НОВЫЕ СРЕДСТВА КИБЕРНЕТИКИ, ИНФОРМАТИКИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Т.А. АЛИЕВ, Н.Ф. МУСАЕВА, У.Э. САТТАРОВА

УДК 519.216

РОБАСТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Ключевые слова: *стохастический процесс, случайный сигнал, помеха, зашумленный сигнал, нормированные оценки корреляционной функции, робастные оценки.*

ВВЕДЕНИЕ

В современных информационных системах корреляционный анализ применяется для решения задач распознавания, идентификации, диагностики, прогноза, оптимизации, управления и т.д. При этом информационные системы должны обеспечить вычисление оценок статистических характеристик технологических параметров и определить собственные и взаимные корреляционные матрицы.

При традиционном подходе к решению перечисленных практических задач статистическими методами предполагается, что для реального сигнала $g(t)$, состоящего из смеси полезного сигнала $X(t)$ и случайной помехи $\varepsilon(t)$, выполняются классические ограничения, т.е. исследуемый процесс $g(t)$ является стационарным эргодическим, случайная помеха $\varepsilon(t)$ имеет нулевое математическое ожидание $m_\varepsilon = 0$, некоррелированные значения отчетов $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)=0$ при $\mu \neq 0$, полезный сигнал $X(t)$ и помеха $\varepsilon(t)$ подчиняются нормальному закону распределения и между ними отсутствует корреляция [1, 2].

Однако, как показано в работах [3–6], при выполнении этих условий оценки автокорреляционных функций зашумленных сигналов при всех временны́х сдвигах μ на самом деле не содержат погрешностей, за исключением нулевого временно́го сдвига $\mu = 0$, где оценка состоит из суммы оценки автокорреляционной функции полезного сигнала и дисперсии помехи. Оценки же взаимно корреляционных функций не содержат погрешностей от помехи при всех временны́х сдвигах μ. Из [1, 2] следует, что для устранения влияния помехи на оценку автокорреляционной функции при нулевом временно́м сдвиге $\mu = 0$ целесообразно перейти к нормированным оценкам корреляционных функций. Однако, как показано ниже, нормирование позволяет исключить влияние помехи только на оценку автокорреляционной функции при нулевом временно́м сдвиге $\mu = 0$. Во всех остальных случаях, т.е. при временны́х сдвигах $\mu \neq 0$ для оценок автокорреляционных функций и при всех временны́х сдвигах μ для оценок взаимно корреляционных функций нормирование, наоборот, приводит к появлению погрешности от помехи.

Естественно, что в случае, когда классические условия не выполняются, величина погрешности от влияния помехи на оценки нормированных корреляционных функций более существенна, и это ведет к неадекватности решения указанных

[1] Работа выполнена при поддержке Азербайджанского Национального Научного Фонда (Azerbaijan National Science Foundation (ANSF)) и Американского Фонда Гражданских Исследований и Развития (the U.S. Civilian Research & Development Foundation (CRDF)), грант 16089.

выше задач. В связи с этим необходима разработка информационной технологии, ориентированной на устранение влияния помехи на оценки нормированных корреляционных функций. Данная публикация посвящена одному из возможных вариантов решения этой проблемы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно, что нормированная автокорреляционная функция полезного сигнала $X(t)$ вычисляется по формуле [1, 2]

$$r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)/D(x). \tag{1}$$

Для вычисления оценок автокорреляционной функции $R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ и дисперсии $D(x)$ полезного сигнала $X(t)$ используются выражения

$$R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t), \tag{2}$$

$$D(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)X(i\Delta t), \tag{3}$$

где $\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x$; m_x — математическое ожидание $X(t)$.

Соответственно нормированная автокорреляционная функция зашумленного сигнала, состоящего из смеси случайного полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$,

$$g(t)=X(t)+\varepsilon(t), \tag{4}$$

вычисляется по формуле

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)/D(g). \tag{5}$$

При этом автокорреляционная функция $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ и дисперсия $D(g)$ зашумленного

сигнала $g(t)$ определяются из выражений

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{X}(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t))(\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)), \tag{6}$$

$$D(g)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{X}(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t))(\overset{\circ}{X}(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)), \tag{7}$$

где $g(t)=g(t)-m_g$; m_g — математическое ожидание $g(t)$.

Аналогично формула для вычисления оценок нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ имеет вид

$$r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)=R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)/\sqrt{D(x_1)D(x_2)}. \tag{8}$$

При этом взаимно корреляционная функция $R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ и дисперсии $D(x_1)$, $D(x_2)$ полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ определяются из выражений [1, 2]

$$R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{X}_2((i+\mu)\Delta t), \tag{9}$$

$$D(x_1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t), \tag{10}$$

$$D(x_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{X}_2(i\Delta t), \tag{11}$$

где $\overset{\circ}{X}_1(t)=X_1(t)-m_{x_1}$, $\overset{\circ}{X}_2(t)=X_2(t)-m_{x_2}$; m_{x_1}, m_{x_2} — математические ожидания.

Соответственно нормированная взаимно корреляционная функция зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$, состоящих из смеси случайных полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$,

$$g_1(t)=X_1(t)+\varepsilon_1(t), \tag{12}$$

$$g_2(t)=X_2(t)+\varepsilon_2(t), \tag{13}$$

вычисляется по формуле

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)/\sqrt{D(g_1)D(g_2)}\,. \tag{14}$$

При этом взаимно корреляционная функция $R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ и дисперсии $D(g_1)$, $D(g_2)$ зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$ определяются из выражений

$$R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+\mu)\Delta t)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t))(\overset{\circ}{X}_2((i+\mu)\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}_2((i+\mu)\Delta t)), \tag{15}$$

$$D(g_1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t))(\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t)), \tag{16}$$

$$D(g_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{X}_2(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}_2(i\Delta t))(\overset{\circ}{X}_2(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}_2(i\Delta t)), \tag{17}$$

где $\overset{\circ}{g}_1(t)=g_1(t)-m_{g_1}$, $\overset{\circ}{g}_2(t)=g_2(t)-m_{g_2}$; m_{g_1}, m_{g_2} — математические ожидания.

В [2] допускается, что между оценками автокорреляционной функции $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленного сигнала $g(t)$ и оценками автокорреляционной функции $R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ полезного сигнала $X(t)$, а также между оценками взаимно корреляционной функции $R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$ и оценками взаимно корреляционной функции $R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ выполняются неравенства [3–6]

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)\neq R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu), \tag{18}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)\neq R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \tag{19}$$

Считается, что устранить эти неравенства позволяет нормирование. Тогда между оценками нормированной автокорреляционной функции $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленного сигнала $g(t)$ и оценками нормированной автокорреляционной функции $r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ полезного сигнала $X(t)$, а также между оценками нормированной взаимно корреляционной функции $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$ и оценками нормированной взаимно корреляционной функции $r_{\overset{\circ}{X}_1 \overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ считаются справедливыми равенства [1, 2]

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) \approx r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu), \tag{20}$$

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) \approx r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \tag{21}$$

Однако, сравнивая выражения (1)–(3) с выражениями (5)–(7), а также выражения (8)–(11) с выражениями (14)–(17), можно заметить, что оценки нормированных авто- и взаимно корреляционных функций полезных сигналов значительно отличаются от оценок этих же функций зашумленных сигналов, т.е. [3–6]

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) \neq r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu), \tag{22}$$

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) \neq r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \tag{23}$$

Поэтому в данной работе ставится задача разработки технологий, позволяющих получить такие робастные оценки нормированных авто и взаимно корреляционных функций $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$, $r^R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$, которые обеспечили бы выполнение равенств

$$r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) \approx r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu), \tag{24}$$

$$r^R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) \approx r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \tag{25}$$

2. ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

При вычислении оценок нормированной корреляционной функции сталкиваемся с определенными трудностями.

Известно, что оценки автокорреляционной функции $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленного сигнала $g(t)$, состоящего из смеси случайного полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$, традиционно вычисляются по формуле [3–6]

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t) =$$

$$= R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu) + R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu) + R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{X}}(\mu) + R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu), \tag{26}$$

где взаимно корреляционная функция между полезным сигналом и помехой $R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu)$, взаимно корреляционная функция между помехой и полезным сигналом $R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{X}}(\mu)$ и автокорреляционная функция помехи $R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu)$ определяются из выраженийй

$$R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t), \tag{27}$$

$$R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{X}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}((i+\mu)\Delta t), \tag{28}$$

$$R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t). \tag{29}$$

При отсутствии корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\varepsilon(t)$, т.е.

$$R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu)\approx 0,\ R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{X}}(\mu)\approx 0 \tag{30}$$

формула (26) вычисления оценок автокорреляционной функции $R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленного сигнала $g(t)$ приобретает вид

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)+R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu). \tag{31}$$

Кроме того, учитывая, что значения $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$ и $\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)$ при $\mu\neq 0$ не коррелируют между собой, т.е.

$$\frac{1}{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+\mu)\Delta t)\approx 0 \text{ при } \mu\neq 0 \tag{32}$$

и среднее значение квадратов значений помехи равно оценке дисперсии помехи $\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)$

$$D(\varepsilon)=\frac{1}{N}\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t), \tag{33}$$

равенство (26) при $\mu=0$ и $\mu\neq 0$ можно соответственно записать в следующем виде:

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}(i\Delta t)=$$

$$=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu=0)+R_{\overset{\circ}{\varepsilon}\overset{\circ}{\varepsilon}}(\mu=0)=D(x)+D(\varepsilon)=D(g), \tag{34}$$

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0). \tag{35}$$

Из формул (34), (35) очевидно, что оценка корреляционной функции при $\mu=0$ содержит величину дисперсии $D(\varepsilon)$ помехи $\varepsilon(t)$ даже при выполнении классических условий (30), (32), (33). Чтобы устранить влияние величины дисперсии на оценки корреляционной функции, их, как правило, нормируют, используя формулы (1), (5). Тогда при нулевом временнóм сдвиге $\mu=0$ нормированные корреляционные функции полезного сигнала $X(t)$ и зашумленного сигнала $g(t)$, вычисляемые по формулам

$$r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu=0)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu=0)/D(x)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}(i\Delta t)=$$

$$=\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\right)\Big/\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\right)=1, \tag{36}$$

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)=R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)/D(g)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}(i\Delta t))\Big/\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\right)=1, \tag{37}$$

совпадают и равны единице

$$r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu=0)=r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu=0)=1. \tag{38}$$

При $\mu\neq 0$ оценки нормированных автокорреляционных функций зашумленного сигнала $g(t)$, вычисляемые по формулам

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)=R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)/D(g)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)/(D(x)+D(\varepsilon)), \tag{39}$$

отличаются от оценок нормированных автокорреляционных функций полезного сигнала $X(t)$

$$r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)=R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)/D(x) \tag{40}$$

на величину дисперсии помехи $D(\varepsilon)$ в знаменателе. Тогда оценки нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)$ зашумленного сигнала $g(t)$ всегда будут значительно меньше оценок нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)$ полезного сигнала $X(t)$:

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)<r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0). \tag{41}$$

Кроме того, учитывая, что нормированные оценки варьируют в интервале $-1\leq r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)\leq 1$, несмотря на незначительную величину абсолютной погрешности оценок нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)$ зашумленных сигналов

$$\Delta^a r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)=|r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)-r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)|=$$

$$=|R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)/(D(x)+D(\varepsilon))-R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)/D(x)|, \tag{42}$$

они могут иметь достаточную величину относительной погрешности

$$\Delta r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)=|r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)-r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)|/r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu\neq 0)=$$

$$=D(\varepsilon)/(D(x)+D(\varepsilon)), \tag{43}$$

которая зависит от дисперсии помехи $D(\varepsilon)$ и увеличивается с увеличением временно́го сдвига. При этом для $\mu\to\mu_{\max}$ оценки становятся соизмеримы с ошибками вычислений и проведение дальнейших расчетов нецелесообразно. Это ведет к неудовлетворительным результатам и не дает желаемого эффекта от применения нормированных корреляционных функций при решении перечисленных выше прикладных задач.

Формула для вычисления оценок взаимно корреляционных функций $R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$, состоящих из смеси случайных полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, имеет вид

$$R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+\mu)\Delta t)=$$

$$=R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)+R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)+R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)+R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu), \tag{44}$$

где взаимно корреляционная функция $R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)$ между полезным сигналом $X_1(t)$ и помехой $\varepsilon_2(t)$, взаимно корреляционная функция $R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ между помехой $\varepsilon_1(t)$ и полезным сигналом $X_2(t)$ и автокорреляционная функция $R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)$ помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ определяются из выражений:

$$R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{X}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}_2((i+\mu)\Delta t), \tag{45}$$

$$R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{X}_2((i+\mu)\Delta t), \tag{46}$$

$$R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}_2((i+\mu)\Delta t). \tag{47}$$

При выполнении условий некоррелированности

$$R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)\approx 0,\ R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)\approx 0,\ R_{\overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2}(\mu)\approx 0 \qquad (48)$$

формула (44) приобретает вид

$$R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)\approx R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \qquad (49)$$

Из выражения (49) следует, что при вычислении оценок взаимно корреляционных функций с соблюдением изложенных выше традиционных предположений (48) оценки $R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ и $R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ оказываются близкими величинами.

При этом формула (14) вычисления оценок нормированных взаимно корреляционных функций с учетом выражения (49) приобретает вид

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)/\sqrt{D(g_1)D(g_2)}=R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)/\sqrt{D(g_1)D(g_2)}. \qquad (50)$$

Оценки дисперсий $D(g_1)$, $D(g_2)$ зашумленных сигналов $g_1(t)$, $g_2(t)$, вычисляемые по формулам (16), (17), с учетом условий некоррелированности (48) и выражений (10), (11) для вычисления оценок дисперсий полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и дисперсий помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$

$$D(\varepsilon_1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}_1(i\Delta t), \qquad (51)$$

$$D(\varepsilon_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}_2(i\Delta t) \qquad (52)$$

имеют вид

$$D(g_1)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)=D(x_1)+D(\varepsilon_1), \qquad (53)$$

$$D(g_2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)=D(x_2)+D(\varepsilon_2). \qquad (54)$$

Тогда выражение (50) с учетом формул (53), (54) преобразовывается к виду

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)/\sqrt{D(g_1)D(g_2)}=$$

$$=R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)/\sqrt{(D(x_1)+D(\varepsilon_1))(D(x_2)+D(\varepsilon_2))}. \qquad (55)$$

Из выражения (55) следует, что оценки нормированной взаимно корреляционной функции $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ при всех временны́х сдвигах μ отличаются от оценок нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов на величины среднеквадратических отклонений $\sqrt{D(\varepsilon_1)}$, $\sqrt{D(\varepsilon_2)}$ помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ в знаменателе. При этом оценки нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ при всех временны̀х сдвигах μ, как и оценки нормированных автокорреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu\neq 0)$ при $\mu\neq 0$, всегда будут значительно меньше оценок нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)<r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu). \qquad (56)$$

Таким образом, возникает задача вычисления и исключения величин дисперсий помех $D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon_1)$, $D(\varepsilon_2)$ в (39), (55). Однако формулы вычисления оценок дисперсии помех (7), (16), (17) имеют лишь теоретический характер и непригодны для практического применения, так как дискретные значения отчетов помех $\varepsilon(i\Delta t)$, $\varepsilon_1(i\Delta t)$, $\varepsilon_2(i\Delta t)$ невозможно выделить из отчетов зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$, $g_1(i\Delta t)$, $g_2(i\Delta t)$ [3–6]. Отсюда возникает задача разработки информационной технологии для вычисления оценок дисперсий помех $D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon_1)$, $D(\varepsilon_2)$ зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$, $g_1(i\Delta t)$, $g_2(i\Delta t)$, которая позволила бы получить корректированные оценки нормированных корреляционных функций зашумленных сигналов, максимально приближающиеся к оценкам нормированных корреляционных функций полезных сигналов в результате исключения оценок дисперсий помех $D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon_1)$, $D(\varepsilon_2)$ в формулах (39), (55).

3. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ПОМЕХИ

В работах [3, 4] показано, что дисперсию помехи зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$ можно вычислить из выражений

$$D_\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{g}^2(i\Delta t)+\mathring{g}(i\Delta t)\mathring{g}((i+2)\Delta t)-2\mathring{g}(i\Delta t)\mathring{g}((i+1)\Delta t)]. \qquad (57)$$

Учитывая, что $g(i\Delta t)=X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)$, формулу (57) представим в виде

$$\begin{aligned}D_\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{&[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-2\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]+\\ &+[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)+\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+2)\Delta t)-2\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+1)\Delta t)]+\\ &+[\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-2\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]+\\ &+[\mathring{\varepsilon}^2(i\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+2)\Delta t)-2\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+1)\Delta t)]\}.\end{aligned} \qquad (58)$$

Если шаг дискретизации зашумленного сигнала выбран, исходя из спектра помехи, т.е. $\Delta t=\Delta t_\varepsilon$, то тогда имеют место следующие равенства [1, 2]:

$$\mathring{X}(i\Delta t)\approx\mathring{X}((i+1)\Delta t)\approx\mathring{X}((i+2)\Delta t), \qquad (59)$$

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P\Bigg\{ &\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-\\ &-2\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]\approx 0\Bigg\}=1,\end{aligned} \qquad (60)$$

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-2\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]\approx 0\right\}=1. \quad (61)$$

Можно считать, что результаты вычислений первой и второй скобок в (58) равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-2\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]\approx 0,\\ &\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}(i\Delta t)+\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+2)\Delta t)-2\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)\mathring{X}((i+1)\Delta t)]\approx 0.\end{aligned} \qquad (62)$$

Также, учитывая, что между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ отсутствует корреляция, предположим, что имеют место приближенные равенства

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}(i\Delta t)]\approx 0,\quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+2)\Delta t)]\approx 0,\\ &\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[2\mathring{X}(i\Delta t)\mathring{\varepsilon}((i+1)\Delta t)]\approx 0.\end{aligned} \qquad (63)$$

Результат вычисления второй скобки в (58) также можно считать равным нулю, т.е.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)+\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+2)\Delta t)-2\overset{\circ}{X}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+1)\Delta t)]\approx 0. \quad (64)$$

Принимая во внимание, что между $\varepsilon(i\Delta t)$, $\varepsilon(i+1)\Delta t$ и $\varepsilon(i+2)\Delta t$ также отсутствует корреляция, т.е.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+2)\Delta t)]\approx 0,\\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}[2\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}((i+1)\Delta t)]\approx 0,\end{cases} \quad (65)$$

можно считать, что результаты вычислений четвертой скобки в (58) будут равны оценке дисперсии помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, т.е.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i+2)\Delta t-2\overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t)\overset{\circ}{\varepsilon}(i+1)\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{\varepsilon}{}^2(i\Delta t)=D_\varepsilon. \quad (66)$$

4. ТЕХНОЛОГИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РОБАСТНЫХ ОЦЕНОК НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Ниже покажем, что с помощью вычисленных оценок величин дисперсий помех D_ε, D_{ε_1}, D_{ε_2} можно получить робастные оценки нормированных корреляционных функций. Определим робастные оценки нормированных автокорреляционных функций, вычислив следующие оценки:

1) автокорреляционной функции центрированного зашумленного сигнала $\overset{\circ}{g}(t)$

$$R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t),\ \overset{\circ}{g}(t)=g(t)-m_g; \quad (67)$$

2) нормированной автокорреляционной функции

$$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)/D(g)=\frac{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t))}{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}(i\Delta t);}; \quad (68)$$

3) величину дисперсии D_ε помехи $\varepsilon(i\Delta t)$

$$D_\varepsilon=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t)+\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)-2\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)]; \quad (69)$$

4) робастные оценки нормированной автокорреляционной функции при $\mu\neq 0$

$$r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)/(D(g)-D_\varepsilon), \quad (70)$$

где

$$D(g)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}{}^2(i\Delta t), \quad (71)$$

или

$$r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)=\frac{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+\mu)\Delta t)}{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}[2\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+1)\Delta t)-\overset{\circ}{g}(i\Delta t)\overset{\circ}{g}((i+2)\Delta t)]}; \quad (72)$$

5) робастные оценки нормированной автокорреляционной функции при $\mu = 0$

$$r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu = 0) = 1. \qquad (73)$$

Технология определения робастных оценок нормированных взаимно корреляционных функций состоит в вычислении следующих оценок:

1) взаимно корреляционной функции зашумленных сигналов $\overset{\circ}{g}_1(t)$, $\overset{\circ}{g}_2(t)$

$$R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+\mu)\Delta t),$$
$$\overset{\circ}{g}_1(t) = g_1(t) - m_g,\ \overset{\circ}{g}_2(t) = g_2(t) - m_{g_2}; \qquad (74)$$

2) нормированной взаимно корреляционной функции

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) = R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)/\sqrt{D(g_1)D(g_2)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+\mu)\Delta t)}{\sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\right)}}; \qquad (75)$$

3) дисперсии D_{ε_1} помехи $\varepsilon_1(i\Delta t)$

$$D_{\varepsilon_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t) + \overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1((i+2)\Delta t) - 2\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1((i+1)\Delta t)]; \qquad (76)$$

4) дисперсии D_{ε_2} помехи $\varepsilon_2(i\Delta t)$

$$D_{\varepsilon_2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t) + \overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+2)\Delta t) - 2\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+1)\Delta t)]; \qquad (77)$$

5) робастные оценки нормированной взаимно корреляционной функции при всех μ

$$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) = R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)/\sqrt{(D(g_1) - D_{\varepsilon_1})}\sqrt{(D(g_2) - D_{\varepsilon_2})}, \qquad (78)$$

где

$$D(g_1) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t),\ D(g_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t) \qquad (79)$$

или

$$r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+\mu)\Delta t)}{A(g_1)A(g_2)}, \qquad (80)$$

$$A(g_1) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[2\overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1((i+1)\Delta t) - \overset{\circ}{g}_1(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_1((i+2)\Delta t)]},$$

$$A(g_2) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[2\overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+1)\Delta t) - \overset{\circ}{g}_2(i\Delta t)\overset{\circ}{g}_2((i+2)\Delta t)]}.$$

5. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для проверки эффективности технологии вычисления робастных корреляционных функций проведены вычислительные эксперименты с использованием MATLAB.

Для оценок автокорреляционных функций формировались полезные сигналы $X(t)$, помехи $\varepsilon(t)$ и зашумленные сигналы $g(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)$ с заданными характеристиками. Для каждого $X(t)$ проверялось условие постоянства математического ожидания на различных временны́х интервалах $T_1, T_2, \ldots, T_n$, т.е. выполнение равенства

$$m_x(T_1) \approx m_x(T_2) \approx \ldots \approx m_x(T_n) \approx m_x \quad (81)$$

или неравенства

$$m_x(T_1) \neq m_x(T_2) \neq \ldots \neq m_x(T_n) \neq m_x. \quad (82)$$

Затем из выражений (1), (3), (68)–(73) вычислялись оценки нормированных автокорреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ полезного $X(t)$ и зашумленного $g(t)$ сигналов, величина дисперсии D_ε помехи $\varepsilon(t)$, робастные оценки нормированной автокорреляционной функции $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ и проводился сравнительный анализ:

1) величины относительных погрешностей оценок нормированных автокорреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ зашумленных сигналов $g(t)$ определялись из выражения

$$\Delta r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}} = |r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}| \,/\, |r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)| \cdot 100\,\%; \quad (83)$$

2) величины относительных погрешностей робастных оценок нормированных автокорреляционных функций $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ — из выражения

$$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu) = |r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)| \,/\, |r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)| \cdot 100\,\%. \quad (84)$$

При вычислительных экспериментах для оценок взаимно корреляционных функций формировались полезные сигналы $X_1(t)$, $X_2(t)$, помехи $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ и зашумленные сигналы $g_1(i\Delta t) = X_1(t) + \varepsilon_1(t)$, $g_2(i\Delta t) = X_2(t) + \varepsilon_2(t)$ с заданными характеристиками. Для каждого $X_1(t)$, $X_2(t)$ проверялось условие постоянства математического ожидания на различных временны́х интервалах $T_1, T_2, \ldots, T_n$, т.е. выполнение равенств

$$m_{x_1}(T_1) \approx m_{x_1}(T_2) \approx \ldots \approx m_{x_1}(T_n) \approx m_{x_1}, \quad (85)$$

$$m_{x_2}(T_1) \approx m_{x_2}(T_2) \approx \ldots \approx m_{x_2}(T_n) \approx m_{x_2} \quad (86)$$

или неравенств

$$m_{x_1}(T_1) \neq m_{x_1}(T_2) \neq \ldots \neq m_{x_1}(T_n) \neq m_{x_1}, \quad (87)$$

$$m_{x_2}(T_1) \neq m_{x_2}(T_2) \neq \ldots \neq m_{x_2}(T_n) \neq m_{x_2}. \quad (88)$$

Затем из выражений (8), (10), (11), (75)–(80) вычислялись оценки нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ полезных и зашумленных сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$; величины дисперсий D_{ε_1}, D_{ε_2} помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$; робастные оценки нормированной взаимно корреляционной функции $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ и проводился сравнительный анализ:

1) величины относительных погрешностей оценок нормированных взаимно корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов определялись из выражения

$$\Delta r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu) = |r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)| \,/\, |r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)| \cdot 100\,\%\;; \quad (89)$$

2) величины относительных погрешностей робастных оценок нормированных взаимно корреляционных функций $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$ — из выражения

$$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu) = |r^R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu) - r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)| \,/\, |r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)| \cdot 100\,\%. \quad (90)$$

5.1. Результаты вычислительных экспериментов для оценок нормированных автокорреляционных функций.

Первый вариант. Полезный сигнал $X(t)$ сформирован в виде суммы гармонических колебаний и для него соблюдаются классические условия (81). Помеха подчиняется различным законам распределения с математическим ожиданием $m_\varepsilon \approx 0$.

Эксперимент 1. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 100$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с дисперсией $D(\varepsilon) \approx 90$. Таким образом, созданы полезный сигнал и помеха, которые подчиняются классическим условиям.

Эксперимент 2. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5i\Delta t) + 120$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется биноминальному закону распределения с дисперсией $D(\varepsilon) \approx 130$.

Эксперимент 3. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5i\Delta t) + \sin(10i\Delta t) + 100$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется экспоненциальному закону распределения с $D(\varepsilon) \approx 229$.

Эксперимент 4. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5i\Delta t) + 3\sin(2i\Delta t) + 115$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется бета-распределению с $D(\varepsilon) \approx 136$.

Эксперимент 5. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5i\Delta t) + 3\sin(2i\Delta t) + 115$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется гамма-распределению с $D(\varepsilon) \approx 52$.

Второй вариант. Полезный сигнал $X(t)$ сформирован в виде суммы гармонических колебаний и для него нарушается условие постоянства математического ожидания (81) и выполняются неравенства (82). Закон распределения помехи $\varepsilon(t)$ отличается от нормального, математическое ожидание $m_\varepsilon \approx 0$. Таким образом, для полезного сигнала и помехи нарушаются классические условия.

Эксперимент 6. Полезный сигнал $X(i\Delta t) = 50\sin(i\Delta t) + 5\cos(0{,}5i\Delta t) + 2\sin(i\Delta t) + 5\cos(13i\Delta t) + 15$. Помеха $\varepsilon(t)$ подчиняется логнормальному распределению с $D(\varepsilon) \approx 665$.

Результаты вычислений для экспериментов 1 и 6 представлены в табл. 1. Аналогичные результаты получены и для экспериментов 2–5.

Таблица 1

Эксперимент	$\mu = i\Delta t$	$r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$	$r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$	$r^{R}_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$	$\Delta r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$	$\Delta r^{R}_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$
	0	1	1	1	0	0
	Δt	0,9995	0,9014	0,9914	9,814	0,8115
	$2\Delta t$	0,998	0,8936	0,9828	10,4641	1,5265
	$3\Delta t$	0,9956	0,8982	0,9879	9,7756	0,7692
№ 1 $D(\varepsilon) = 89{,}7642$ $D_\varepsilon = 80{,}6617$	$4\Delta t$	0,9921	0,8898	0,9786	10,3116	1,3587
	$5\Delta t$	0,9877	0,8861	0,9746	10,2834	1,3277
	$6\Delta t$	0,9823	0,8878	0,9764	9,6176	0,5954
	$7\Delta t$	0,9759	0,8778	0,9654	10,0523	1,0735
	$8\Delta t$	0,9686	0,8727	0,9598	9,8999	0,9059
	$9\Delta t$	0,9603	0,8711	0,9581	9,2873	0,2322
	0	1	1	1	0	0
	Δt	0,9915	0,7713	0,9938	22,2141	0,2278
	$2\Delta t$	0,9701	0,7664	0,9875	20,9924	1,8019
	$3\Delta t$	0,9457	0,7496	0,9658	20,7376	2,1302
№ 6 $D(\varepsilon) = 106{,}59$ $D_\varepsilon = 101{,}35$	$4\Delta t$	0,9294	0,7479	0,9637	19,5237	3,6944
	$5\Delta t$	0,9277	0,725	0,9342	21,8451	0,7033
	$6\Delta t$	0,9394	0,7325	0,9438	22,0279	0,4677
	$7\Delta t$	0,956	0,7573	0,9758	20,7912	2,0612
	$8\Delta t$	0,9664	0,7573	0,9758	21,6355	0,9734
	$9\Delta t$	0,9617	0,7543	0,9719	21,5688	1,0592

5.2. Результаты вычислительных экспериментов для оценок нормированных взаимно корреляционных функций.

Первый вариант. Полезные сигналы $X_1(t)$, $X_2(t)$ сформированы в виде суммы гармонических колебаний и для них выполняются классические условия (85), (86). Помехи $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ подчиняются различным законам распределения с математическими ожиданиями $m_{\varepsilon_1} \approx 0$, $m_{\varepsilon_2} \approx 0$.

Эксперимент 7. Полезные сигналы $X_1(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 100$, $X_2(i\Delta t) = 40\sin(1{,}15 i\Delta t) + 200$. Помехи $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ подчиняются нормальному распределению с дисперсиями $D(\varepsilon_1) \approx 89{,}76$, $D(\varepsilon_2) \approx 430$. Таким образом, созданы полезные сигналы и помехи, которые подчиняются классическим условиям (32), (33), (48), (85), (86).

Эксперимент 8. Полезные сигналы $X_1(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 100$, $X_2(i\Delta t) = 40\sin(1 \cdot i\Delta t) + 25\cos(0{,}5 i\Delta t) + 120$. Помеха $\varepsilon_1(t)$ подчиняется биноминальному закону распределения с $D(\varepsilon_1) \approx 130{,}5$, помеха $\varepsilon_2(t)$ — нормальному с $D(\varepsilon_2) \approx 359$.

Эксперимент 9. Полезные сигналы $X_1(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5 i\Delta t) + \sin(10 i\Delta t) + 100$, $X_2(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 100$. Помеха $\varepsilon_1(t)$ подчиняется экспоненциальному закону распределения с $D(\varepsilon_1) \approx 228{,}6$, помеха $\varepsilon_2(t)$ — нормальному с $D(\varepsilon_2) \approx 359$.

Эксперимент 10. Полезные сигналы $X_1(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5 i\Delta t) + 3\sin(2 i\Delta t) + 115$, $X_2(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + \sin(10 i\Delta t) + 100$. Помеха $\varepsilon_1(t)$ подчиняется гамма-распределению с $D(\varepsilon_1) \approx 52{,}6$, помеха $\varepsilon_2(t)$ — биноминальному с $D(\varepsilon_2) \approx 123$.

Второй вариант. Полезные сигналы $X_1(t)$, $X_2(t)$ сформированы в виде суммы гармонических колебаний и для них не выполняются условия постоянства математических ожиданий (85), (86), т.е. выполняются неравенства (87), (88). Законы распределения помех $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ отличаются от нормального закона.

Эксперимент 11. Полезные сигналы $X_1(i\Delta t) = 50\sin(i\Delta t) + 5\cos(0{,}5 i\Delta t) + 2\sin(i\Delta t) + 5\cos(13 i\Delta t) + 15$,
$X_2(i\Delta t) = 40\sin(i\Delta t) + 25\cos(0{,}5 i\Delta t) + 3\sin(2 i\Delta t) + 115$. Для полезного сигнала $X_1(t)$ нарушено условие (85). Помеха $\varepsilon_1(t)$ подчиняется экспоненциальному распределению с $D(\varepsilon_1) \approx 228{,}64$, помеха $\varepsilon_2(t)$ — гамма-распределению с $D(\varepsilon_2) \approx 52{,}6$.

Результаты вычислений для экспериментов 7 и 11 представлены в табл. 2. Аналогичные результаты получены и для экспериментов 8–10.

Таблица 2

Эксперимент	$\mu = i\Delta t$	$r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$	$r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$	$r^R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$	$\Delta r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$	$\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$
№ 7 $D(\varepsilon_1) = 89{,}76$; $D_{\varepsilon_1} = 81{,}41$ $D(\varepsilon_2) = 429{,}9$; $D_{\varepsilon_2} = 368{,}75$	0	0,8283	0,6107	0,7779	26,2702	6,0869
	Δt	0,8245	0,6261	0,7975	24,0634	3,2759
	$2\Delta t$	0,8206	0,6055	0,7713	26,2078	6,0073
	$3\Delta t$	0,8166	0,6038	0,769	26,0655	5,826
	$4\Delta t$	0,8126	0,6101	0,7771	24,9205	4,3677
	$5\Delta t$	0,8084	0,5919	0,7539	26,7841	6,7414
	$6\Delta t$	0,8043	0,6003	0,7647	25,3553	4,9214
	$7\Delta t$	0,8	0,5925	0,7547	25,9421	5,6689
	$8\Delta t$	0,7957	0,5965	0,7598	25,032	4,5097
	$9\Delta t$	0,7913	0,5817	0,7409	26,4951	6,3733
№ 11 $D(\varepsilon_1) = 228{,}64$; $D_{\varepsilon_1} = 225{,}9$ $D(\varepsilon_2) = 51$; $D_{\varepsilon_2} = 46{,}11$	0	0,889	0,815	0,8958	8,3156	0,7633
	Δt	0,8889	0,8125	0,893	8,5867	0,4653
	$2\Delta t$	0,8885	0,8177	0,8986	7,9755	1,137
	$3\Delta t$	0,888	0,8127	0,8932	8,4801	0,5825
	$4\Delta t$	0,8873	0,8164	0,8972	7,9904	1,1207
	$5\Delta t$	0,8863	0,8095	0,8896	8,6735	0,3698
	$6\Delta t$	0,8852	0,8114	0,8918	8,3321	0,7451
	$7\Delta t$	0,8838	0,8053	0,8851	8,8814	0,1415
	$8\Delta t$	0,8823	0,8033	0,8829	8,9437	0,0729
	$9\Delta t$	0,8805	0,8033	0,8828	8,7648	0,2695

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате сравнительного анализа полученных результатов сделаны выводы.

• Оценки дисперсий помех D_ε, D_{ε_1}, D_{ε_2} зашумленных сигналов $g(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, вычисленные из выражений (69), (76), (77), практически совпадают с заданными оценками дисперсий $D(\varepsilon)$, $D(\varepsilon_1)$, $D(\varepsilon_2)$ помех $\varepsilon(t)$, $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ (см. табл. 1, 2, столбец 1):

$$D_\varepsilon \approx D(\varepsilon),\; D_{\varepsilon_1} \approx D(\varepsilon_1),\; D_{\varepsilon_2} \approx D(\varepsilon_2). \tag{91}$$

• Оценки нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов сильно отличаются от оценок нормированной корреляционной функции $r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, т.е. выполняются неравенства (22), (23) (см. табл. 1, 2, столбцы 3, 4).

• Величины относительных погрешностей $\Delta r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\Delta r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ оценок нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ зашумленных сигналов, вычисленные из выражений (83), (89), колеблются в различных экспериментах от 8 до 30 % и выше (см. табл. 1, 2, столбец 6).

• Робастные оценки нормированных корреляционных функций $r^R_{\overset{\circ}{g}\overset{\circ}{g}}(\mu)$, $r^R_{\overset{\circ}{g}_1\overset{\circ}{g}_2}(\mu)$ практически совпадают с оценками нормированных корреляционных функций $r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ полезных сигналов $X(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$, т.е. выполняются равенства (24), (25) (см. табл. 1, 2, столбцы 3, 5).

• Величины относительных погрешностей $\Delta r_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\Delta r_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$ робастных оценок нормированных корреляционных функций $\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}}(\mu)$, $\Delta r^R_{\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2}(\mu)$, вычисленные из выражений (84), (90), практически равны нулю или уменьшаются с 26–30 % до 5–6 % даже в том случае, когда нарушаются классические условия (см. табл. 1, 2, столбец 7).

Таким образом, применение разработанной робастной технологии позволяет получить робастные оценки нормированных авто- и взаимно корреляционных функций, причем предлагаемая технология обеспечивает робастность оценок даже в таком непростом случае, когда классические условия не выполняются ни для полезных сигналов, ни для помех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 572 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. — М.: Мир, 1983. — 312 с.
3. Aliev T. Digital noise monitoring of defect origin. — London: Springer-Verlag, 2007. — 235 p.
4. Aliev T. Robust technology with analysis of interference in signal processing. — New York: Kluwer Academ. Plenum Publ., 2003. — 199 p.
5. Musaeva N.F. Methodology of calculating robustness as an estimator of the statistical characteristics of a noisy signal // Automat. Contr. and Comput. Sci. — 2005. — **39**, N 5. — P. 53–62.
6. Musaeva N.F. Robust correlation coefficients as initial data for solving a problem of confluent analysis // Ibid. — 2007. — N 2. — P. 76–87.

Поступила 17.03.2009