УДК 517.9

Н.В. ЗАДОЯНЧУК, П.О. КАСЬЯНОВ

АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С +-КОЭРЦИТИВНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Ключевые слова: *дифференциальное включение второго порядка, +-коэрцитивный оператор, оптимальное управление, вязкоупругость*.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании математических моделей нелинейных процессов и полей нелинеаризованной теории вязкоупругости и пьезоэлектрики, изучении волн разной природы часто используется такая схема: данная модель сводится к некоторому дифференциально-операторному включению или мультивариационному неравенству в бесконечномерном пространстве [1–3]. Далее, используя тот или иной метод аппроксимации, доказывается существование обобщенного решения такой задачи, обосновываются конструктивные методы поиска приближенных решений, изучаются функционально-топологические свойства разрешающего оператора [2]. Если упомянутый процесс имеет эволюционный характер, его математическая модель описывается с помощью дифференциально-операторного включения второго порядка [4–6]. При этом соотношения между определяющими параметрами исходной задачи обеспечивают определенные свойства для многозначного (в общем случае) отображения в дифференциально-операторной схеме исследования. Отметим, что в большинстве работ по данному направлению исследований накладываются достаточно жесткие условия на «демпфирование», связанные с равномерной коэрцитивностью, ограниченностью, обобщенной псевдомонотонностью [4, 6]. Эти условия, как правило, обеспечивают не просто существование решений для таких задач, но и гарантируют диссипацию всех решений, иногда существование глобального компактного аттрактора, что не всегда естественно отображает реальное поведение рассматриваемого геофизического процесса или поля [7]. Поэтому возникает необходимость исследования функционально-топологических свойств разрешающего оператора для дифференциально-операторного включения, которые описывают, в частности, новые, более широкие классы нелинейных процессов и полей нелинеаризованной теории вязкоупругости при адекватном, существенном ослаблении перечисленных выше свойств дифференциальных операторов с соответствующими приложениями к конкретным математическим моделям.

В данной работе рассматриваются задачи анализа и управления дифференциально-операторными включениями второго порядка ослаблено коэрцитивными, w_{λ_0}-псевдомонотонными отображениями. Изучается зависимость решений от функциональных параметров задачи, рассматривается задача оптимального управления. Полученные результаты применяются к математическим моделям нелинеаризованной теории вязкоупругости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть V_0, Z_0 — действительные рефлексивные сепарабельные банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{V_0}$ и $\|\cdot\|_{Z_0}$, H_0 — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, отождествленное со своим топологически сопряженным пространством H_0^*. Предположим, что вложение $V_0 \subset Z_0$ компактное и плотное, а вложение $Z_0 \subset H_0$ непрерывное и плотное. Получим такую цепочку непрерывных и плотных вложений [2, 8]: $V_0 \subset Z_0 \subset H_0 \subset Z_0^* \subset V_0^*$, где Z_0^* и V_0^* — соответствующие топологически сопряженные пространства с Z_0 и V_0 с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Z_0^*}$ и $\|\cdot\|_{V_0^*}$. Введем обозначения: $S=[\tau,T]$, $-\infty<\tau<T<+\infty$, $p\ge 2$, $q>1: \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$H=L_2(S;H_0),\ Z=L_p(S;Z_0),\ V=L_p(S;V_0),$$
$$H^*=L_2(S;H_0),\ Z^*=L_q(S;Z_0^*),\ V^*=L_q(S;V_0^*),$$
$$W=\{y\in V \mid y'\in V^*\},$$

где y' — производная в смысле $D^*(S;V_0^*)$ от элемента $y\in V$ [2, 8]. Заметим, что вложения $V\subset Z\subset H\subset Z^*\subset V^*$ непрерывные и плотные. Более того, вложение $W\subset Z$ компактное [9, 10], а вложение $W\subset C(S;H_0)$ непрерывное [8, 10].

Следует также отметить, что канонические спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_0}: V_0^*\times V_0\to R$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Z_0}: Z_0^*\times Z_0\to R$ совпадают на $H_0\times V_0$ со скалярным произведением в H_0. Тогда спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_V: V^*\times V\to R$ и соответственно $\langle\cdot,\cdot\rangle_Z: Z^*\times Z\to R$ совпадает на $H\times V$ со скалярным произведением в H, т.е.

$$\langle f,u\rangle := \langle f,u\rangle_V = \langle f,u\rangle_Z = (f,u) = \int_S (f(s),u(s))ds,\ f\in H,\ u\in V.$$

Пусть $\hat{U}$, $\hat{K}$ — отделимые локально выпуклые линейные топологические пространства (ЛТП), $U\subset\hat{U}$, $K\subset\hat{K}$ — некоторые непустые множества, $A: V\times U\to$ $\to C_v(V^*)$, $C: Z\times K\to C_v(Z^*)$ — многозначные отображения с непустыми выпуклыми слабо компактными значениями в соответствующих пространствах V^* и Z^*; $B: V\to V^*$ — линейный оператор; $f\in V^*$, $a\in H_0$, $b\in V_0$ — произвольные фиксированные элементы.

Ставится задача относительно изучения функционально-топологических свойств разрешающего оператора $K(u,v,a,b,f)$ такой задачи:

$$\begin{cases} y''+A(y',u)+B(y)+C(y,v)\ni f, \\ y(\tau)=b,\ y'(\tau)=a. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $K(u,v,a,b,f)=\{(y,y')\in C(S;V_0)\times W \mid y$ — решение (1)$\}$, производная y' элемента y понимается в смысле пространства распределений $D^*(S;V_0^*)$.

Заметим, что поскольку вложение $W\subset C(S;H_0)$ непрерывное, то начальные условия в (1) имеют смысл.

КЛАССЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть Y — некоторое рефлексивное банахово пространство, Y^* — его топологически сопряженное, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y: Y^*\times Y\to R$ — спаривание, $A: Y\rightrightarrows Y^*$ — строгое многозначное отображение, т.е. $A(y)\ne\varnothing\ \forall y\in Y$. Для него определим верхнюю $[A(y),\omega]_+ = \sup_{d\in A(y)}\langle d,\omega\rangle_Y$ и нижнюю $[A(y),\omega]_- = \inf_{d\in A(y)}\langle d,\omega\rangle_Y$ опорные функции, где $y,\omega\in Y$, а также верхнюю $\|A(y)\|_+ = \sup_{d\in A(y)}\|d\|_{Y^*}$ и нижнюю $\|A(y)\|_- = \inf_{d\in A(y)}\|d\|_{Y^*}$ нормы. Рассмотрим связанные с A отображения $\mathrm{co}\,A: Y\rightrightarrows Y^*$ и $\overline{co}A: Y\rightrightarrows Y^*$, определенные соотношениями $(\mathrm{co}\,A)(y)=\mathrm{co}\,(A(y))$ и $(\overline{\mathrm{co}}\,A(y))=\overline{\mathrm{co}\,(A(y))}$ соответственно, где $\overline{\mathrm{co}\,(A(y))}$ — слабое замыкание выпуклой оболочки множества $A(y)$ в пространстве Y^*. Как известно [2, 11], строгие многозначные отображения $A, B: Y \rightrightarrows Y^*$ имеют такие свойства:

1) $[A(y), v_1 + v_2]_+ \le [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+$, $[A(y), v_1 + v_2]_- \ge [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_-$ $\forall y, v_1, v_2 \in Y$;

2) $[A(y), v]_+ = -[A(y), -v]_-$, $[A(y) + B(y), v]_{+(-)} = [A(y), v]_{+(-)} + [B(y), v]_{+(-)}$ $\forall\, y, v \in Y$;

3) $[A(y), v]_{+(-)} = [\overline{\text{co}} A(y), v]_{+(-)}$ $\forall y, v \in Y$;

4) $[A(y), v]_{+(-)} \le \| A(y) \|_{+(-)} \| v \|_Y$, $\quad \| A(y) + B(y) \|_+ \le \| A(y) \|_+ + \| B(y) \|_+$ $\forall y \in Y$.

В частности, включение $d \in \overline{\text{co}} A(y)$ выполняется тогда и только тогда, когда $[A(y), v]_+ \ge \langle d, v \rangle_Y$ $\forall v \in Y$.

Если $a(\cdot,\cdot): Y \times Y \to R$, то для каждого $y \in Y$ функционал $Y \ni \omega \mapsto a(y, \omega)$ положительно однородный, выпуклый и полунепрерывный снизу тогда и только тогда, когда существует строгое многозначное отображение $A: Y \rightrightarrows Y^*$ такое, что $a(y, \omega) = [A(y), \omega]_+$ $\forall y, \omega \in Y$.

Пусть $\hat{W}$ — некоторое нормированное пространство, непрерывно вложенное в Y, $\hat{X}$ — некоторое отделимое ЛТП, $X \subset \hat{X}$ — некоторое непустое множество. Рассмотрим параметризированное многозначное отображение $A: Y \times X \rightrightarrows Y^*$.

Далее, $y_n \xrightarrow{w} y$ в Y будет означать, что y_n слабо сходится к y в Y.

Определение 1. Строгое многозначное отображение $A: Y \times X \rightrightarrows Y^*$ называется:

• λ_0-квазимонотонным на $\hat{W} \times X$, если для любой последовательности $\{y_n, a_n\}_{n \ge 0} \subset \hat{W} \times X$ такой, что $y_n \xrightarrow{w} y_0$ в $\hat{W}$, $a_n \to a_0$ в $\hat{X}$, $d_n \xrightarrow{w} d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, где $d_n \in \overline{\text{co}}\, A(y_n, a_n)$ $\forall n \ge 1$, из неравенства $\varlimsup_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_Y \le 0$ следует существование подпоследовательности $\{y_{n_k}, d_{n_k}, a_{n_k}\}_{k \ge 1}$ из $\{y_n, d_n, a_n\}_{n \ge 1}$, для которой выполняется $\varliminf_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - \omega \rangle_Y \ge [A(y_0, a_0), y_0 - \omega]_-$ $\forall \omega \in Y$;

• ограниченным, если для каждого $L > 0$ и ограниченного в топологии пространства $\hat{X}$ множества $D \subset X$ существует такое $l > 0$, что $\| A(y, u) \|_+ \le l$ $\forall y, u \in Y \times D: \| y \|_Y \le L$;

• демизамкнутым, если для произвольной последовательности $\{y_n, u_n\}_{n \ge 0} \subset Y \times X$ такой, что $y_n \to y$ в Y, $u_n \to u_0$ в $\hat{X}$, $d_n \xrightarrow{w} d_0$ в Y^*, где $d_n \in \overline{\text{co}}\, A(y_n, u_n)$ $\forall n \ge 1$ следует, что $d_0 \in \overline{\text{co}}\, A(y_0, u_0)$.

Каждому многозначному отображению $A: Y \rightrightarrows Y^*$ поставим в соответствие параметризированное многозначное отображение $\hat{A}: Y \times X \rightrightarrows Y^*$ по такому правилу: $\hat{A}(y, u) = A(y)$, $y \in Y$, $u \in X$.

Определение 2. Строгое многозначное отображение $A: Y \rightrightarrows Y^*$ называется:

• λ_0-псевдомонотонным на $\hat{W}$, если соответствующее $\hat{A}: Y \times X \rightrightarrows Y^*$ λ_0-квазимонотонное на $\hat{W} \times X$;

• ограниченным, если соответствующее $\hat{A}: Y \times X \rightrightarrows Y^*$ ограниченное.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Изучим функционально-топологические свойства разрешающего оператора задачи (1), связанные с замкнутостью в определенных топологиях. Необходимость обоснования таких свойств связана как с задачами управления математическими моделями нелинейных геофизических процессов и полей, которые описываются с помощью (1), так и с изучением динамики решений таких задач.

Теорема 1. Пусть $A: V\times U \to C_v(V^*)$ — λ_0-квазимонотонный на $W\times U$, ограниченный, $B: V\to V^*$ — линейный, непрерывный, а мультиотображение $C: Z\times K \to C_v(Z^*)$ ограниченное и демизамкнутое. Дополнительно рассмотрим последовательность $\{f_m, a_m, b_m, u_m, v_m\}_{m\geq 1} \subset V^* \times H_0 \times V_0 \times U\times K$. Предположим также, что для всех $m\geq 1$ $(y_m, y'_m) \in K(u_m, v_m, a_m, b_m, f_m)$ и имеют место такие сходимости:

$$
\begin{aligned}
&f_m \to f_0 \text{ в } V^*,\ a_m \to a_0 \text{ в } H_0,\ b_m \to b_0 \text{ в } V_0,\\
&u_m \to u_0 \text{ в } \hat{U},\ v_m \to v_0 \text{ в } \hat{K},\ y'_m \xrightarrow{w} g \text{ в } V.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Тогда существует такой $y\in C(S;V_0)$, что $y'\in W$, $y' = g$ и $(y, y') \in K(u_0, v_0, a_0, b_0, f_0)$. Более того,

$$y_m \to y \text{ в } C(S;V_0),\ m\to +\infty, \tag{3}$$

$$y'_m \xrightarrow{w} y' \text{ в } W,\ m\to +\infty, \tag{4}$$

$$\forall t\in S\quad y'_m(t) \xrightarrow{w} y'(t) \text{ в } H_0, m\to +\infty. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Для фиксированного $b\in V_0$ рассмотрим Липшиц-непрерывный оператор $R_b: Z\to Z$ (соответственно, $V\to V$), определенный соотношением

$$(R_b y)(t) = b + \int_\tau^t y(s)ds \quad \forall y\in Z \text{ (соответственно, } \forall y\in V),\ \forall t\in S.$$

Рассмотрим многозначный оператор $\overline{A}: V\times \overline{U} \to C_v(V^*)$

$$\overline{A}(y,\overline{u}) = A(y,\ u) + B\circ R_b(y) + C(R_b y, v),\ y\in V,\ \overline{u} = (u, v, b)\in \overline{U} = U\times K\times V_0.$$

Если $(y, y')\in K(u, v, a, b, f)$, то $z = y'$ будет решением задачи

$$\begin{cases} z' + \overline{A}(z, u, v, b) \ni f,\\ z(\tau) = a.\end{cases} \tag{6}$$

Наоборот, если $z\in W$ — решение задачи (6), то $(y, y') = (R_b z, z)\in K(u, v, a, b, f)$.

Пусть $\{f_m, a_m, b_m, u_m, v_m\}_{m\geq 1} \subset V^*\times H_0\times V_0\times U\times K$, $(y_m, y'_m)\in K(u_m, v_m, a_m, b_m, f_m)$ $\forall m\geq 1$ и выполняется (2). Положим $z_m = y'_m$ $\forall m\geq 1$. Тогда $y_m = R_{b_m} z_m$ $\forall m\geq 1$. Заметим, что из включения (6) следует, что $\forall m\geq 1$ $\exists\, d_m \in \overline{A}(z_m, u_m, v_m, b_m)$ такое, что

$$d_m = f_m - z'_m \in \overline{A}(z_m, u_m, v_m, b_m). \tag{7}$$

Из (2) следует ограниченность последовательностей $\{z_m\}$, $\{u_m\}$, $\{v_m\}$, $\{b_m\}$, $\{f_m\}$ в соответствующих топологиях пространств $V, \hat{U}, \hat{K}, V_0$ и V^*. Тогда ограниченность $\{d_m\}$ в V^* следует из ограниченности отображений $A: V\times U\to C_v(V^*)$, $B: V\to V^*$, $C: Z\times K\to C_v(Z^*)$, непрерывности вложений $V\subset Z$, $Z^*\subset V^*$ и оценок

$$
\begin{aligned}
&\|R_{b_1}x_1 - R_{b_2}x_2\|_V \leq \alpha[\|b_1 - b_2\|_{V_0} + \|x_1 - x_2\|_V]\quad \forall x_1, x_2\in V,\ b_1, b_2\in V_0,\\
&\|R_{b_1}x_1 - R_{b_2}x_2\|_Z \leq \beta[\|b_1 - b_2\|_{V_0} + \|x_1 - x_2\|_Z]\quad \forall x_1, x_2\in Z,\ b_1, b_2\in V_0,
\end{aligned}
$$

где α, β — постоянные, которые не зависят от b_i, x_i.

Таким образом,

$$\exists\, c_1 > 0: \forall m\geq 1\ \|d_m\|_{V^*} \leq c_1. \tag{8}$$

Ограниченность $\{z'_m\}_{m\geq 1}$ в V^* следует из ограниченности $\{f_m\}$ в V^* и (8), поэтому

$$\exists c_2 > 0: \forall m\geq 1\ \|z'_m\|_{V^*} \leq \|z_m\|_W \leq c_2. \tag{9}$$

Так как вложение $W \subset C(S; H_0)$ непрерывное (см. [2, 8]), то вследствие (9) получим

$$\exists c_3 > 0 \colon \forall m \ge 1, \ \forall t \in S \ \ ||z_m(t)||_{H_0} \le c_3 . \tag{10}$$

С помощью (2) и оценок (8)–(10), учитывая непрерывность отображения $y \mapsto y'$ в $D^*(S; V_0^*)$, имеем

$$\begin{gathered} z_m \xrightarrow{w} g \text{ в } W, \ d_m \xrightarrow{w} d = f_0 - g' \text{ в } V^*, \\ \forall t \in S \ \ z_m(t) \xrightarrow{w} g(t) \text{ в } H_0 \text{ при } m \to \infty. \end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда, а также из (2), в частности, следует, что

$$g \in W \text{ и } g(\tau) = a_0. \tag{12}$$

Покажем, что g удовлетворяет включению $g' + \overline{A}(g, \overline{u}_0) \ni f_0$, где $\overline{u}_0 = (u_0, v_0, b_0)$. Поскольку $g' + d = f_0$, то достаточно доказать, что $d \in \overline{A}(g, \overline{u})$.

Сначала убедимся, что

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \langle d_m, z_m - g \rangle \le 0. \tag{13}$$

Действительно, благодаря (7), $\forall m \ge 1$ имеем

$$\begin{gathered} \langle d_m, z_m - g \rangle = \langle f_m, z_m \rangle - \langle z_m', z_m \rangle - \langle d_m, g \rangle = \\ = \langle f_m, z_m \rangle - \langle d_m, g \rangle + \frac{1}{2}(||z_m(\tau)||_{H_0}^2 - ||z_m(T)||_{H_0}^2). \end{gathered} \tag{14}$$

Далее, для левой и правой частей равенства (14) возьмем верхний предел при $m \to \infty$:

$$\begin{gathered} \overline{\lim_{m \to \infty}} \langle d_m, z_m - g \rangle \le \overline{\lim_{m \to \infty}} \langle f_m, z_m \rangle + \overline{\lim_{m \to \infty}} \langle d_m, -g \rangle + \\ + \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{2}(||z_m(\tau)||_H^2 - ||z_m(T)||_H^2) \le \langle f_0, g \rangle - \langle d, g \rangle + \\ + \frac{1}{2}(||g(\tau)||_{H_0}^2 - ||g(T)||_{H_0}^2) = \langle f_0 - d, g \rangle - \langle g', g \rangle = 0. \end{gathered}$$

Последнее выполняется вследствие [8, лемма I.5.3] и (11). Неравенство (13) проверено.

Из определения $\overline{A}$ следует, что $\forall m \ge 1 \exists \zeta_m \in A(z_m, u_m), \exists \xi_m \in C(R_b z_m, v_m)$ такие, что

$$\forall m \ge 1 \ \ d_m = \zeta_m + B \circ R_{b_m}(z_m) + \xi_m. \tag{15}$$

Из (2), (11), ограниченности $C \colon Z \times K \to C_v(Z^*)$ и компактности вложения $W \subset Z$ имеем, что

$$z_m \to g \text{ в } Z, \ R_{b_m} z_m \to R_{b_0} g \text{ в } Z, \ \xi_m \xrightarrow{w} \xi \text{ в } Z^*, \ m \to +\infty. \tag{16}$$

Из демизамкнутости $C \colon Z \times K \to C_v(Z^*)$ следует, что

$$\xi \in C(R_{b_0} g, v_0). \tag{17}$$

Так как $\left\| \int_s^t z_m(s) ds \right\|_{V_0} \le |t - s|^{1/q} ||z_m||_V \le c_4 |t - s|^{1/q} \ \forall t, s \in S$, $\forall m \ge 1$, где $c_4 > 0$ — постоянная, которая не зависит от $m \ge 1$, $s, t \in S$, то вследствие (2)

$$R_{b_m} z_m \to R_{b_0} \text{ в } C(S; V_0), \ m \to +\infty, \tag{18}$$

в частности,

$$B \circ R_{b_m} z_m \to B \circ R_{b_0} g \text{ в } V^*, \ m \to +\infty. \tag{19}$$

Таким образом,

$$\langle B \circ R_{b_m}(z_m) + \xi_m, z_m - g \rangle \to 0, \ m \to +\infty, \tag{20}$$

$$\lim_{m\to\infty}\langle B\circ R_{b_m}(z_m)+\xi_m, z_m-\omega\rangle=\langle B\circ R_{b_0}(g)+\xi, g-\omega\rangle\geq$$
$$\geq\langle B\circ R_{b_0}(g), g-\omega\rangle+[C(R_{b_0}g, v_0), g-\omega]_-\quad\forall\omega\in V. \tag{21}$$

Из (13), (15) и (20) имеем

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle\zeta_m, z_m-g\rangle\leq 0. \tag{22}$$

Из (15)–(18) и (11) следует также, что

$$\zeta_m\xrightarrow{w}\zeta=d-\xi-B\circ R_{b_0}(g)\text{ в }V^*,\ m\to+\infty. \tag{23}$$

Таким образом, благодаря (11), (22), (23) и λ_0-квазимонотонности A на $W\times U$ имеем, что с точностью к подпоследовательности $\{z_{m_k}, u_{m_k}, d_{m_k}\}_{k\geq1}\subset\{z_m, u_m, d_m\}_{m\geq1}$, $\lim_{k\to+\infty}\langle\zeta_{m_k}, z_{m_k}-\omega\rangle\geq[A(g,u_0), g-\omega]_-\ \forall\omega\in V$. Отсюда и из (13), (20), в частности, следует, что $\lim_{k\to\infty}\langle\zeta_{m_k}, z_{m_k}-g\rangle=0$ и $\langle\zeta, g-\omega\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle\zeta_{m_k}, g-\omega\rangle\geq$ $\geq[A(g,u_0), g-\omega]_-\ \forall\omega\in V$. Последнее вместе с (21) гарантирует, что $\langle d, g-\omega\rangle\geq$ $\geq[\overline{A}(g,u_0,v_0,b_0), g-\omega]_-\ \forall\omega\in V$. Это означает, что $d\in\overline{A}(g,u_0,v_0,b_0)$. Положив $y=R_{b_0}g,\ y'=g$, получим $(y,y')\in K(u_0,v_0,a_0,b_0,f_0)$. Заметим, что (3) является прямым результатом (19), а (4) и (5) следуют из (11).

Теорема доказана.

Дополнительно предположим, что существуют действительные гильбертовы пространства V_σ, V_{σ_1} такие, что вложения $V_\sigma\subset V_0\subset V_{\sigma_1}\subset H_0$ непрерывные и плотные. Тогда вложение $V_\sigma\subset H_0$ компактное. Положим $W_\sigma=\{y\in V\,|\,y'\in L_q(S;V_\sigma^*)\}$, где V_σ^* — топологически сопряженное с V_σ пространство, y' — производная элемента $y\in V$ в смысле $D^*(S;V_\sigma^*)$ [8].

Теорема 2. Если для некоторых $u\in U,\ v\in K,\ a\in H_0,\ b\in V_0$ отображение $A(\cdot,u):V\to C_v(V^*)$ является λ_0-псевдомонотонным на W_σ и

$$\begin{gathered}\exists c_1,c_2,c_3>0:\forall y\in V[A(y,u), y]_+\geq c_1\|y\|_V^p-c_2,\\ \|A(y,u)\|_+\leq c_3(1+\|y\|_V^{p-1}),\end{gathered} \tag{24}$$

а отображение $B:L_2(S;V_{\sigma_1})\to L_2(S;V_{\sigma_1}^*)$ удовлетворяет свойству

$$\forall u\in V\ (Bu)(t)=B_0u(t)\text{ для п.в. }t\in S,$$

где $B_0:V_{\sigma_1}\to V_{\sigma_1}^*$ — линейный, ограниченный, самосопряженный, монотонный оператор, а отображение $C(\cdot,v):Z\to C_v(Z^*)$ демизамкнутое и

$$\exists\varepsilon^*>0:\forall y\in Z\ \sup_{d\in C(y,v)}\|d\|_{Z^*}\leq(c_1\gamma^{-p}(T-\tau)^{-p/q}-\varepsilon^*)(1+\|y\|_Z^{p-1}), \tag{25}$$

где $\gamma\equiv\text{const}:\|\cdot\|_{Z_0}\leq\gamma\|\cdot\|_{V_0}$, то для произвольного $f\in V^*$ $K(u,v,a,b,f)\neq\varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим такое $\omega\in W$, что $\omega(\tau)=a$ и отображение $\overline{A}:V\to C_v(V^*)$, $\overline{A}(y)=A(y+\omega,u)+C(R_b(y+\omega),v)$, $y\in V$. Из условий (24), (25) следует, что (см. [5]) для некоторых $\alpha_1,\alpha_2>0$ $[\overline{A}(y), y]_+\geq\alpha_1\|y\|_V^p-\alpha_2$, $y\in V$. Повторяя рассуждения из [5, с. 207], учитывая, что вложение $W_\sigma\subset Z$ компактное, получим, что отображение $\overline{A}$ ограниченное и λ_0-псевдомонотонное на W_σ. Далее, следуя доказательству теоремы 1 из [5], получаем, что задача

$$\begin{cases} y'' + \overline{A}(y') + By \ni f - \omega' - B \circ R_{\overline{0}}\omega, \\ y(\tau) = b, \ \ y'(\tau) = \overline{0} \end{cases} \tag{26}$$

имеет решение $y \in C(S;V)$ такое, что $y' \in W$. Делая в (26) замену $z = y + R_{\overline{0}}\omega$, получаем требуемое утверждение.

Теорема доказана.

Дополнительно предположим, что $\hat{K} = (X^*, \sigma(X^*, X))$, где X — некоторое действительное сепарабельное или рефлексивное банахово пространство, $K \subset \hat{K}$ — *-слабо компактное непустое подмножество, а отображение $A: V \to C_v(V^*)$ не зависит от параметра $u \in U$. Тогда вместо $K(u, v, a, b, f)$ будем писать $K(v, a, b, f)$. Зафиксируем произвольные $f \in X^*$, $a \in V$, $b \in H$. Положим

$$G_{ad} = \{(y, y', v) \in C(S; V_0) \times W \times K(y, y') \in K(v, a, b, f)\}.$$

Теорема 3. Пусть $L: C(S; V_0) \times (W; \sigma(W^*; W)) \times (X; \sigma(X^*; X))$ — полунепрерывный снизу функционал такой, что $\forall\, u \in C(S; V_0)$, $v \in W, w \in X^*$ $L(u, v, w) \geq \geq \varphi_1(||v||_V) + \varphi_2(||w||_{X^*})$, где $\varphi_i : R_+ \to R$ такие, что $\varphi_i(s) \to +\infty$, $s \to +\infty$, $i = 1, 2$. Предположим также, что $A: V \to C_v(V^*)$, $B: V \to V^*$, $C: Z \times K \to C_v(Z^*)$ удовлетворяют условиям теорем 1, 2. Тогда задача

$$\begin{cases} L(y, y', v) \to \inf, \\ (y, y', v) \in G_{ad} \end{cases} \tag{27}$$

имеет решение.

Доказательство непосредственно следует из утверждений теорем 1, 2 и обобщенной теоремы Вейерштрасса [2].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим вязкоупругое тело, которое в недеформированном состоянии заполняет ограниченную область $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$. Предположим, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ регулярна [8] и Γ разделена на три попарно непересекающиеся измеримые части: Γ_D, Γ_N и Γ_C так, что $\operatorname{meas}(\Gamma_C) > 0$ [4]. Тело зажато на Γ_D так, что поле перемещений обращается в ноль. Предположим также, что заданный вектор объемной силы f_1 распределен в Ω, а поверхностная сила f_2 распределена на Γ_D. Тело может войти в контакт с основанием по потенциальной контактной поверхности Γ_C. Положим $Q = \Omega \times (0, T)$ для $0 < T < +\infty$. В качестве $u: Q \to R^d$ обозначим поле перемещений, в качестве $\sigma: Q \to S_d$ — тензор напряжения, а в качестве $\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u))$, $\varepsilon_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ — тензор деформации, где $i, j = \overline{1, d}$, S_d — пространство $R_s^{d \times d}$ симметричных матриц порядка d. Следуя [12], рассмотрим многозначный аналог вязкоупругого определяющего соотношения Кельвина–Фойгта $\sigma(u, u') \in \aleph(\varepsilon(u')) + \Im(\varepsilon(u))$, где $\aleph$ — многозначное нелинейное, а $\Im$ — однозначное линейное определяющее отображение. Заметим, что в классической линейной вязкоупругости определенный выше закон приобретает форму $\sigma_{i,j} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u') + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u)$, где $\aleph = \{c_{ijkl}\}$ и $\Im = \{g_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = \overline{1, d}$, — тензоры вязкости и упругости соответственно.

Нормальную и тангенциальную компоненты перемещения u на Γ обозначим u_N и u_T, $u_N = u \cdot n$, $u_T = u - u_N n$, где n — единичный вектор внешней нормали к Γ. Аналогично нормальная и тангенциальная компоненты поля напряжения на Γ задается через $\sigma_N = (\sigma n) \cdot n$ и $\sigma_T = \sigma n - \sigma_N n$ соответственно. На контактной поверхности Γ_C рассмотрим граничные условия. Нормальное напряжение σ_N и нормальное перемещение u_N удовлетворяют немонотонному нормальному условию реакции податливости формы $-\sigma_N \in \partial j_N(x,t,u_N,\zeta)$ на $\Gamma_C \times (0,T)$. Закон трения между силой трения σ_T и тангенциальным перемещением u_T на Γ_C имеет вид $-\sigma_T \in \partial j_T(x,t,u_T,\xi)$ на $\Gamma_C \times (0,T)$. Здесь $j_N(\cdot,\cdot,\cdot,\zeta):\Gamma_C \times (0,T)\times R^d \to R$ и $j_T(\cdot,\cdot,\cdot,\xi):\Gamma_C \times (0,T)\times R^d \to R$ — локально липшицевы по последним переменным функции, ∂j_N, ∂j_T — субдифференциалы Кларка соответствующих функционалов $j_N(x,t,\cdot,\zeta)$, $j_T(x,t,\cdot,\xi)$. Такие граничные условия в частных случаях включают в себя классические условия на границе области (см., например, [4, гл. 2.3; 6]). Начальное перемещение и начальную скорость обозначим u_0 и u_1. Классическая формулировка контактной задачи имеет вид: найти такие $u:Q\to R^d$ и $\sigma:Q\to S_d$, что

$$\begin{cases} u''-\operatorname{div}\sigma = f_1 & \text{в } Q,\\ \sigma\in\aleph(\varepsilon(u'))+\Im(\varepsilon(u)) & \text{в } Q,\\ u=0 & \text{на } \Gamma_D\times(0,T),\\ \sigma n = f_2 & \text{на } \Gamma_N\times(0,T),\\ -\sigma_N\in\partial j_N(x,t,u_N,\zeta),\ -\sigma_T\in\partial j_T(x,t,u_T,\xi) & \text{на } \Gamma_C\times(0,T),\\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1 & \text{на } \Omega. \end{cases} \tag{28}$$

Для вариационной постановки такой задачи положим

$$H_0 = L_2(\Omega; R^d),\ \overline{H}_0 = L_2(\Omega; S_d),$$
$$\overline{H}_1 = \{u\in H_0 \mid \varepsilon(u)\in\overline{H}_0\} = H^1(\Omega;R^d),\ V_0=\{v\in\overline{H}_1 \mid v=0 \text{ на } \Gamma_D\}.$$

Используя формулу Грина, определение субдифференциала Кларка [13, 14], при соответствующей гладкости начальных данных (подробнее см. [4, 12]), можно получить [4, 12] вариационную постановку задачи (28) на поиск таких $u:[0,T]\to V$ и $\sigma:[0,T]\to\overline{H}_0$, что

$$\begin{cases} \{\langle u''(t),v\rangle_{V_0} + (\sigma(t),\varepsilon(v))_{\overline{H}_0} +\\ +\int\limits_{\Gamma_C}(j_N^0(x,t,u_N,v_N;\zeta)+j_T^0(x,t,u_T;v_T;\xi))d\Gamma(x)\ge\\ \ge\langle f(t),v\rangle_{V_0} \text{ для всех } v\in V_0 \text{ и п. в. } t\in[0,T],\\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1, \end{cases} \tag{29}$$

где $\langle f(t),v\rangle_{V_0} = (f_1(t),v)_{H_0} + (f_2(t),v)_{L_2(\Gamma_N;R^d)}$ для всех $v\in V_0$ и п.в. t.

Пусть $V=L_2(0,T;V_0)$, $W=\{w\in V \mid w'\in V^*\}$ и $\overline{\gamma}:H^\delta(\Omega;R^d)=:Z_0\to H^{1/2}(\Gamma;R^d)\subset$ $\subset L_2(\Gamma;R^d)$ — оператор следа, $\delta\in(1/2;1)$. Отображения $A:V\to 2^{V^*}$, $B_0:V_0\to V_0^*$ определяются так:

$$[A_0(t,u),v]_+ = \sup\{(d,\varepsilon(v))_{\overline{H}_0} \mid d\in V_0^*,\ d(\cdot)\in\aleph(\cdot,t,\varepsilon(u(\cdot)))\},\ t\in S,\ u,v\in V_0,$$
$$A(u)=\{d\in V^* \mid d(t)\in A_0(t,y(t)) \text{ для п.в. } t\in S\},\ u\in V,$$
$$\langle B_0 u,v\rangle_{V_0} = (\Im(x,t,\varepsilon(u)),\varepsilon(v))_{\overline{H}_0}\ \forall u,v\in V_0,\ t\in[0,T].$$

Здесь $[A(t,u),v]_+$ — верхняя опорная функция множества $A(t,u)\subset V_0^*$. Функционал $J:[0,T]\times L_2(\Gamma_C;R^d)\times K\to R$ определяется так:

$$J(t,v,\eta)=\int\limits_{\Gamma_C}(j_N(x,t,v_N(x),\zeta)+j_T(x,t,v_T(x),\xi))d\Gamma(x),$$

для $t \in [0,T]$, $\upsilon \in L_2(\Gamma_C; R^d)$ и $\eta = (\zeta, \xi) \in K$, а $C: Z \times K \to C_v(Z^*)$ так:

$$C(u,\eta) = \{d \in Z^* \mid d(t) \in \overline{\gamma}^* (\partial J(t, \overline{\gamma} u(t), \eta)) \text{ для п.в. } t \in [0,T]\},$$

где $\overline{\gamma}^*$ — сопряженный оператор к $\overline{\gamma}$. Таким образом, получили задачу на поиск таких $u \in V$, $u' \in W$, что

$$\begin{cases} u'' + A(u') + Bu + C(u,\eta) \ni f, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{30}$$

Можно показать (подробнее см. [4, 12]), что каждое решение задачи (30) является решением задачи (29). Таким образом, накладывая на параметры задачи (28) такие условия, чтобы отображения A, B, C удовлетворяли условия теорем 1–3 (подробнее см. [1, 2, 3, 5, 12]), получим результаты относительно некоторых свойств разрешающего оператора задачи (30), в частности, задачи оптимального управления (27). Заметим, что предложенная в данной работе схема исследования) по сравнению с существующими подходами [1, 2, 3, 5, 12] позволяет, например, ослаблять техническое условие равномерной «−»-коэрцитивности на «+»-коэрцитивность, обобщенной псевдомонотонности на w_{λ_0}-псевдомонотонность и т.п. Стоит отметить, что конкретные классы дифференциальных операторов псевдомонотонного типа, возникающих в задаче (28), детально рассмотрены в [1–14] (см. работы и ссылки на источники).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zgurovsky M.Z., Melnik V.S. Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. — Berlin: Springer, 2004. — 508 p.
2. Згуровский М.З, Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — Киев: Наук. думка, 2008. — 464 c.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — Киев: Наук. думка, 1998. — 614 c.
4. Denkowski Z., Migorski S. Existence of solutions to evolution second order hemivariational inequalities with multivalued damping // System Modeling and Optimization: articles. — 2005. — P. 203–215.
5. Задоянчук Н. В., Касьянов П.О. Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень II порядку з W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями // Укр. мат. журн. — 2009. — № 2. — C. 153–172.
6. Panagiotopoulos P.D. Hemivariational inequalities. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 451 p.
7. Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V. Global attractors for multivalued dynamical systems. — Киев: Наук. думка, 2008. — 208 c.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 c.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 c.
10. Kasyanov P.O., Mel'nik V.S., Piccirillo A.M. On some approximations and main topological descriptions for special classes of Banach spaces with integrable derivatives // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2008. — **14,** N 3. — P. 255–270.
11. Згуровский М.З., Мельник В.С. Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 57–69.
12. Migorski S. Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications // J. Global Optim. — 2005. — **31,** N 3. — P. 505–533.
13. Clarke F.H. Optimization and nonsmooth analysis. — Philadelphia: SIAM, 1990. — 308 p.
14. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 381 c.

Поступила 15.09.2009