $T_m$; $P^c_{n_1},P^c_{n_2},\dots,P^c_{n_m}$, порожденный множествами $z^1,z^2,\dots,z^m$, назовем кортежем циклических перестановок и обозначим $TP^c(N,n_1,n_2,\dots,n_m)$ или $TP^c_N$, где $N=n_1+n_2+\dots+n_m$.

Здесь $T_m=\{(t_1,t_2,\dots,t_m)\,|\,t_j=z^0_j\in\mathbf{Z}^0,\ j\in J_m\}$ — множество нулевого порядка, кортеж из $m$ различных элементов, $z^0=\{z^0_1,z^0_2,\dots,z^0_m\}\in\mathbf{Z}^0$, $\mathbf{Z}^0$ — множество всевозможных кортежей из $m$ различных элементов, $P^c_{n_i}$ — множества циклических перестановок $n_i$ элементов, $i\in J_m$ — множества первого порядка; $z^i=\{z^i_1,z^i_2,\dots,z^i_{n_i}\}$, $i\in J_m$, $z^i\cap z^j=\varnothing$, $i,j\in J_m$, $i\neq j$, $k=2$. Множество $TP^c_N$ состоит из элементов вида $w=(\overline{w}_1,\overline{w}_2,\dots,\overline{w}_m)\in TP^c_N$, где $\overline{w}_i=(z^i_{j_1},z^i_{j_2},\dots,z^i_{j_{n_i}})\in$ $\in P^c_{n_i}$ — циклическая перестановка элементов множества $z^i$.

Множество $TP^c_N$ можно представить с помощью композиции отображений вида [11]:

$$TP^c_N=\Gamma_W\circ\Gamma_{T_m}(z^0),\tag{3}$$

где $\Gamma_{T_m}:\mathbf{Z}_0\to\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}=\bigcup\limits_{z^0\in\mathbf{Z}^0}T_m(z^0)$, $\Gamma_W:\mathbf{Y}\to\mathbf{W}$, $\mathbf{W}=\bigcup\limits_{z^i;\ z^0_i\in P^c_{n_i}(z^i),\,i\in J_m}TP^c_N$.

Здесь отображение $\Gamma_{T_m}$ описывает построение кортежа $T_m$ из $m$ различных элементов, $\Gamma_W$ строится на основе операций $n$-замещения, $n$-композиции и отображений $\Gamma_{P^c_{n_i}}$, задающих множества циклических перестановок $P^c_{n_i}$ [11]. Для решения задач описания и генерации элементов множества $TP^c_N$ необходимо конкретизировать вид отображений $\Gamma_{T_m}$, $\Gamma_W$, $\Gamma_{P^c_{n_i}}$ или указать способы их алгоритмической реализации.

Простота формального описания и достаточное исследование свойств позволяют рассматривать кортежи и циклические перестановки как базовые комбинаторные множества [11]. Операции $n$-замещения и $n$-композиции наряду с формальными описаниями базовых множеств дают возможность получить как формальные описания, так и генерацию элементов кортежа циклических перестановок.

Пользуясь результатами теории комбинаторных видов [13] и построенными комбинаторными видами композиционных $k$-образов комбинаторных множеств [15], определим комбинаторный вид кортежа циклических перестановок $TP^c_N$, который обозначим $STP^c_N$. Его построение проведем по схеме, предложенной в [15].

Рассмотрим комбинаторный вид циклических перестановок $C_{n_i}(U_i)$ из $n_i$ элементов $m$-множества $U=(U_1,U_2,\dots,U_m)$, $U_i=\{z_1^i,z_2^i,\dots,z_{n_i}^i\}$, $i\in J_m$ [13]. Введем многосортный вид $\overline{C}_n^i(U)=C_{n_i}(U_i)$, $i\in J_m$, с основным множеством $U=(U_1,U_2,\dots,U_m)$. Пусть $ST_m(U)$ — $m$-сортный вид кортежей с основным множеством $U$ [15]. Тогда комбинаторный вид $STP_N^c(U)$ можно представить как

$$STP_N^c(U)=ST_m\,\square\,(\overline{C}_{n_1}^1,\overline{C}_{n_2}^2,\dots,\overline{C}_{n_m}^m)[U_1,U_2,\dots,U_m]=$$

$$=ST_m(U)\,\square\,(\overline{C}_{n_1}^1(U),\overline{C}_{n_2}^2(U),\dots,\overline{C}_{n_m}^m(U)).$$

Здесь $\square$ — операция функториальной композиции на комбинаторных видах [13].

Для решения перечислительных задач на множестве $TP_N^c$ построим производящий ряд, связанный с видом $STP_N^c(U)$ [13], в соответствии с подходом, изложенным в [15]. Учтем, что из $n_i$ различных элементов можно построить $(n_i-1)!$ циклических перестановок [4, 12]. Кроме того, будем считать, что из элементов множества $U_i=\{z_1^i,z_2^i,z_{n_i}^i\}$ можно построить единственный кортеж $T_{n_i}=$ $=(z_1^i,z_2^i,\dots,z_{n_i}^i)$, $i\in J_m$. Тогда

$$F_{STP_N^c}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{n_1,n_2,\dots,n_m\ge 0}(n_1-1)!\,(n_2-1)!\dots(n_m-1)!\frac{x_1^{n_1}}{n_1\,!}\frac{x_2^{n_2}}{n_2\,!}\dots\frac{x_m^{n_m}}{n_m\,!}=$$

$$=\sum_{n_1,n_2,\dots,n_m\ge 0}\frac{x_1^{n_1}}{n_1}\frac{x_2^{n_2}}{n_2}\dots\frac{x_m^{n_m}}{n_m}. \qquad (4)$$

Введенное комбинаторное множество $TP_N^c$ позволяет решать разнообразные задачи описания и генерации перестановок, содержащих циклы. Сформулируем некоторые из таких задач:

1) генерация единственной перестановки по заданным выбранными циклическими перестановками циклам;

2) генерация всех перестановок по циклам, заданным всевозможными циклическими перестановками элементов множеств $U_i=\{z_1^i,z_2^i,\dots,z_{n_i}^i\}$, $i\in J_m$;

3) генерация всех перестановок, содержащих циклы, порожденных множеством, состоящим из $N$ различных элементов.

Проанализируем сформулированные задачи.

### ГЕНЕРАЦИЯ ПЕРЕСТАНОВКИ ПО ЗАДАННЫМ ЦИКЛАМ

**Задача 1**. Заданы количество $m$ и явный вид циклов $\sigma^{n_1},\sigma^{n_2},\dots,\sigma^{n_m}$, порожденных непересекающимися множествами различных элементов $z^i=\{z_1^i,z_2^i,\dots,z_{n_i}^i\}$, $i\in J_m$. Пусть $n_1,n_2,\dots,n_m$ — длины циклов, а $n_1+n_2+\dots$ $\dots+n_m=N$. Необходимо сгенерировать перестановку $\pi\in P_N$, которая представляется произведением циклов $\sigma^{n_1},\sigma^{n_2},\dots,\sigma^{n_m}$. Здесь $P_N$ — множество перестановок из $N$ различных элементов, а под явным заданием цикла $\sigma^{n_i}$ подразумевается

$$z_{j_1}^i\mapsto z_{j_2}^i\mapsto\dots\mapsto z_{j_{n_i}}^i\mapsto z_{j_1}^i,\quad j_k\in J_{n_i},\quad k\in J_{n_i},\quad i\in J_m. \qquad (5)$$

Отметим, что тип заданной таким образом перестановки $\pi$ полностью определяется длинами циклов, а сами циклы можно рассматривать как элементы множеств циклических перестановок $P_{n_i}^c$, порожденных множествами

$z^i = \{z_1^i, z_2^i, \ldots, z_{n_i}^i\}$, $i \in J_m$. Для получения искомой перестановки $\pi$ воспользуемся построенным выше кортежем циклических перестановок $TP_N^c$. Из способа построения множества $TP_N^c$ следует, что перестановка $\pi$ является одним из его элементов. Его можно получить следующим образом.

Для определенности будем считать, что элементы множества $z^i$ упорядочены: $z_1^i \le z_2^i \le \ldots \le z_{n_i}^i$, $i \in J_m$. Циклическую перестановку элементов множества $z^i$, определяемую циклом $\sigma^{n_i}$ вида (4), запишем

$$f^i = \begin{pmatrix} z_1^i & z_2^i \ldots z_{n_i}^i \\ z_{l_1}^i & z_{l_2}^i \ldots z_{l_{n_i}}^i \end{pmatrix} \tag{6}$$

или в виде упорядоченной последовательности, только второй строкой

$$(z_{l_1}^i,\ z_{l_2}^i, \ldots, z_{l_{n_i}}^i), \tag{7}$$

подразумевая, что перестановка переводит $z_1^i$ в $z_{l_1}^i$, $z_2^i$ в $z_{l_2}^i$, …, $z_{n_i}^i$ в $z_{l_{n_i}}^i$. Указанное представление циклической перестановки, определяемой циклом $\sigma^{n_i}$, получим с помощью алгоритма 1, который выполняет проход по цепочке (5) и формирует циклическую перестановку.

**Алгоритм 1.** Формирование циклической перестановки в виде упорядоченной последовательности на основе цикла длины $n_i$.

Заданы: цикл $\sigma^{n_i}$ длины $n_i$ в виде (5). Результат: циклическая перестановка $b^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i)$ в виде (6) или (7).

1. Установить $k = 1$, $s = 1$.
2. Найти $j_l = k$ в последовательности $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n_i}\}$.
3. Присвоить $b_k^i = z_{j_{l+1}}^i$, если $l < n_i$, иначе перейти к п. 6.
4. Задать $l = l + 1$, $k = j_l$, $s = s + 1$.
5. Перейти к п. 3, если $s \le n_i$, иначе — останов.
6. Присвоить $b_k^i = z_{j_1}^i$, $l = 1$, $s = s + 1$, $k = j_1$, перейти к п. 3.

Результат работы алгоритма — циклическая перестановка $b^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{n_i}^i)$ или

$$f^i = \begin{pmatrix} z_1^i & z_2^i \ldots z_{n_i}^i \\ z_{l_1}^i & z_{l_2}^i \ldots z_{l_{n_i}}^i \end{pmatrix},$$

соответствующая циклу $\sigma^{n_j}$.

Для получения перестановки $\pi$ объединим в кортеж все циклические перестановки, полученные с помощью алгоритма 1 для всех циклов $\sigma^{n_i}$, $i \in J_m$. При этом необходимо сформировать множество элементов *Z*, порождающих перестановку $\pi$, и задать на нем «естественный» порядок элементов, т.е. сформировать первую строку в представлении (1). Для этого воспользуемся алгоритмом 2.

**Алгоритм 2.** Формирование перестановки $\pi$, являющейся произведением циклов $\sigma^{n_1}, \sigma^{n_2}, \sigma^{n_m}$.

Заданы: циклические перестановки $b^1, b^2, \ldots, b^m$, полученные соответственно из циклов $\sigma^{n_1}, \sigma^{n_2}, \ldots, \sigma^{n_m}$ с помощью алгоритма 1. Результат: перестановка $\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ в виде (1) и (2) является произведением циклов $\sigma^{n_1}, \sigma^{n_2}, \ldots, \sigma^{n_m}$. Здесь $p_k^1$ — элемент первого, а $p_k^2$ — элемент второго ряда перестановки $\pi$ в представлении (1), $k \in J_N$.

1. Установить $i=1$ — счетчик циклов $\sigma^{n_i}$, $s=0$.
2. Установить $k=1$ — счетчик элементов внутри цикла.
3. Присвоить $p^1_{k+s}=z^i_k$, $p^2_{k+s}=f^i(z^i_k)=b^i_k$.
4. Задать $k=k+1$. Перейти к п. 3, если $k \le n_i$, иначе — к п. 5.
5. Присвоить $s=s+n_i$, $i=i+1$.
6. Перейти к п. 2, если $i \le m$, иначе — останов.

Таким образом, последовательное применение алгоритма 1 для каждого цикла $\sigma^{n_i}$, $i \in J_m$, и алгоритма 2 для полученных циклических перестановок $b^1, b^2, \ldots, b^m$ позволяет решить задачу 1. Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Заданы $m=2$ цикла, порожденные множествами $z^1=\{a,b,c,d\}$ и $z^2=\{e,f,g\}$, $\sigma^4: b \mapsto d \mapsto a \mapsto c \mapsto b$, $\sigma^3: f \mapsto e \mapsto g \mapsto f$. Сгенерировать перестановку $\pi \in P_7$, которая является произведением заданных циклов.

Используя алгоритм 1, построим циклические перестановки $b^1$ и $b^2$ в виде (6) и (7) из циклов $\sigma^4$ и $\sigma^3$:

$$f^1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix},\ b^1=(c\ d\ b\ a),\ f^2=\begin{pmatrix} e & f & g \\ g & e & f \end{pmatrix},\ b^2=(g\ e\ f).$$

С помощью алгоритма 2 получим искомую перестановку $\pi \in P_7$, порожденную множеством $Z=\{a,b,c,d,e,f,g\}$:

$$f^{\pi}=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ c & d & b & a & g & e & f \end{pmatrix},\ \pi=(c\ d\ b\ a\ g\ e\ f).$$

**Пример 2.** Заданы $m=2$ цикла, порожденные множествами $z^1=\{3,5,7\}$ и $z^2=\{1,2,4,6\}$, $\sigma^3: 7 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 7$, $\sigma^4: 2 \mapsto 4 \mapsto 1 \mapsto 6 \mapsto 2$. Сгенерировать перестановку $\pi \in P_7$, которая является произведением заданных циклов.

По алгоритму 1 построим циклические перестановки $b^1$ и $b^2$ в виде (6) и (7) из циклов $\sigma^3$ и $\sigma^4$:

$$f^1=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix},\ b^1=(5\ 7\ 3),\ f^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b^2=(6\ 4\ 1\ 2).$$

Пользуясь алгоритмом 2, получим перестановку $\pi \in P_7$, порожденную множеством $Z=\{1,2,3,4,5,6,7\}$:

$$f^{\pi}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \pi=(5\ 7\ 3\ 6\ 4\ 1\ 2). \tag{8}$$

Отметим, что, переупорядочивая элементы первой строки $f^{\pi}$ вместе с соответствующими элементами второй строки, получим перестановку, являющуюся произведением тех же циклов, что и $\pi$:

$$f^{\pi_1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \pi_1=(6\ 4\ 5\ 1\ 7\ 2\ 3). \tag{9}$$

### ГЕНЕРАЦИЯ ВСЕХ ПЕРЕСТАНОВОК ПО ЦИКЛАМ, ПОРОЖДЕННЫМ ЗАДАННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

**Задача 2.** Заданы $m$ непересекающихся множеств различных элементов $z^i=\{z^i_1, z^i_2, \ldots, z^i_{n_i}\}$, $i \in J_m$. Множества $z^i$ порождают множества циклических перестановок $P^c_{n_i}(z^i)$, $i \in J_m$. Каждая циклическая перестановка $p^j \in P^c_{n_i}(z^i)$, $j \in J_{M_i}$, $M_i=(n_i-1)!$, определяет единственный цикл $\sigma^{n_i}(p^j)$. Необходимо сгенерировать все возможные различные перестановки $\pi \in P_N$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = N$, которые представляются в виде произведения циклов $\sigma^{n_i}(p^j)$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$, $i \in J_m$.

Как следует из [4, 12], поскольку множества $z^i$, $i \in J_m$, а значит, и определяемые ими циклы не пересекаются, то порядок следования циклов при представлении перестановки в виде произведения циклов не имеет значения. Поэтому в рамках рассматриваемой задачи не будем различать перестановки, которые представляются в виде произведения одинаковых циклов, например перестановки (8) и (9). Кроме того, любые циклические сдвиги элементов при задании циклов не изменяют результата генерации перестановки $\pi$. Поэтому, говоря о генерации всех возможных различных перестановок в данной задаче, имеются в виду только те из них, которые представляются произведениями различных по составу и (или) порядку следования элементов циклов. Каждый такой цикл $\sigma^{n_i}(p^j)$ однозначно определяется циклической перестановкой $p^j \in P_{n_i}^c(z^i)$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$ [4, 12]. Количество циклов, порождаемых множеством $z^i$, равно количеству различных циклических перестановок, которые можно построить из элементов множества $z^i$. А количество различных перестановок, которые можно представить в виде произведения циклов из элементов заданных множеств, равно количеству элементов кортежа циклических перестановок $TP_N^c$, введенного выше. Указанное количество элементов можно определить с помощью производящего ряда (4). Таким образом, сформулированную задачу 2 можно заменить эквивалентной ей задачей генерации всех элементов кортежа циклических перестановок.

Поскольку кортеж циклических перестановок представляет собой композиционный $k$-образ комбинаторных множеств, то описание и генерация его элементов могут выполняться с помощью отображений на основе базовых комбинаторных множеств кортежей и циклических перестановок [11]. При решении задач генерации перестановок, содержащих циклы, будем ориентироваться на алгоритмическую реализацию отображений $\Gamma_{T_m}$, $\Gamma_W$, $\Gamma_{P_{n_i}^c}$, описывающих элементы множества $TP_N^c$ в соотношении (3).

При реализации отображения $\Gamma_W$ каждый элемент множества нулевого порядка — кортежа $T_m$ — заменяется одним из элементов множеств циклических перестановок $P_{n_1}^c(z^1), P_{n_2}^c(z^2), \ldots, P_{n_m}^c(z^m)$ соответственно. В результате формируется один элемент множества $TP_N^c$ — перестановка $\pi$, обладающая требуемыми свойствами.

Для получения всех элементов множества $TP_N^c$ описанным способом отображение $\Gamma_{T_m}$ реализуем алгоритмически. Отображение $\Gamma_{P_{n_i}^c}$ получим на основе использования метода генерации элементов множества циклических перестановок. Один из алгоритмов генерации циклических перестановок описан в [1]. Применение данного алгоритма позволяет генерировать все элементы базовых комбинаторных множеств циклических перестановок. Сгенерировав по одному элементу множеств $P_{n_1}^c(z^1)$, $P_{n_2}^c(z^2), \ldots, P_{n_m}^c(z^m)$, получим $m$ циклов. С помощью алгоритма 2, реализующего отображение $\Gamma_W$, они могут быть преобразованы в перестановку $\pi$, которую можно представить в виде произведения указанных циклов.

Таким образом, решение задачи 2 сводится к многократному решению задачи 1 на основе генерации элементов множеств циклических перестановок в соответствии с выбранной схемой. Рассмотрим пример.

**Пример 3.** Заданы $m = 2$ непересекающиеся множества $z^1 = \{3, 5, 7\}$ и $z^2 = \{1, 2, 4, 6\}$, порождающие множества циклических перестановок $P_{n_1}^c(z^1)$, $P_{n_2}^c(z^2)$. Сгенерировать все возможные различные перестановки $\pi \in P_7$, которые представляются в виде произведения циклов $\sigma^{n_i}(p^j)$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$, $i \in J_2$.

Как отмечено выше, количество циклических перестановок (а значит, и циклов), составленных из $n$ элементов, равно $(n-1)!$. Из множества $z^1$ можно построить два различных цикла $\sigma^{n_1}$ : $3 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 3$, $3 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 3$. Из множества $z^2$ — 6 циклов $\sigma^{n_2}$: $1 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 1$, $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1$, $1 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 1$, $1 \mapsto 6 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 1$, $1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$. Можно построить 12 различных перестановок, которые представляются в виде произведения циклов $\sigma^{n_1}$ и $\sigma^{n_2}$. Комбинируя различные пары циклов $\sigma^{n_1}$ и $\sigma^{n_2}$, получим 12 вариантов исходных данных для задачи 1. Выполняя в каждом случае действия в соответствии с алгоритмами 1 и 2, получим 12 перестановок вида (6):

$$\begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&2&4&6&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&4&6&2&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&4&6&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&4&1&6&2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&6&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 5&7&3&6&1&2&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&2&4&6&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&4&6&2&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&2&6&1&4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&4&1&6&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&6&4&1&2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3&5&7&1&2&4&6 \\ 7&3&5&6&1&2&4 \end{pmatrix}.$$

### ГЕНЕРАЦИЯ ВСЕХ ПЕРЕСТАНОВОК, ПОРОЖДЕННЫХ РАЗБИЕНИЯМИ МНОЖЕСТВА

**Задача 3.** Задано множество $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$, состоящее из различных элементов. Полагаем, что множество $Z$ разбивается на непересекающиеся подмножества $z^{ik} = \{z_1^{ik}, z_2^{ik}, \dots, z_{n_i}^{ik}\}$, $i \in J_{m_k}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_{m_k} = N$, $k \in J_K$, где $K$ — количество вариантов разбиения множества $Z$ на непересекающиеся подмножества. Каждое подмножество $z^{ik}$ порождает множество циклических перестановок $P_{n_i}^c(z^{ik})$ и множество соответствующих циклов $\sigma^{n_i}(p^j)$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$. Необходимо сгенерировать все возможные различные перестановки элементов множества $Z$, $\pi \in P_N$, которые представляются в виде произведения циклов $\sigma^{n_i}(p^j)$, порожденных всевозможными циклическими перестановками: $p^j \in P_{n_i}^c(z^{ik})$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$, $k \in J_K$.

Механизм генерации перестановок в данной задаче может быть основан на решении задачи 2 для каждого варианта разбиения множества $Z$ на непересекающиеся подмножества. Каждый вариант разбиения $z^{ik} = \{z_1^{ik}, z_2^{ik}, \dots, z_{n_i}^{ik}\}$, $i \in J_{m_k}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_{m_k} = N$, $k \in J_K$, порождает множества циклических перестановок $P_{n_i}^c(z^{ik})$, $j \in J_{M_i}$, $M_i = (n_i - 1)!$ и соответствующие циклы $\sigma^{n_i}(p^j)$, $p^j \in P_{n_i}^c(z^{ik})$, которые являются исходными данными для задачи 2. Таким образом, для решения задачи 3 необходимо определить способ генерации всевозможных разбиений множества $Z$ на непересекающиеся подмножества.

Задача разбиения множества на подмножества является классической в комбинаторике [2, 3, 5, 12]. Различным вариантам разбиений множества на непересекающиеся непустые подмножества (блоки) соответствуют количественные оценки. Число разбиений $n$-множества на $k$ блоков оценивается числом Стирлинга второго рода $S(n,k)$, а общее число разбиений $n$-множества — числом Белла $B(n)$, где $B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$. Алгоритмы генерации разбиений множества на блоки описаны в [2, 5] и ориентированы как на генерацию всевозможных разбиений (алгоритм Хатчинсона), так и разбиений $n$-множества точно на $k$ блоков. Использование указанных алгоритмов позволяет формировать множества, порождающие циклы, для задачи генерации перестановок, которые можно представить в виде произведения циклов.

При этом можно рассматривать вариант задачи представления перестановки в виде произведения в точности $k$ циклов и произведения различного числа циклов (по числу подмножеств, на которые разбивается множество $Z$). Количество перестановок, имеющих в точности $k$ циклов, оценивается числом Стирлинга первого рода $s(n,k)$ [12]. Также можно решить задачу генерации всех перестановок заданного типа из элементов множества $Z$. Для этого при генерации разбиений множества $Z$ на подмножества необходимо выбирать только те варианты разбиений, которые по количеству подмножеств разной мощности соответствуют заданному типу перестановки. Во всех этих случаях рассмотренные выше задачи 1 и 2 можно рассматривать как базовые задачи генерации перестановок, содержащих циклы. К ним тем или иным способом сводятся все более общие задачи генерации перестановок указанного класса.

## ОЦЕНКА МЕТОДА ГЕНЕРАЦИИ ПЕРЕСТАНОВОК, СОДЕРЖАЩИХ ЦИКЛЫ

Отметим, что множество $P_N$, порожденное объединением множеств порождающих элементов циклических перестановок $\widetilde{Z} = \bigcup_{i=1}^{m} z^i$, содержит все элементы кортежа циклических перестановок $TP_N^c$. Поэтому все перестановки, удовлетворяющие условиям задач 1, 2, можно осуществить генерацией перестановок всех элементов множества $\widetilde{Z}$ и проверкой каждого из них на допустимость с помощью разложения на произведение циклов. Количество всех таких перестановок, полученных одним из известных методов, рассмотренных в [1], составляет $\text{Card } P_N = N! = (n_1 + n_2 + \ldots + n_m)!$. Здесь $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — длины циклов в разложении перестановки на произведение циклов. Сравним количество перестановок, удовлетворяющих условиям задач 1, 2, т.е. количество элементов кортежа циклических перестановок $TP_N^c$, сгенерированных предложенным методом, с количеством всевозможных перестановок из $N$ элементов. Согласно (4) количество всех перестановок, представимых в виде произведения $m$ циклов длин $n_1, n_2, \ldots, n_m$ соответственно равно $\text{Card } TP_N^c = (n_1 - 1)! \cdot (n_2 - 1)! \cdot \ldots \cdot (n_m - 1)!$. Рассмотрим отношение мощностей этих множеств:

$$\frac{\text{Card } P_N}{\text{Card } TP_N^c} = \alpha = \frac{N!}{(n_1 - 1)! \cdot (n_2 - 1)! \cdot \ldots \cdot (n_m - 1)!} =$$

$$= \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!} \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m . \tag{10}$$

Первый сомножитель в правой части соотношения (10) представляет собой количество перестановок с повторениями из $m$ различных элементов, где первый элемент повторяется $n_1$ раз, второй — $n_2$ раз, …, $m$-й элемент — $n_m$ раз, т.е.

$$\alpha = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m \cdot \text{Card } P(N, n_1, n_2, \ldots, n_m). \tag{11}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Количество всех перестановок $N$ различных элементов, представимых в виде произведения $m$ циклов длин $n_1, n_2, \ldots, n_m$ соответственно, в $\alpha$ раз меньше количества всех перестановок из $N$ различных элементов, где $\alpha$ определяется соотношением (11).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе подход к генерации перестановок, содержащих циклы, является в достаточной степени универсальным. Используя его, можно генерировать перестановки, содержащие циклы, с учетом большого набора требований к количеству циклов, их длине и т.д.

Следует отметить, что рассмотренные в статье подходы к генерации перестановок, содержащих циклы, имеют высокую вычислительную сложность. Однако применение предложенных методов оправдано при необходимости генерации сложных комбинаторных объектов в задачах различных классов. В этой ситуации применение указанных методов приведет к значительному снижению избыточности, характерной для универсальных методов генерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Knuth D. The art of computer programming, Volume 4, Fascicle 2: Generating all tuples and permutations. — Addison-Wesley, 2005. — 144 p.
2. Knuth D. The art of computer programming, Volume 4, Fascicle 3: Generating all combinations and partitions. — Addison-Wesley, 2005. — 160 p.
3. Kreher D.L., Stinson D.R. Combinatorial algorithms: Generation enumeration and search. — CRC Press, 1999. — 329 p.
4. Bona M. Combinatorics of Permutations. — Chapman Hall-CRC, 2004. — 383 p.
5. Ruskey F. Combinatorial generation, Dept. of Comput. Sci. Univ. of Victoria, Canada, 1j-CSC 425/520. — 2003 — 289 p.
6. Korsh J.F., LaFollette P. S. Loopless array generation of multiset permutations // The Comp. Journ. — 2004. — **47**, N 5. — P. 612–621.
7. Тимофеева Н.К. Об особенностях формирования и упорядочения выборок // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 3. — С. 179–187.
8. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н. Многокритериальные задачи комбинаторной оптимизации на множестве полиразмещений: полиэдральный подход к решению // Там же. — 2009. — № 3. — С. 118–126.
9. Емец О.А., Емец Е.М. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах // Там же. — 2009. — № 5. — С. 129–136.
10. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Метод упорядочения значений линейной функции на множестве перестановок // Там же. — 2009. — № 2. — С. 50–61.
11. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений // Доповіді НАН України. — 2008. — № 10. — С. 28–31.
12. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990. — 440 с.
13. Bergeron F., Labelle G., Leroux P. Combinatorial species and tree-like structures. — Cambridge: University Press, 1998. — 457 p.
14. Herbert S. Wilf Generatingfunctionology, A K Peters, Ltd. — Massachusetts: Wellesley, 2006. — 226 p.
15. Grebennik I.V., Stoyan Yu.G. Enumeration and constructive tools of generating special combinatorial sets // Proc. 23-rd Europ. Conf. on Oper. Res. — Bonn, Germany. — 2009. — P. 207.


*Поступила 05.11.2009*