УДК 517.9

П.О. КАСЬЯНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И МУЛЬТИВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПА

Ключевые слова: *дифференциально-операторное включение, мультивариационное неравенство, квазимонотонное отображение, метод Фаэдо–Галеркина, метод конечных разностей*.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании нелинеаризированных математических моделей геофизических и социоэкономических процессов и полей, которые содержат дифференциальные уравнения с частными производными с многозначной или разрывной зависимостью между определяющими параметрами задачи, часто используется метод сведения таких объектов к дифференциально-операторным включениям и эволюционным мультивариационным неравенствам в бесконечномерных пространствах [1–20]. При таком подходе условия на параметры исходной задачи гарантируют конкретные свойства для соответствующих энергетических расширений и операторов Немыцкого в порожденной задаче. Последние исследования в этом направлении позволяют находить решение для таких задач при неестественно жестких условиях на функции взаимодействия исходных задач, связанных с равномерной коэрцитивностью, гладкостью, линейностью (см. работы А.А. Толстоногова, Ю.И. Уманского, В. Барбю, В.С. Мельника, И.В. Скрипника, N.S. Papageorgiou, А.Г. Баскакова, В.В. Обуховского и других математиков). Таким образом, адекватное ослабление этих условий является, безусловно, актуальной задачей. Следует отметить, что при исследовании важных функционально-топологических свойств разрешающего оператора дифференциально-операторных включений и мультивариационных неравенств, обосновании высокоточных алгоритмов поиска приближенных решений появляются новые проблемы. Они связаны с изучением новых классов энергетических расширений и операторов Немыцкого для дифференциальных операторов из исходных математических моделей, исследованием структуры соответствующих фазовых и расширенных фазовых пространств, доказательством новых теорем вложения и аппроксимации, теорем о базисе для таких пространств, обобщением теоремы Ки Фаня для мультистратегий, разработкой некоэрцитивной теории для дифференциально-операторных включений с отображениями псевдомонотонного типа.

КЛАССЫ МНОГОЗНАЧНЫХ КВАЗИМОНОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим классы многозначных отображений квазимонотонного типа. В приложениях такие отображения естественным образом возникают как энергетические расширения и операторы Немыцкого дифференциальных операторов из математических моделей широкого класса геофизических процессов и полей, которые содержат, в частности, дифференциальные уравнения с частными производными с многозначной или разрывной нелинейностью и нелинейной немонотонной (в общем случае) главной частью дифференциального оператора. Классы дифференциальных операторов, «расширения» которых удовлетворяют тому или иному свойству, детально рассмотрены в работах Z. Liu, Z. Denkowsky, S. Migorsky, М.З. Згуровского, В.С. Мельника, Х. Гаевского, К. Грегера, К. Захариаса, P. Panagiotopoulos, Ж.-Л. Лионса, Г. Дюво и др.

Пусть X — действительное рефлексивное банахово пространство, X^* — его топологически сопряженное, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — каноническая двойственность между X и X^*, 2^{X^*} — совокупность всех непустых подмножеств пространства X^*, отображение $A : X \to 2^{X^*}$ — многозначное. Рассмотрим верхнюю и соответственно нижнюю опорную функцию

$$[A(y), \xi]_+ = \sup_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X, \ [A(y), \xi]_- = \inf_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X,$$

где $y, \xi \in X$. Пусть также

$$\| A(y) \|_+ = \sup_{d \in A(y)} \| d \|_{X^*}, \ \| A(y) \|_- = \inf_{d \in A(y)} \| d \|_{X^*}.$$

Свойства таких отображений детально исследованы в работах М.З. Згуровского, В.С. Мельника и их учеников [1–4].

Далее слабую сходимость обозначим как «$\xrightarrow{w}$». Обозначим $C_v(X^*)$ совокупность всех непустых замкнутых выпуклых ограниченных подмножеств из пространства X^*.

Определение 1. Многозначное отображение $A : X \to 2^{X^*}$ называется:

- монотонным, если $[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ \ \ \forall y_1, y_2 \in X$;
- $+(-)$-коэрцитивним, если $\dfrac{[A(y), y]_{+(-)}}{\| y \|_X} \to +\infty$ при $\| y \|_X \to +\infty$;
- хеминепрерывным (сверху), если функция $X \ni x \mapsto [A(x), y]_+$ полунепрерывна сверху на X для любого $y \in X$.

Пусть W — некоторое нормированное пространство, непрерывно вложенное в X, Y — рефлексивное или сепарабельное нормированное пространство, Y^* — сопряженное к нему, U — непустое, выпуклое, *-слабо замкнутое множество в Y^*. Рассмотрим параметризированное многозначное отображение $A : X \times U \rightrightarrows X^*$.

Определение 2. Многозначное отображение $A : X \times U \to C_v(X^*)$ называется:

- λ_0-квазимонотонным на $W \times U$, если для любой последовательности $\{y_n, a_n\}_{n \geq 0} \subset W \times U$ такой, что $y_n \xrightarrow{w} y_0$ в W, $a_n \to a_0$ $*$-слабо в Y^*, $d_n \xrightarrow{w} d_0$ в X^* при $n \to +\infty$, где $d_n \in A(y_n, a_n)$ $\forall n \geq 1$, из неравенства $\varlimsup_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leq 0$ следует, что для некоторой подпоследовательности $\{y_{n_k}, d_{n_k}\}_{k \geq 1} \subset \{y_n, d_n\}_{n \geq 1}$ выполняется неравенство
$$\varliminf_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \geq [A(y_0, a_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X;$$
- ограниченным, если для каждого $L > 0$ существует такое $l > 0$, что
$$\forall \{y, u\} \in X \times U : \| y \|_X \leq L, \ \| u \|_U \leq L \quad \| A(y, u) \|_+ \leq l.$$

Определение 3. Будем считать, что отображение $A : X \times U \to C_v(X^*)$ удовлетворяет свойству $\overline{S}_k$ на $W \times U$: если из того, что $y_n \to y_0$ слабо в W, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабо в Y^*, $d_n \to d$ $*$-слабо в X^* $(d_n \in A(y_n, u_n)$ $\forall n \geq 1)$, и из того, что $\langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \to 0$ при $n \to \infty$, следует $d \in A(y_0, u_0)$.

Определение 4. Будем считать, что отображение $A : X \times U \to C_v(X^*)$ удовлетворяет свойству (П) на $X \times U$: если для любого $k > 0$, любого ограниченного множества $B \subset X \times U$, любого $y_0 \in X$ и для некоторого селектора $d \in A$ $(d(y, u) \in A(y, u)$ $\forall (y, u) \in B)$, связанных соотношением $\langle d(y, u), y - y_0 \rangle_X \leq k$ $\forall (y, u) \in B$, существует такое $C > 0$, что $\| d(y, u) \|_{X^*} \leq C$ $\forall (y, u) \in B$.

С каждым многозначным отображением $A: X \to C_v(X^*)$ свяжем отображение $\overline{A}: X \times U \to C_v(X^*)$, $\overline{A}(y,u) = A(y)$, $y \in X$, $u \in U$.

Определение 5. Многозначное отображение $A: X \to C_v(X^*)$ удовлетворяет свойству S_k на W (свойству (П)), если соответствующее отображение $\overline{A}: X \times U \to C_v(X^*)$ удовлетворяет свойству $\overline{S}_k$ на $W \times U$ (свойству (П) на $X \times U$).

Определение 6. Многозначное отображение $A: X \to C_v(X^*)$ называется:

• λ_0-псевдомонотонным на W (W_{λ_0}-псевдомонотонным), если соответствующее отображение $\overline{A}: X \times U \to C_v(X^*)$ λ_0-квазимонотонное на $W \times U$;

• ограниченным, если соответствующее отображение $\overline{A}: X \times U \rightrightarrows X^*$ ограниченное.

Классы таких отображений детально изучены в работах [1–20].

ПАРАМЕТРИЗИРОВАННЫЕ МУЛЬТИВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ТИПА S_k

Рассмотрим функционально-топологические свойства разрешающего оператора для класса мультивариационных неравенств в бесконечномерных пространствах, которые описывают математические модели нелинейных стационарных геофизических процессов и полей различной природы, содержащих дифференциальные уравнения с частными производными с разрывной и многозначной зависимостью между определяющими параметрами исходной задачи. Для многозначного отображения $A: X \times U \rightrightarrows X^*$, непустого замкнутого в пространстве X выпуклого множества K и выпуклого функционала $\varphi: K \to \mathbb{R}$ параметризированным мультивариационным неравенством назовем объект

$$[A(y,u), \xi - y]_+ + \varphi(\xi) - \varphi(y) \ge \langle f, \xi - y \rangle_X \quad \forall \xi \in K, \tag{1}$$

где $f \in X^*$, $u \in U$.

Для фиксированных $u \in U$, $f \in X^*$ в качестве $K(u,f)$ обозначим совокупность решений операторного неравенства (1) из множества K.

В [1, 4, 13, 18] разрабатывается многозначный метод штрафа для мультивариационных неравенств с отображениями типа $\overline{S}_k$ и λ_0-квазимонотонными отображениями, изучаются свойства разрешающего оператора. В частности, доказано, что когда пространство X компактно вложено в некоторое рефлексивное банахово пространство W, $K = X$, многозначное отображение $A: X \times U \rightrightarrows X^*$ удовлетворяет свойству $\overline{S}_k$, функционал $\varphi: W \to \mathbb{R}$ — выпуклый, полунепрерывный снизу, $u_n \to u$ $*$-слабо в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*, то $\bigcap\limits_{n \ge 1} \overline{\bigcup\limits_{m \ge n} K(u_m, f_m)}^{w} \subset K(u,f)$, где $\overline{Q}^{w}$ — слабое замыкание множества $Q \subset X$ в X.

Более того, если существует такое $u \in U$, что отображение $X \ni y \to A(y,u)$ является $+$-коэрцитивным и ограниченным, то для произвольного $f \in X^*$ множество $K(u,f)$ непустое и слабо замкнутое в X.

В качестве примера можно рассмотреть задачу управления коэффициентами главной части эллиптического уравнения с условиями Дирихле на границе в классе обобщенно соленоидальных управлений. Пусть $n \ge 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ, $X = H_0^1(\Omega)$ — действительное пространство Соболева, $X^* \equiv H^{-1}(\Omega)$, $(u,v)_{L_2(\Omega)}$ — скалярное произведение в $W \equiv W^* = L_2(\Omega)$, $((u,v))$ — скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$, $a \cdot b$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{((u,u))}$, $u \in X$. Пусть также ξ_1, ξ_2 — заданные функции из $L^{\infty}(\Omega)$ такие, что

$$\xi_1(x) \le \xi_2(x) \text{ почти всюду (п.в.) в } \Omega. \tag{2}$$

Положим

$$U_0 = \left\{ \mathcal{U} = [u_{ij}(x)]_{1 \le i,\, j \le n} \,\middle|\, \begin{array}{c} u_{ji} = u_{ij} \in L_{\infty}(\Omega) \ \ \forall i, j = \overline{1, n}, \\ \xi_1(x) \le u_{ij}(x) \le \xi_2(x) \text{ п.в. в } \Omega \ \ \forall i, j = \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

Множество U_0 состоит из равномерно ограниченных симметричных квадратных матриц. Пусть также $Y = [L^1(\Omega)]^{n \times n}$. Тогда $Y^* \equiv [L_{\infty}(\Omega)]^{n \times n}$. Рассмотрим множество

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [L_{\infty}(\Omega)]^{n \times n} : \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Будем полагать, что функциональный параметр $\mathcal{U}$ является допустимым, если $\mathcal{U} \in V \bigcap U_0$. Множество всех допустимых параметров обозначим как U. Множество U секвенциально компактное в $*$-слабой топологии пространства $[L_{\infty}(\Omega)]^{n \times n}$. Рассмотрим оператор $A : X \times U \to X^*$,

$$A(y, \mathcal{U}) = -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x) \nabla y) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right).$$

Многозначное отображение $A : X \times U \to X^*$ удовлетворяет свойству $\bar{S}_k$. За счет (2) как A, так и $-A$ не являются λ-квазимонотонными в общем случае. Более того, положив $\mathcal{A}(y) = \{A(y, \mathcal{U}) \,|\, \mathcal{U} \in U\}$, $y \in X$, получим ограниченное многозначное отображение, которое удовлетворяет свойству S_k, но не является λ-псевдомонотонным; $-A$ также не λ-псевдомонотонно. Достаточное условие, которое обеспечивает $+$-коэрцитивность $\mathcal{A}$, имеет, например, такой вид:

$$\exists \alpha > 0\text{: для почти всех } x \in \Omega \ \ \xi_2(x) \ge \alpha, \ \xi_1(x) \le 0. \tag{3}$$

Заметим, что при выполнении условия (3) $\mathcal{A}$ не является $-$-коэрцитивным.

Рассмотрим выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $\psi(u) \in L^1(\Omega)$ для всех $u \in W$. В качестве $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ обозначим субдифференциал ψ. Для фиксированных $f \in X^*$ и $\mathcal{U} = [u_{ij}(x)]_{1 \le i,\, j \le n} \in U$ рассмотрим задачу

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + \Phi(y(x)) \ni f(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega,$$

$$y(x) = 0 \text{ п.в. на } \Gamma.$$

Множество обобщенных решений такой задачи обозначим как $K(f, \mathcal{U}) \subset X$. В этом случае имеют место все приведенные выше утверждения.

Полученные результаты существенно обобщают соответствующие теоремы из работ А.А. Ковалевского, В.Е. Капустяна, О.П. Когут, А.А. Панкова, Z. Denkowski, S. Migorski, D. Bucur и других, позволяя ослабить условие $-$-коэрцитивности на $+$-коэрцитивность, условие λ_0-псевдомонотонности и замкнутости графика — на условие $\bar{S}_k$ и λ_0-квазимонотонность, условие однозначности оператора штрафа — на многозначность в общем случае.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работах [1–3, 11–20] конструктивно изучаются дифференциально-операторные включения с некоэрцитивными отображениями вольтерровского типа, описывающие новые математические модели нелинейных геофизических процессов и полей, в частности пьезоэлектрических процессов, которые требуют разработки соответствующей некоэрцитивной схемы исследования и высокоточных алгоритмов поиска приближенных решений. Пусть $(V_i; H; V_i^*)$ — эволюционные тройки такие, что для некоторого счетного множества $\Phi \subset V = V_1 \cap V_2$, Φ плотно в пространствах V, V_1, V_2 и H,

$$X = L_{r_1}(S; H) \cap L_{r_2}(S; H) \cap L_{p_1}(S; V_1) \cap L_{p_2}(S; V_2),$$

$$X^* = L_{q_1}(S; V_1^*) + L_{q_2}(S; V_2^*) + L_{r_2'}(S; H) + L_{r_1'}(S; H),$$

$$W = \{ y \in X \mid y' \in X^* \},$$

с соответствующими нормами, при предположении $2 \le p_0 := \max\{r_1, r_2\} < +\infty$, $1 < p_i \le r_i < +\infty$, $q_i \ge r_{i'} > 1$, $p_i^{-1} + q_i^{-1} = r_i^{-1} + r_{i'}^{-1} = 1$, $i = 1, 2$. Отметим, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$-спаривание на $X^* \times X$ совпадает со скалярным произведением в $H_1 = L_2(S; H)$ на $H_1 \times X$. В работах [1, 2] изучаются структурные свойства введенных фазовых пространств и расширенных фазовых пространств обобщенных решений дифференциальных включений и мультивариационных неравенств, которые описывают математические модели нелинейных геофизических и социоэкономических процессов и полей.

Определение 7. Отображение $A : X \rightrightarrows X^*$ называется оператором типа Вольтерры, если для произвольных $u, v \in Y$, $t \in (0, T]$ из равенства $u(s) = v(s)$ для почти всех $s \in [0, t]$ следует, что $[A(u), \xi_t]_+ = [A(v), \xi_t]_+$ $\forall \xi_t \in X$ таких, что $\xi_t(s) = 0$ для почти всех $s \in S \setminus [0, t]$.

В качестве $\overline{H}(X^*)$ обозначим совокупность подмножеств X^* с таким свойством: $B \in \overline{H}(X^*)$, если для произвольного измеримого множества $E \subset S$ и произвольных $u, v \in B$ выполняется $u + (v - u)\chi_E \in B$. Здесь и далее для $d \in X^*$

$$(d\chi_E)(\tau) = d(\tau)\chi_E(\tau) \text{ для почти всех } \tau \in S,\ \chi_E(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что существует гильбертово пространство V_σ такое, что $V_\sigma \subset V_1$, $V_\sigma \subset V_2$ непрерывно и плотно, $V_\sigma \subset H$ компактно и плотно. Для $i = 1, 2$ положим

$$X_{i,\sigma} = L_{r_i}(S; H) \cap L_{p_i}(S; V_\sigma),\ X_\sigma = X_{1,\sigma} \cap X_{2,\sigma},$$

$$X_{i,\sigma}^* = L_{r_{i'}}(S; H) + L_{q_i}(S; V_\sigma^*),\ X_\sigma^* = X_{1,\sigma}^* + X_{2,\sigma}^*,$$

$$W_{i,\sigma} = \{ y \in X_i \mid y' \in X_{i,\sigma}^* \},\ W_\sigma = W_{1,\sigma} \cap W_{2,\sigma}.$$

Для многозначного (в общем случае) отображения $A : X \rightrightarrows X^*$ рассматривается

$$\begin{cases} u' + A(u) \ni f, \\ u(0) = a, \quad u \in W \subset C(S; H), \end{cases} \tag{4}$$

где $a \in H$ и $f \in X^*$ — произвольные фиксированные элементы.

В работе [20] доказано, что когда $a = \bar{0}$, вложение $V \subset H$ — компактно, $A : X \to C_v(X^*) \cap \overline{H}(X^*)$ — ограниченное отображение типа Вольтерры, что удовлетворяет свойству S_k на W_σ, для некоторого $\lambda \ge 0$ отображение $A + \lambda I$ +-коэрцитивно, то для произвольного $f \in X^*$ существует по крайней мере одно решение (4), которое можно получить методом Фаэдо–Галеркина.

Если $a \ne \bar{0}$, то условие коэрцитивности необходимо усилить: для некоторых $\lambda_A \ge 0$ и $c > 0$ имеем

$$\frac{[A(y), y]_+ - c\|A(y)\|_+ + \lambda_A \|y\|_Y^2}{\|y\|_X} \to +\infty \quad \text{при } \|y\|_X \to +\infty.$$

В работах [1, 2, 11–14] рассмотрены также метод Дубинского и метод конечных разностей для дифференциально-операторных включений с отображениями вольтерровского типа с соответствующими приложениями к математическим моделям нелинейных геофизических процессов, в частности к динамическим контактным задачам.

Пример. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $S = [0, T]$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$. Для $a, b \in \mathbb{R}$ положим $[a, b] = \{\alpha a + (1-\alpha) b \mid \alpha \in [0, 1]\}$. Пусть $\overline{\theta}, \underline{\theta}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такие действительные функции, что $-C(1+|s|) \le \underline{\theta}(s) \le \overline{\theta}(s) \le C(1+|s|)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ для некоторого $C > 0$. Предположим, что $\overline{\theta}$ полунепрерывна сверху и $\underline{\theta}$ полунепрерывна снизу.

Пусть $V = H_0^1(\Omega)$ — действительное пространство Соболева, $V^* = H^{-1}(\Omega)$ — его сопряженное, $H = L_2(\Omega)$, $X = L_2(S; V)$, $a \in H$, $f \in X^*$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x, t)}{\partial t} + [-\Delta y(x, t), \Delta y(x, t)] + [\underline{\theta}(y(x, t)), \overline{\theta}(y(x, t))] \ni f(x, t) \text{ в } Q, \\ y(x, 0) = a(x) \text{ в } \Omega, \\ y(x, t) = 0 \text{ в } \Gamma_T. \end{cases} \tag{5}$$

При перечисленных условиях задача (5) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $y \in W$.

В работах [2, 9, 16, 17, 20] изучены функционально-топологические свойства разрешающего оператора эволюционного включения с отображениями типа S_k и w_{λ_0}-квазимонотонными отображениями, исследована зависимость множества решений от функциональных параметров задачи. Полученные результаты продемонстрированы на примере динамической контактной задачи с нелинейным трением. Пусть Y — рефлексивное или сепарабельное нормированное пространство, Y^* — сопряженное к нему, U — непустое, выпуклое, $*$-слабо замкнутое множество в Y^*, $A: X \times U \rightrightarrows X^*$ — многозначное (в общем случае) отображение. Для фиксированных $f \in X^*$, $u \in U$, $a \in H$ обозначим $K(f, a, u)$ совокупность решений задачи

$$\begin{cases} y' + A(y, u) \ni f, \\ y(0) = a, \;\; y \in W \subset C(S; H). \end{cases}$$

Когда $A: X \times U \to C_v(X^*)$ — ограниченное λ_0-квазимонотонное на $W \times U$ отображение, $\{f_m, a_m, u_m, y_m\}_{m \ge 1} \subset X^* \times H \times U \times W$: $f_m \to f$ сильно в X^*, $a_m \to a$ сильно в H, $u_m \to u$ $*$-слабо в Y^*, $y_m \to y$ слабо в X при $m \to +\infty$ и $\forall m \ge 1$ $y_m \in K(f_m, a_m, u_m)$, доказано, что $y \in K(f, a, u)$.

Показано также, что когда пространство V_i, $i = 1, 2,$ — равномерно выпуклое, вложение $V \subset H$ — компактное, $A: X \times U \to C_v(X^*) \cap \overline{H}(X^*)$ — ограниченное отображение, которое удовлетворяет свойству $\overline{S}_k$ на $W \times U$, для каждого $u \in U$ отображение $A(\cdot, u)$ является оператором типа Вольтерры, $\{f_m, a_m, u_m, y_m\}_{m \ge 1} \subset X^* \times H \times U \times W$: $f_m \to f$ сильно в X^*, $a_m \to a$ сильно в H, $u_m \to u$ $*$-слабо в Y^*, $y_m \to y$ слабо в X при $m \to +\infty$ и $\forall m \ge 1$ $y_m \in K(f_m, a_m, u_m)$, то $y \in K(f, a, u)$.

Полученные результаты обобщают теоремы существования по сравнению с соответствующими результатами из работ N.S. Papageorgiou, Z. Denkowski, S. Migórski, Q.H. Ansari, S. Carl, D. Motreanu и других, позволяя ослабить условие $-$-коэрцитивности на ослабленную $+$-коэрцитивность, условие обобщенной псевдомонотонности — на w_{λ_0}-псевдомонотонность или условие S_k, условие ограниченности — на «квазиограниченность» и исследовать при этих условиях некоторые функционально-топологические свойства разрешающего оператора для таких задач. Результаты данного раздела вместе с теоремами из работ [1–20] охватывают новые классы дифференциально-операторных включений с многозначными отображениями типа S_k.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МУЛЬТИВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОТОБРАЖЕНИЯМИ ПСЕВДОМОНОТОННОГО ТИПА

В работах [1, 3, 5, 10, 13–15, 19] рассматриваются слабые и сильные решения эволюционных мультивариационных неравенств с $+$-коэрцитивными отображениями. Рассмотрены примеры односторонних задач и задач со свободной границей с дифференциальным оператором типа Лере–Лионса, которые демонстрируют полученные обобщения.

Пусть Φ — сепарабельное локально выпуклое линейное топологическое пространство, Φ^* — его топологически сопряженное, (f, φ) — скалярное произведение (каноническое спаривание) элементов $f \in \Phi^*$ и $\varphi \in \Phi$. Пусть заданы три пространства — V, H, V^*, причем вложения $\Phi \subset V \subset \Phi^*$, $\Phi \subset H \subset \Phi^*$, $\Phi \subset V^* \subset \Phi^*$ непрерывные и плотные; H — гильбертово пространство, V — сепарабельное рефлексивное банахово пространство, V^* — сопряженное к V пространство. Предположим, что множество Φ — плотное в пространстве $V \cap V^*$. Пусть задано семейство операторов $\{G(s)\}_{s \ge 0}$ такое, что $\{G(s)\}_{s \ge 0}$ — непрерывная полугруппа на V, H, V^*, $\|G(s)\|_{L(H;\,H)} \le 1\ \forall s \ge 0$, $-\Lambda$ — инфинитезимальный генератор полугруппы $\{G(s)\}_{s \ge 0}$ с областью определения $D(\Lambda; V)$ (соответственно $D(\Lambda; H)$ или $D(\Lambda; V^*)$) в V (соответственно в H или V^*). Положим

$$D(\Lambda; V, V^*) = \left\{ v \in V \,\middle|\, \begin{array}{l} w \to (v, \Lambda^* w) \text{ непрерывна на } D(\Lambda^*;\, V^*) \cap V \text{ в топологии,} \\ \text{индуцированной из пространства } V \end{array} \right\}.$$

В случае, когда V не содержатся в H, предположим, что

$$V \cap D(\Lambda; V^*) \text{ плотное в } D(\Lambda; V, V^*),$$

$$V \cap D(\Lambda^*; V^*) \text{ плотное в } D(\Lambda^*; V, V^*).$$

Дополнительно предположим, что K является замкнутым подмножеством из V таким, что для каждого $v \in K$ существует последовательность $v_j \in K \cap D(\Lambda)$ такая, что $v_j \to v$ в V и $\overline{\lim_{j \to \infty}} (\Lambda v_j, v_j - v) \le 0$; многозначное отображение $A: V \to C_v(V^*)$ является λ_0-псевдомонотонным на V, локально конечномерно ограниченным, оно удовлетворяет свойству (П) и для некоторого $y_0 \in K \cap D(\Lambda)$ $\dfrac{[A(y), y - y_0]_+}{\|y\|_V} \to +\infty$ при $\|y\|_V \to \infty$; $\beta: V \to C_v(V^*)$ является монотонным, ограниченным, хеминепрерывным сверху многозначным оператором «штрафа», который соответствует множеству K, тогда для произвольного $f \in V^*$, любого $\varepsilon > 0$ задача

$$\begin{cases} \Lambda y_\varepsilon + A(y_\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon} \beta(y_\varepsilon) \ni f, \\ y_\varepsilon \in D(\Lambda), \end{cases} \tag{6}$$

имеет решение. Более того, существует последовательность $\{y_\varepsilon\}_\varepsilon \subset D(\Lambda)$ такая, что:

а) для каждого $\varepsilon > 0$ y_ε — решение задачи (6);

б) существует подпоследовательность $\{y_\tau\}_\tau \subset \{y_\varepsilon\}_\varepsilon$ такая, что для некоторого $y \in V$ $y_\tau \to y$ слабо в V;

в) y является решением задачи

$$(\Lambda v, v-y)+[A(y), v-y]_+ \geq (f, v-y) \;\; \forall v \in K \cap D(\Lambda), \;\; y \in K.$$

По сравнению с существующими результатами в данном направлении исследований предложенный подход имеет следующие преимущества: многозначный метод штрафа позволяет рассматривать более широкий класс аппроксимационных задач, с помощью которых находят решения исходной задачи; в представленных теоремах ослабляется сильное условие –-коэрцитивности; получены новые априорные оценки для производной по времени приближенных решений исходной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для широкого класса математических моделей нелинейных геофизических и социо-экономических процессов и полей, которые содержат, в частности, дифференциальные уравнения с частными производными с разрывной или многозначной зависимостью между определяющими параметрами, в работах [1–20] разработан дифференциально-операторный подход. Обоснован многозначный метод штрафа для параметризированных мультивариационных неравенств с отображениями типа S_k и квазимонотонными отображениями; разработана некоэрцитивная схема исследования эволюционных включений с многозначными отображениями типа S_k в банаховых пространствах; изучены функционально-топологические свойства разрешающего оператора. Полученные результаты могут быть использованы при конструктивном и качественном исследовании нелинейных процессов разной природы, в частности при изучении динамических контактных задач с «нелинейным трением», пьезоэлектрических процессов, полей нелинеаризированной теории вязкоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Згуровский М.З., Касьянов П.О., Мельник В.С. Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. — К.: Наук. думка, (проект «Наукова книга»), 2008. — 464 с.
2. Zgurovsky M.Z., Melnik V.S. Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. — Berlin: Springer, 2004. — 508 p.
3. Згуровский М.З., Новиков А.Н. Анализ и управление односторонними физическими процессами. — К.: Наук. думка, 1996. — 328 с.
4. Згуровский М.З., Мельник В.С. Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 57–69.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Скрыпник И.В. Методы исследования эллиптических краевых задач. — М.: Наука, 1990. — 442 с.
7. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — К.: Наук. думка, 1992. — 381 с.
8. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skrypnik V.N. Impulse differential equations with multivalued and discontinuous raght-hand side. — Kyiv: Inst. of math. NAS of Ukraine, 2007. — 427 p.
9. Иваненко В.И., Мельник В.С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — К.: Наук. думка, 1988. — 324 с.
10. Denkowski Z., Migrorski S., Papageorgiou N.S. An introduction to nonlinear analysis. Applications. — Boston; Dordrecht; London: Kluwer Acad. Publ., 2003. — 689 p.
11. Задоянчук Н.В., Касьянов П.О. Про розв'язність нелінійних еволюційних рівнянь з M-псевдомонотонними некоерцитивними відображеннями // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: математика, механіка. — 2008. — Вип. 19. — С. 7–12.

12. Kasyanov P. O., Melnik V. S., Valero J. On the method of approximation for evolutionary inclusions of pseudomonotone type // Bull. Amer. Math. Soc. — 2008. — **77,** N 1. — P. 115–143.
13. Касьянов П. О., Мельник В. С. О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісн. — 2007. — **4,** № 4. — С. 535–581.
14. Касьянов П. О., Мельник В. С. Еволюційні нерівності з некоерцитивними w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями типу Вольтерри // Укр. мат. журн. — 2008. — **60,** № 11. — С. 1499–1519.
15. Касьянов П. О. Про розв'язність класу еволюційних варіаційних нерівностей з w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 5. — С. 142–147.
16. Касьянов П. О. Періодичні розв'язки для класу диференціально-операторних включень з відображеннями типу S_k // Там же. — 2008. — № 6. — С. 144–148.
17. Касьянов П. О. Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень з некоерцитивними w_λ-псевдомонотонними відображеннями // Доп. НАН України. — 2009. — № 1. — С. 14–20.
18. Касьянов П. О. Про розв'язність одного класу параметризованих мультиваріаційних нерівностей // Там же. — 2009. — № 2. — С. 20–25.
19. Касьянов П. О. Про слабку розв'язність класу еволюційних варіаційних нерівностей в нескінченновимірних просторах // Там же. — 2009. — № 3. — С. 19–24.
20. Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano S. Initial time value problem solutions for evolution inclusions with S_k type operators // Систем. дослідж. та інформ. технології. — 2009. — № 1. — С. 116–130.

Поступила 22.10.2009