

## ВЕРИФИКАЦИЯ КОММУНИКАЦИОННЫХ СТРУКТУР ГИПЕРКУБА ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СЕТЯМИ ПЕТРИ<sup>1</sup>

**Ключевые слова:** *коммуникационная структура, гиперкуб, маршрутизатор, параметрическая сеть Петри, линейный инвариант, тупик.*

### ВВЕДЕНИЕ

Поскольку число коммуникационных устройств и топология сети существенно варьируются в реальных телекоммуникационных сетях, необходима методика, применимая к произвольному числу устройств, которые образуют некоторую произвольную структуру.

А. Маршан [1] начал изучение сетей Петри, построенных как повторение базового компонента для оценки производительности CSMA/CD сетей с общей шиной. Им построена линейная структура, но методика анализа для произвольного числа компонентов не была представлена. В [2] параметрическая композиция функциональных сетей Петри [3] применена для анализа линейных структур взаимодействующих устройств. Более простой подход [4] применен к древовидным структурам для верификации протоколов коммутируемой Ethernet.

Цель настоящей статьи — обобщение подхода [4] на коммуникационные структуры гиперкуба произвольного размера с произвольным числом измерений. В [4] построена типовая модель Ethernet коммутатора с принудительной буферизацией кадров (store-and-forward), которая использована для композиции древовидной структуры. Поскольку таблицы коммутации (маршрутизации) не представлены в модели [4], одна и та же модель может описывать как коммутаторы, так и маршрутизаторы. В настоящей статье использована ее модификация в качестве обобщенной модели коммуникационного устройства для композиции коммуникационной структуры гиперкуба (КСГК). Отличие составляет количество портов и размещение портов на гранях гиперкуба для последующей композиции коммуникационных структур гиперкуба. Направлением дальнейших исследований является обобщение полученных результатов на произвольные структуры и моделирование устройств с прямой передачей кадров между портами (cut-through). Областью приложения результатов являются вычисления на решетках. Предварительно результаты представлены на семинаре УКРЕW2008 [5].

Для анализа свойств параметрических сетей Петри использованы линейные инварианты [6]. В соответствии с [7, 8] идеальная модель телекоммуникационной системы должна быть ограниченной, живой и консервативной сетью Петри. Однако  $t$ -инварианты не позволяют доказать живость сети. Поэтому для доказательства того, что модель неживая из-за возникновения тупиков, введены специальные графы.

### 1. МОДЕЛЬ КОММУНИКАЦИОННОГО УСТРОЙСТВА

Коммуникационное устройство сети с коммутацией пакетов, такое как коммутатор или маршрутизатор, состоит из конечного числа портов и осуществляет перенаправление прибывшего (через некоторый порт) пакета в порт назначения. Для вычисления номера порта назначения используется информация из заголовка пакета и адресных таблиц маршрутизации (коммутации). Устройство реализует принудительную буферизацию пакетов в своем внутреннем буфере либо прямую передачу пакетов между портами. Даже устройства с прямой передачей используют буферизацию, когда порт назначения занят. Порт работает в полнодуплексном режиме, обеспечивая два канала: для получения и для отправки пакетов. Кроме того, порты имеют свои собственные буферы для каждого канала, как правило, с емкостью, необходимой для хранения одного пакета.

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом НАТО ICS.NUKR.CLG982698.

Настоящая статья абстрагируется от заголовков пакетов и адресных таблиц и рассматривает только устройства с принудительной буферизацией пакетов. Все емкости накопителей измеряются количеством пакетов.

Рассмотрим пространство размерности  $d$ , где  $d = 1, 2, \dots$ . Каждое коммуникационное устройство представлено гиперкубом единичного размера в  $d$ -мерном пространстве. Коммуникационная структура, образованная соединенными коммуникационными устройствами, представляет собой гиперкуб размера  $k$ , где  $k = 1, 2, \dots$ . Следовательно, общее число устройств составляет  $N_{\text{dev}} = k^d$ . Каждое устройство  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  имеет свой индекс  $(i_1, i_2, \dots, i_d)$ , где  $i_u = \overline{1, k}$ ,  $u = \overline{1, d}$ . Модель коммуникационной структуры гиперкуба обозначена  $H_{d, k}$ . Далее опишем модель устройства в виде сети Петри, а затем композицию модели коммуникационной структуры через соединения устройства со своими соседями.

Модель устройства гиперкуба обозначим  $H_{d, 1}$  (количество измерений равно  $d$ , а размер структуры равен единице). На каждой грани устройства  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  в  $d$ -мерном пространстве размещен порт. Следовательно, каждое устройство имеет  $N_{\text{port}} = 2 \cdot d$  портов; два порта для каждого измерения размещены на противоположных гранях гиперкуба. Для обозначения противоположных граней измерения  $j$  ( $j = 1, d$ ) использован номер направления. Направление обозначено переменной  $n$ ; значение  $n = 1$  использовано для направления к нулю по соответствующему измерению, а значение  $n = 2$  использовано для противоположного направления к бесконечности. Следовательно, порты могут быть обозначены с помощью следующих индексов  $port_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ , где  $i_u = \overline{1, k}$ ,  $u = \overline{1, d}$ ,  $j = \overline{1, d}$ ,  $n = 1, 2$ . Каждый порт представлен двумя каналами (входной, выходной), каждый канал представлен парой позиций: одна — для буфера пакетов, другая — для емкости буфера. Следовательно, каждый порт устройства  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  представлен четырьмя следующими контактными позициями:

- $pi_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  — входной буфер пакетов;
- $pil_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  — емкость входного буфера (равна единице);
- $po_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  — выходной буфер пакетов;
- $pol_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  — емкость выходного буфера (равна единице).

Внутренняя часть устройства содержит  $N_{\text{port}} + 1$  следующих позиций. Пакеты, перенаправленные в порт  $port_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ , хранятся в соответствующей позиции  $pb_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ , и одна позиция  $pbl^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  содержит емкость внутреннего буфера, где  $j' = \overline{1, d}$ ,  $n' = 1, 2$ . Заметим, что внутренний буфер представлен множеством позиций  $pb_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  (одна позиция для каждого порта) для различия номера порта назначения, который задается  $j', n'$ .

Переходы модели устройства  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  обеспечивают перенаправление входных пакетов из позиции входного буфера порта  $pi_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  в одну из позиций внутреннего буфера  $pb_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,  $j' \neq j$ ,  $n' \neq n$ , а затем передачу пакетов из позиции внутреннего буфера  $pb_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  в позицию выходного буфера порта назначения  $po_{j', n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ . Кроме того, следует учитывать емкости буферов: проверить и уменьшить размер буфера при записи пакета в буфер; увеличить размер буфера при извлечении пакета из буфера. Следовательно, каждый порт  $port_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  устройства  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  содержит  $N_{\text{port}} = (N_{\text{port}} - 1) + 1$  переходов, один из которых предназначен для выходного канала  $to_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  с входными дугами из позиций  $pb_{j, n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,

$pol_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  и выходными дугами в позиции  $po_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,  $pbl_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ;  $N_{port} - 1$  переходов  $ti_{j,n,j',n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,  $j' = \overline{1, d}$ ,  $n' = 1, 2$ ,  $j' \neq j$ ,  $n' \neq n$ , предназначены для входного канала с входными дугами из позиций  $pi_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,  $pbl_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  и выходными дугами в позиции  $pb_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ ,  $pil_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}$ .

Формальное параметрическое описание модели  $H_{d,1}$  следующее:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (ti_{j,n,j',n'}: pi_{j,n}, pbl \rightarrow pb_{j',n'}, pil_{j,n}), \\ j' = \overline{1, d}, n' = \overline{1, 2}, j' \neq j, n' \neq n; \\ (to_{j,n}: pb_{j,n}, pol_{j,n} \rightarrow po_{j,n}, pbl) \end{array} \right), j = \overline{1, d}, n = \overline{1, 2} \right). \quad (1)$$

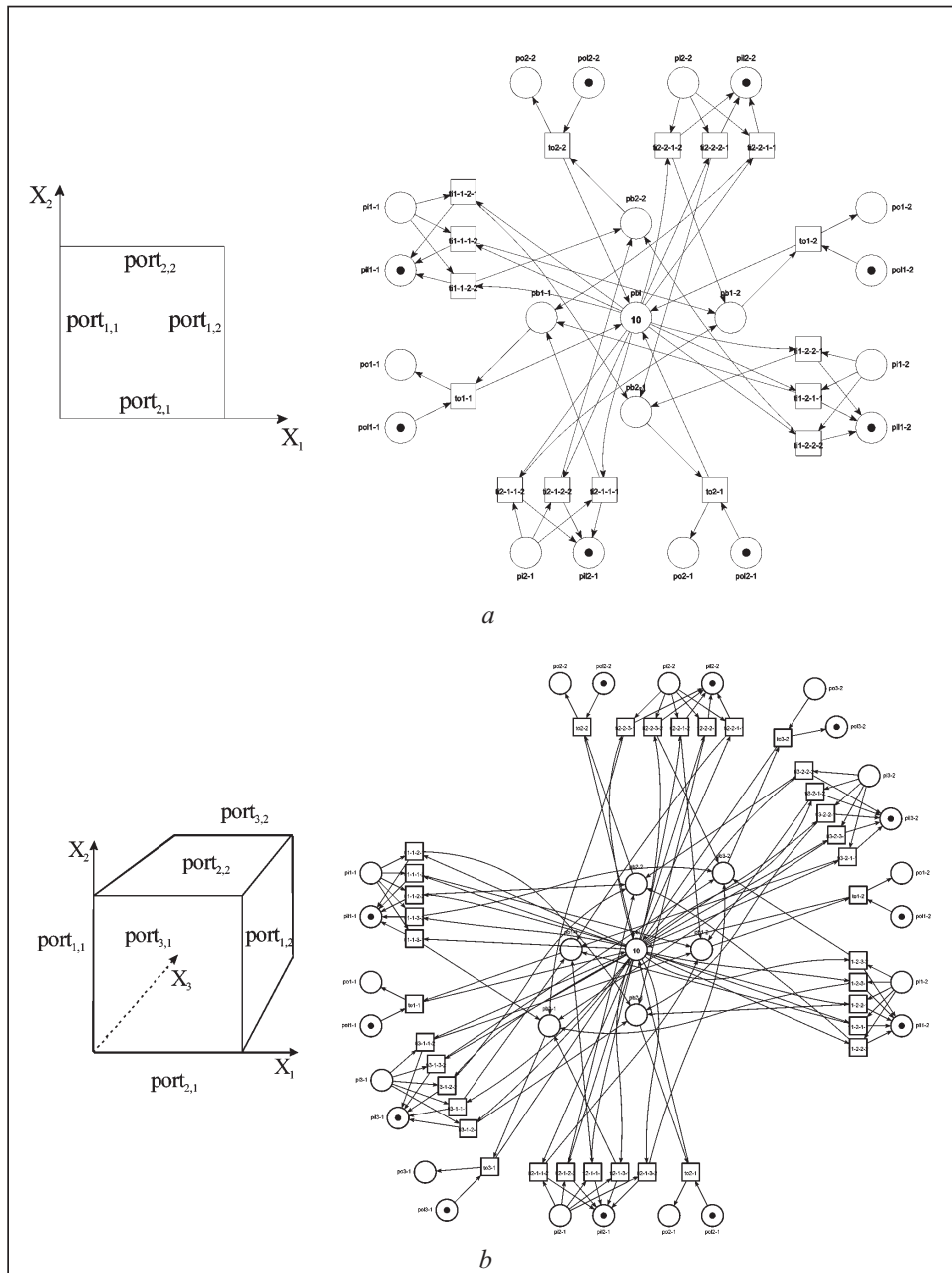


Рис. 1. Примеры параметрических моделей  $H_{2,1}$  (а) и  $H_{3,1}$  (б)

Если  $H_{d,1}$  рассматривается как модель устройства  $R^{i_1, i_2, \dots, i_d}$  в структуре гиперкуба, то следует добавить индексы соответствующей ячейки гиперкуба:

$$\left( \left( \begin{array}{l} (ti_{j,n,j',n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d} : pi_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}, pbl_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d} \rightarrow pi_{j',n'}^{i_1, i_2, \dots, i_d}, pil_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}), \\ j' = \overline{1, d}, n' = 1, 2, j' \neq j, n' \neq n; \\ (to_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d} : pb_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}, pol_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d} \rightarrow po_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}, pbl_{j,n}^{i_1, i_2, \dots, i_d}) \end{array} \right), j = \overline{1, d}, n = \overline{1, 2} \right).$$

Обозначим переходы в виде

$$t : px_1, \dots, px_u \rightarrow py_1, \dots, py_v,$$

широко используемом для сетей Петри, например в системе Тіпа [9]. Это означает, что переход  $t$  имеет входящие дуги из позиций  $px_1, \dots, px_u$  и исходящие дуги в позиции  $py_1, \dots, py_v$ , где  $u, v$  — число входных и выходных позиций соответственно. В случае необходимости могут быть добавлены кратности дуг с использованием обозначений вида  $p_i * l$ , где  $l$  — кратность соответствующих дуг, соединяющих  $p_i$  и  $t$ .

Модель, представленная формулой (1), названа параметрической сетью Петри, поскольку ее описание содержит параметр  $d$  для вычисления индексов элементов. Число измерений модели  $H_{d,1}$  неограничено и представлено параметром  $d$ .

Параметрическая модель  $H_{d,1}$  проиллюстрирована примерами, представленными на рис. 1, для конкретных чисел измерений  $d = 2, 3$ . Представить визуализацию модели для большего числа измерений достаточно сложно.

## 2. $p$ -ИНВАРИАНТЫ МОДЕЛИ КОММУНИКАЦИОННОГО УСТРОЙСТВА

Используя параметрическое описание (1) модели коммуникационного устройства  $H_{d,1}$ , полученное в разд. 1, была построена следующая система для вычисления  $p$ -инвариантов:

$$\begin{cases} to_{j,n} : xpb_{j,n} + xpol_{j,n} = xpo_{j,n} + xpbl, \\ ti_{j,n,j',n'} : xpi_{j,n} + xpbl = xpb_{j',n'} + xpil_{j,n}, \\ j = \overline{1, d}, n = 1, 2, j' = \overline{1, d}, n' = 1, 2, j' \neq j, n' \neq n. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что эта система имеет параметрическую форму. Ее параметром является число измерений  $d$ . Система построена непосредственно по описанию (1) с использованием правила [6], согласно которому каждое уравнение соответствует переходу и содержит равные суммы для его входящих и исходящих дуг. Суммы должны быть вычислены с использованием кратностей дуг, но все дуги (1) имеют кратность, равную единице.

Общее число уравнений системы (2) составляет  $N_{d,1}^t = 4 \cdot d^2$  и общее число переменных системы (2) составляет  $N_{d,1}^p = 10 \cdot d + 1$ .

Для изучения  $p$ -инвариантов модели для произвольного числа измерений система (2) должна быть решена в параметрической форме. Полученное параметрическое решение системы (2) имеет вид

$$\left( \begin{array}{l} (pi_{j,n}, pil_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2; \\ (po_{j,n}, pol_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2; \\ (pbl, (pb_{j,n}, j = \overline{1, d}, n = 1, 2)); \\ ((pb_{j,n}, pi_{j,n}, po_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2); \\ (pbl, ((pil_{j,n}, pol_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2)) \end{array} \right). \quad (3)$$

Способ представления решений является достаточно распространенным для разреженных векторов, особенно в теории сетей Петри. В (3) указаны только ненулевые компоненты посредством имен соответствующих позиций. Ненулевой множитель единица опущен. В случае, если множитель не равен единице, используется обозначение вида  $p \cdot x$ , где  $x$  — значение инварианта позиции  $p$ . Такие обозначения приняты в системе Tina [9], которая использована для получения изображений сетей Петри в настоящей статье. Строка матрицы (3) задает множество строк в соответствии со значениями использованных индексов  $j, n$ , за исключением последних трех строк, которые содержат переменное число компонентов, заданных индексами.

Для построения матрицы (3) применяется эвристический алгоритм, но далее представлено доказательство того, что (3) является решением (1). Тот факт, что (3) является базисным решением, не требуется для вывода относительно  $p$ -инвариантности  $H_{d,1}$ . Общее число решений (строк) в матрице (3) равно  $N_{d,1}^{pinv} = 4d + 3$ .

**Лемма 1.** Каждая строка матрицы (3) является решением системы (2).

**Доказательство.** Подставим каждую параметрическую строку матрицы (3) в каждое параметрическое уравнение системы (2), в результате получим корректные равенства. При подстановке выбраны различные имена индексов. Например, подставим четвертую строку (3)

$$((pb_{l,m}, pi_{l,m}, po_{l,m}), l = \overline{1, d}, m = 1, 2)$$

во второе уравнение (2)

$$xpi_{j,n} + xpb_{l,m} = xpb_{j',n'} + xpil_{j,n}, \\ j = \overline{1, d}, n = 1, 2, j' = \overline{1, d}, n' = 1, 2, j' \neq j, n' \neq n.$$

Для каждого конкретного уравнения, заданного допустимым кортежем  $(j, n, j', n')$ , решение содержит  $pi_{j,n}$  при  $l = j, m = n$  и  $pb_{j',n'}$  при  $l = j', m = n'$  (другие переменные уравнения  $xpb_{l,m}, xpil_{j,n}$  не указаны в решении). Получим  $1 + 0 = 1 + 0$  и далее  $1 = 1$  для каждого уравнения.

Два первых решения (3) имеют незначительное отличие: они представляют собой последовательности строк, заданных их индексами. Подставим первую параметрическую строку (3)

$$(pi_{l,m}, pil_{l,m}), l = \overline{1, d}, m = 1, 2,$$

во второе параметрическое уравнение (2)

$$xpi_{j,n} + xpb_{l,m} = xpb_{j',n'} + xpil_{j,n}, j = \overline{1, d}, n = 1, 2, j' = \overline{1, d}, n' = 1, 2, j' \neq j, n' \neq n.$$

Так, при  $l \neq j$  или  $m \neq n$  получим  $0 + 0 = 0 + 0$  и далее  $0 = 0$ , а при  $l = j$  и  $m = n$  получим  $1 + 0 = 0 + 1$  и далее  $1 = 1$ .

Аналогичным способом проверены все  $5 \times 2$  комбинации.

**Теорема 1.** Сеть  $H_{d,1}$  является  $p$ -инвариантной сетью Петри для произвольного натурального числа  $d$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сумму четвертой  $((pb_{j,n}, pi_{j,n}, po_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2)$  и пятой  $(pbl, ((pil_{j,n}, pol_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2))$  строк матрицы (3), которые представляют собой решения системы (2) в соответствии с леммой 1. Получим

$$(pbl, ((pil_{j,n}, pol_{j,n}, pb_{j,n}, pi_{j,n}, po_{j,n}), j = \overline{1, d}, n = 1, 2)). \quad (4)$$

Поскольку все  $N_{d,1}^p = 10 \cdot d + 1$  позиций перечислены в этом инварианте, то сеть  $H_{d,1}$  является  $p$ -инвариантной сетью Петри для любого натурального числа  $d$ . Более того, так как каждый компонент (4) равен единице, то сеть  $H_{d,1}$  является консервативной (и ограниченной) сетью Петри для любого натурального числа  $d$ .

### 3. КОМПОЗИЦИЯ КСГК

Соединение коммуникационных устройств в гиперкубе выполнено совмещением (объединением) соответствующих контактных позиций соседних устройств.

Рассмотрим некоторое внутреннее коммуникационное устройство  $R^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$ ,  $i_u = 2, k-1$ ,  $u = 1, d$ ,  $j = 1, d$ :

- позиции  $port_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  совмещаются с позициями  $port_{j,2}^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$  устройства  $R^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$  таким образом, что позиция  $po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  совмещается с  $pi_{j,2}^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$ , позиция  $pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $pil_{j,2}^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$ , позиция  $pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $po_{j,2}^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$ , позиция  $pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $pol_{j,2}^{i_1, \dots, i_j-1, \dots, i_d}$ ;
- позиции  $port_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  совмещаются с позициями  $port_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$  устройства  $R^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$  таким образом, что позиция  $po_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  совмещается с  $pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ , позиция  $pol_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ , позиция  $pi_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ , позиция  $pil_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  — с  $pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ .

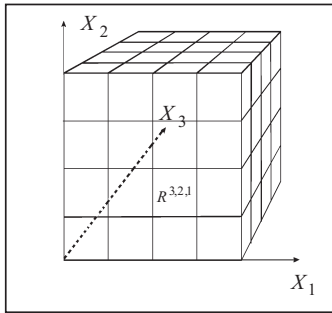


Рис. 2. Схема коммуникационной структуры гиперкуба  $H_{3,4}$

Во избежание двойного именования обозначения позиций для портов направления к нулю  $n=1$  рассматриваются относительно текущего устройства, для портов направления к бесконечности  $n=2$  — относительно соседних устройств и их портов направления к нулю  $n=1$ . Таким образом, имена совмещенных позиций имеют только индексы портов направления к нулю  $n=1$ . Кроме того, для упрощения последующих обозначений позиции с индексами портов направления к бесконечности  $n=2$  на гранях (границах) коммуникационного гиперкуба поименованы относительно несуществующих устройств с индексами, равными  $k+1$ . Таким образом, имена портов с индексами направления к бесконечности  $n=2$  отсутствуют в гиперкубе.

Описанная выше коммуникационная структура гиперкуба обозначена как  $H_{d,k}$ . Пример композиции  $H_{d,k}$  для  $d=3$ ,  $k=4$  представлен на рис. 2.

Формальное описание композиции  $H_{d,k}$  представлено в следующем виде:

$$\left( \begin{array}{l} pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := po_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pol_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pi_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pil_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \end{array} \right), \quad i_u = \overline{1, k-1}, u = \overline{1, d}, j = \overline{1, d},$$

$$\left( \begin{array}{l} pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := po_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pol_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pi_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := pil_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \end{array} \right), \quad i_u = \overline{1, k-1}, u = \overline{1, d}, j = \overline{1, d}, u \neq j, i_j = k.$$

Знак объединения  $\cup$  обозначает совмещение позиций; левый столбец задает новые имена позиций.

#### 4. $p$ -ИНВАРИАНТЫ КСГК

На основе абстрактного описания модели коммуникационного гиперкуба  $H_{d,k}$ , полученного в разд. 3, построена следующая система для вычисления  $p$ -инвариантов:

$$\left\{ \begin{array}{l} to_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} : xpb_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} + xpol_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} = xpo_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} + xpb_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}, \\ ti_{j,1,j',n'}^{i_1, \dots, i_d} : xpi_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} + xpb_{j,1}^{i_1, \dots, i_d} = xpb_{j',n'}^{i_1, \dots, i_d} + xpi_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}, \\ to_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} : xpb_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} + xpi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} = xpi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} + xpb_{j,2}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, \\ ti_{j,2,j',n'}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} : xpo_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} + xpb_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} = xpb_{j',n'}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} + xpol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}, \\ j = \overline{1, d}, j' = \overline{1, d}, n' = 1, 2, j' \neq j, n' \neq n, i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Общее число уравнений системы (5) равно  $N_{d,k}^t = 4 \cdot d^2 \cdot k^d$ . Общее число переменных системы (5) равно  $N_{d,k}^p = (6 \cdot d + 1) \cdot k^d + 4 \cdot d \cdot k^{d-1}$ .

Полученное параметрическое решение имеет следующий вид:

$$\left( \begin{array}{l} (pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}), j = \overline{1, d}, (i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, u \neq j), i_j = \overline{1, k+1}; \\ (po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}), j = \overline{1, d}, (i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, u \neq j), i_j = \overline{1, k+1}; \\ (pbl^{i_1, \dots, i_d}, (pb_{j,n}^{i_1, \dots, i_d}, j = \overline{1, d}, n = 1, 2)), i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}; \\ ((pb_{j,n}^{i_1, \dots, i_d}, n = 1, 2, j = \overline{1, d}, i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}), ((pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}, po_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}), \\ j = \overline{1, d}, i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}), \\ ((pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}), j = \overline{1, d}, i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, u \neq j, i_j = k+1) \\ ((pbl^{i_1, \dots, i_d}, ((pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}, pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_d}), j = \overline{1, d}), i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}), \\ ((pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}, pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}), j = \overline{1, d}, i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, u \neq j, i_j = k+1) \end{array} \right). \quad (6)$$

Общее число решений составляет  $N_{d,k} = (1 + 2 \cdot d) \cdot k^d + 2 \cdot d \cdot k^{d-1} + 2$ .

**Лемма 2.** Каждая строка матрицы (6) является решением системы (5).

**Теорема 3.** Сеть  $H_{d,k}$  является  $p$ -инвариантной сетью Петри для любых натуральных  $d, k$ .

Доказательства леммы 2 и теоремы 3 получены таким же способом, как и для сети  $H_{d,1}$  (разд. 2).

#### 5. МОДЕЛИ ТЕРМИНАЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Присоединенные один к другому коммуникационные устройства образуют коммуникационную структуру, созданную лишь в целях передачи пакетов между терминальными устройствами: рабочими станциями и серверами. В настоящей статье технология взаимодействия клиент–сервер не изучается, поэтому типы терминальных устройств не различаются. Абстрактное терминальное устройство обеспечивает по крайней мере две основные функции: отправить пакет и получить пакет. Указанные функции реализованы в модели, представленной на рис. 3 (выбрано пять сообщений, находящихся в буфере). Модель содержит внутренний буфер

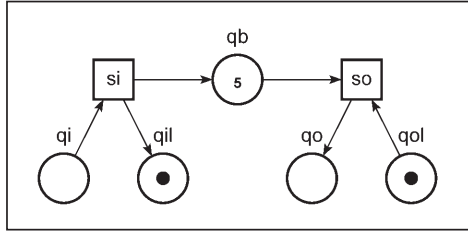


Рис. 3. Модель терминального устройства

пакетов  $qb$ ; переход  $si$  моделирует получение пакетов, а переход  $so$  моделирует отправку пакетов. Модель сохраняет баланс количества полученных и отправленных пакетов; ограничение размеров буфера  $qb$  не рассматривается. Терминальные устройства, представленные на рис. 3, присоединены к граничным портам структуры гиперкуба; соответствующая модель обозначена как  $HT_{d,k}$ . Терминальное устройство в структуре гиперкуба обозначено как  $A^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$ , где  $i_u = \overline{1, k}$ ,  $u = \overline{1, d}$ ,  $j = \overline{1, d}$ ,  $u \neq j$ ,  $i_j \in \{1, k\}$ , и присоединено к коммуникационному устройству  $R^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$ . Формальное описание композиции  $HT_{d,k}$  на основе  $H_{d,k}$ ,  $A^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  представлено в следующем виде:

$$\left( \begin{array}{l} pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} := qo^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} := qol^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} := qi^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \\ pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} := qil^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \end{array} \right), \quad i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, j = \overline{1, d}, u \neq j, i_j = 1,$$

$$\left( \begin{array}{l} pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := qi^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pi_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := qil^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pil_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := qo^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup po_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \\ pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} := qol^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d} \cup pol_{j,1}^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d} \end{array} \right), \quad i_u = \overline{1, k}, u = \overline{1, d}, j = \overline{1, d}, u \neq j, i_j = k$$

Как и в разд. 4, доказано, что  $HT_{d,k}$  является  $p$ -инвариантной сетью Петри для любых натуральных чисел  $d, k$ .

#### 6. $t$ -ИНВАРИАНТЫ И ТУПИКИ КСГК

Для вычисления  $t$ -инвариантов применен подход, аналогичный использованному для вычисления  $p$ -инвариантов. Единственным отличием является то, что для  $t$ -инвариантов каждое уравнение соответствует позиции, а переменные соответствуют переходам. Установлено, что сеть Петри  $H_{d,k}$  не является  $t$ -инвариантной, но это достаточно тривиальный факт, так как моделируемая система является открытой, поскольку не присоединены терминальные устройства. Доказано, что модель закрытой системы с присоединенными терминальными устройствами  $HT_{d,k}$  является  $t$ -инвариантной сетью Петри для произвольных натуральных чисел  $d, k$ . Однако  $t$ -инвариантность модели не подразумевает ее живость.

Каждая пара соседних коммуникационных устройств может попасть в локальный тупик, например, когда устройство  $R^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$  содержит  $l$  пакетов, перенаправленных в устройство  $R^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ , а устройство  $R^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$  содержит  $l$  пакетов, перенаправленных в устройство  $R^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$ , и, кроме того, входной и выходной буферы их общего порта заняты пакетами, где  $l$  — ограничение размера внутреннего буфера (маркировка позиций  $pbl^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_d}$ ,  $pbl^{i_1, \dots, i_j+1, \dots, i_d}$ ). Изложенная ситуация представляет собой  $t$ -тупиковую маркировку для переходов двух устройств, в то время как другие переходы сети  $HT_{d,k}$  являются потенциально живыми.



Однако структура всех возможных тупиков является более сложной. Покажем, что тупики происходят либо в циклах (цепях) блокировок, вовлекающих несколько коммуникационных устройств (где пара является частным случаем), либо в результате изоляции устройства окружающими тупиками.

Для описания сложных тупиков сети  $HT_{d,k}$  построен граф соединений  $GH_{d,k}$ , в котором каждая вершина соответствует коммуникационному устройству и имеет дуги, направленные к соседям. Пример связей внутренней вершины для  $GH_{3,k}$  представлен на рис. 4. Линия с двумя стрелками обозначает пару дуг противоположных направлений.

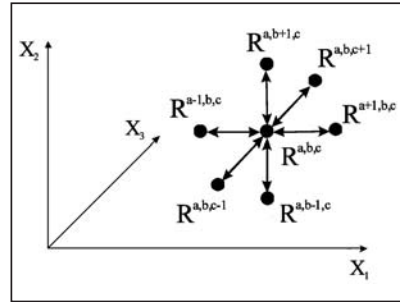


Рис. 4. Связи вершины графа  $GH_{3,k}$

Направленный простой цикл графа  $GH_{d,k}$  представляет тупик коммуникационного гиперкуба  $HT_{d,k}$ . В тупиковом цикле каждая дуга, соединяющая пару соседних устройств  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$ ,  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_d}$ ,  $|i_u - i'_u| = 1$ , озна-

чает, что  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$  блокирует себя тогда и только тогда, когда оно содержит  $l$  пакетов, перенаправленных в  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_d}$ . Его выходной буфер порта, соединяющего  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$  с  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_d}$ , содержит пакет, и устройство  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$  также заблокировано. Когда цикл завершается, его последнее устройство блокирует себя, поскольку первое устройство заблокировано и не может получать пакеты.

Докажем, что все переходы заблокированного устройства  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$  мертвы. Для определенности обозначим

$$r = \begin{cases} 1, & i_u - i'_u = -1, \\ 2, & i_u - i'_u = 1. \end{cases}$$

Все переходы  $ti_{j,n,j',n'}^{i_1, \dots, i_d}$  мертвы, так как маркировка их входной позиции  $pbl_{j,n}^{i_1, \dots, i_d}$  равна нулю, т.е. устройство не может получать пакеты. Все переходы  $to_{j,n}^{i_1, \dots, i_d}$ ,  $n \neq r$ , мертвы, так как каждая входная позиция  $pb_{j,n}^{i_1, \dots, i_d}$  имеет нулевую маркировку. Переход  $to_{u,r}^{i_1, \dots, i_d}$  мертв, поскольку маркировка его входной позиции  $pol_{u,r}^{i_1, \dots, i_d}$  нулевая, т.е. устройство не может посылать пакеты. Заметим, что маркировка  $pol_{u,r}^{i_1, \dots, i_d}$  не может быть изменена, так как  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_d}$  заблокировано.

Непростые циклы  $GH_{d,k}$  также представляют тупики. Так, если устройство  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$  принадлежит двум простым циклам и имеет две выходные дуги, направленные в  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$  и  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i'_v, \dots, i_d}$ , то это означает, что  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$  блокирует себя и устройства  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$ ,  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i'_v, \dots, i_d}$  также заблокированы. В этом случае  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$  блокирует себя, имея  $a_u$  пакетов, перенаправленных в  $R^{i_1, \dots, i'_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$ , и  $a_v$  пакетов, перенаправленных в  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i'_v, \dots, i_d}$ , где  $a_u + a_v = l$ , и, кроме того, буфер каждого соответствующего выходного порта  $R^{i_1, \dots, i_u, \dots, i_v, \dots, i_d}$  содержит пакет в случае, когда  $a_u > 0$  ( $a_v > 0$ ). Индуктивные рассуждения позволяют получить доказательство для  $d$  простых циклов.

Другая разновидность тупиков вызвана изоляцией некоторого устройства тупиками, содержащими все его соседние устройства. Такая изоляция также может быть получена одним простым циклом. Например, в графе  $GH_{3,k}$  следующий цикл  $R^{i_1-1, i_2, i_3}$ ,  $R^{i_1-1, i_2+1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2+1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2+1, i_3+1}$ ,  $R^{i_1, i_2, i_3+1}$ ,  $R^{i_1+1, i_2, i_3+1}$ ,  $R^{i_1+1, i_2, i_3}$ ,  $R^{i_1+1, i_2-1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2-1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2-1, i_3-1}$ ,  $R^{i_1, i_2, i_3-1}$ ,  $R^{i_1-1, i_2, i_3-1}$ ,  $R^{i_1-1, i_2, i_3}$  содержит все соседние вершины  $R^{i_1, i_2, i_3}$  ( $R^{i_1-1, i_2, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2+1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2, i_3+1}$ ,  $R^{i_1+1, i_2, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2-1, i_3}$ ,  $R^{i_1, i_2, i_3-1}$ ), поэтому устройство  $R^{i_1, i_2, i_3}$  заблокировано в результате изоляции. Изоляция вершины может быть обобщена на блокировку простой цепи изоляцией ее последней вершины.

Таким образом, тупик представляет собой цепь блокировок, где последняя вершина заблокирована в результате того, что она совпадает с первой вершиной, она принадлежит другой цепи блокировок или она изолирована другими цепями блокировок.

Следует отметить, что образованные тупики создают больше возможностей для появления новых тупиков. Таким образом, процесс имеет лавинообразный характер. Полный тупик, содержащий все устройства (и все переходы), происходит, когда циклы (цепи) содержат все устройства в гиперкубе. Это требует, по крайней мере,  $(l+1) \cdot k^d$  пакетов, обеспеченных терминальными устройствами. Однако если происходит изоляция устройств, то требуется меньшее число пакетов.

Несмотря на то, что изучены достаточно сложные коммуникационные структуры гиперкуба, описанные тупики в цепях (циклах) блокировок и в результате изоляции присущи реальным коммуникационным графам, где используются устройства с принудительной буферизацией пакетов. Более того, эти тупики могут быть преднамеренно вызваны специально размещенными генераторами определенного трафика. В реальных сетях блокирование устройства преодолевается с помощью механизма таймаута, вызывающего очистку буфера в результате старения записей, но это приводит к существенному снижению производительности сети, поскольку ситуация может быть повторена специальными генераторами злонамеренного трафика.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная методика вычисления линейных инвариантов параметрических сетей Петри с регулярной структурой изучена на примере коммуникационного гиперкуба произвольного размера с произвольным числом измерений. Применение методики позволило выполнить анализ коммуникационных процессов, образованных произвольным числом взаимодействующих коммуникационных устройств. Смоделировано коммуникационное устройство, представляющее собой обобщенный маршрутизатор (коммутатор) с принудительной буферизацией пакетов. Такие положительные свойства коммуникационной структуры, как консервативность и консистентность доказаны с помощью линейных инвариантов бесконечных сетей Петри.

Обосновано, что принудительная буферизация пакетов неизбежно приводит к блокированию коммуникационных устройств. Изучена структура сложных тупиков, вовлекающих произвольное число коммуникационных устройств, вызванных как цепями (циклами) блокировок, так и изоляцией устройств.

Несмотря на то, что в реальных телекоммуникационных сетях тупики преодолеваются очисткой буфера через механизм таймаута, это приводит к существенному снижению производительности сети и, кроме того, может быть вызвано злонамеренным трафиком.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marsan A.M., Chiola G., Fumagalli A. An accurate performance model of CSMA/CD Bus LAN // *Advances in Petri Nets*, LNCS. — 1987, **266**. — P. 146–161.
2. Zaitsev D.A., Zaitsev I.D. Verification of Ethernet protocols via parametric composition of Petri net // *INCOM'2006: 12th IFAC/IFIP/IFORS/IEEE/IMS Symposium Information Control Problems in Manufacturing*, May 17–19 2006, Saint-Etienne, France. — P. 261–267.
3. Zaitsev D.A. Functional Petri nets. Universite Paris-Dauphine, Cahier du Lamsade 224, Avril 2005. — 62 p. ([www.lamsade.dauphine.fr/cahiers.html](http://www.lamsade.dauphine.fr/cahiers.html))
4. Shmeleva T.R. Verification of switched Ethernet protocols using infinite Petri nets // *COMINFO'2007: Third International conference on Modern information-communication technologies*, September 24–28, 2007, Levadia, Ukraine. — P. 161–163.
5. Zaitsev D.A., Shmeleva T.R. Hypercube communication structures analysis via parametric Petri nets // *Proceedings of 24th UK Performance Engineering Workshop (UKPEW 2008)*, 3–4 July 2008, Department of Computing, Imperial College London. — P. 358–371.
6. Murata T. Petri nets: Properties, analysis and applications // *Proceedings of the IEEE*, April 1989, **77**. — P. 541–580.
7. Berthelot G., Terrat R. Petri nets theory for the correctness of protocols // *IEEE Trans. on Communications*. — 1982. — **30**, N 12. — P. 2497–2505.
8. Diaz M. Modelling and analysis of communication and cooperation protocols using Petri net based model // *Computer Network*. — 1982. — N 6. — P. 419–441.
9. Berthomieu B., Ribet O.-P., Vernadat F. The tool TINA-construction of abstract state space for Petri nets and time Petri nets // *International Journal of Production Research*. — 2004. — **42**, N 4 (<http://www.laas.fr/tina>).

*Поступила 22.12.2008*