УДК 519.651.2

А.А. КАЛЕНЧУК-ПОРХАНОВА

НАИЛУЧШАЯ ЧЕБЫШЕВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ключевые слова: *аппроксимация, алгоритмы, чебышевский альтернанс, оценки погрешностей, оптимизация, сжатие массивов данных.*

ВВЕДЕНИЕ

Трудности, возникающие при обработке массивов данных при решении таких прикладных задач, как математическое моделирование и прогнозирование, хранение больших объемов информации и их скоростная передача по каналам связи, а также получение необходимых дополнительных данных о функциональных зависимостях на «неосвещенных замерами участках», обусловливают потребность в аналитической обработке больших потоков информации и определяют востребованность и актуальность этой проблемы. Ее решение достигается путем использования разных способов аналитической обработки массивов в целях их приближенного представления (аппроксимации) в виде аналитических выражений (аппроксимантов) с небольшим количеством параметров. По сравнению с интерполяционным и среднеквадратичным приближениями способ наилучшей чебышевской аппроксимации наиболее эффективен и универсален и обладает особенным свойством не только получать высокую точность аппроксимации в точках дискретного представления функциональных зависимостей, но и обеспечивать такую точность во всех точках непрерывного интервала их задания. Это позволяет решать с высокой точностью как прямую задачу сжатия массивов данных с большими коэффициентами сжатия, так и обратную задачу получения новых значений дискретного представления исходных функциональных зависимостей.

Основы теории наилучшего равномерного приближения функций заложены П.Л. Чебышевым (1821–1894) [1] и развиты в начале прошлого столетия в работах С.Н. Бернштейна, П. Кирхберга, Ш.-Ж. Валле-Пуссена.

Систематическая разработка общих численных подходов для решения задачи чебышевского приближения началась только в 1933–1934 гг. с появлением фундаментальных работ Е.Я. Ремеза [2], предложившего два теоретически обоснованных метода (первый и второй), основанные на способе последовательных чебышевских приближений. Однако вычислительная сложность мощного аппарата чебышевской аппроксимации, который охватывал такие разделы численного анализа, как решение систем линейных, нелинейных и дифференциальных уравнений, алгебру матриц, действия с цепными дробями и многочленами, булеву алгебру, с одной стороны, и ограниченные возможности существовавших на тот период вычислительных средств — с другой, не позволяли получать на практике наилучшие аппроксиманты. Возможность численной реализации аппарата в целом появилась только с созданием компьютеров.

В 1951 г. в Киеве была создана первая в Европе Малая электронная счетная машина МЭСМ, а начиная с конца 1950-х гг. быстро увеличивался парк отечественных ЭВМ — «Киев», «Стрела», «Урал», М-20, М-220, ряд ЭВМ типа БЭСМ и др. К этому времени в Институте кибернетики под руководством Е.Л. Ющенко уже успешно работал созданный ею из выпускников механико-математического факультета Киевского государственного университета им. Т.Г. Шевченко первый в Украине отдел программирования, которому поручалось выполнение таких важных государственных задач, как расчеты характеристик энергосистем СССР, траекторий движения планет, оптимизации профилей автомобильных и железных дорог, сейсмостойкости балок и перекрытий и др.

В 1958 г. Е.Я. Ремез обратился с просьбой к В.М. Глушкову подключить математиков-программистов к решению задач чебышевской аппроксимации. В.М. Глушков поручил эту работу отделу Е.Л. Ющенко. Непосредственными исполнителями этих работ были назначены сотрудники отдела программирования В.А. Александренко и автор данной статьи. Е.Л. Ющенко уделяла этим разработкам большое внимание, подчеркивала их значимость и способствовала успешному выполнению.

Первые результаты по созданию алгоритмов равномерно-наилучших полиномиальных аппроксимантов функций одной переменной и приближенного решения систем несовместимых уравнений были доложены в 1961 г. на IV Международном математическом съезде в Ленинграде. Эти исследования развивались в направлении расширения классов аппроксимантов и их компьютерных реализаций на языках программирования, анализа всех видов погрешностей алгоритмов и их оптимизации по быстродействию и точности. Значительная эффективность разработанных алгоритмов и программ неоднократно подтверждена многочисленными практическими применениями.

Особо отметим, что все возрастающая актуальность и востребованность мощного аппарата наилучшей чебышевской аппроксимации обусловлена тем, что у истоков выполнения в Институте кибернетики этих работ стояли такие корифеи науки с гениальной научной прозорливостью, как Евгений Яковлевич Ремез, Виктор Михайлович Глушков и Екатерина Логвиновна Ющенко.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема наилучшей (равномерной) чебышевской аппроксимации функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ основана на чебышевском принципе минимизации величины меры равномерного приближения $L[H_n] \equiv \max\limits_{x\in[a,\,b]} |\, f(x) - H_n(x;\, A)\,|$ и состоит в нахождении такого аппроксиманта степени n с набором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ из всей совокупности аппроксимантов H_n степени $\le n$, который удовлетворяет условию минимакса $L[H_n] \equiv \min$, где $f(x)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция, $\min\limits_{H_n} L[H_n]$ — наименьшее возможное значение меры равномерного приближения.

В качестве $H_n(x;\, A)$ рассмотрим классы P_n всех полиномов степени не выше n вида $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \equiv P_n(x;\, A)$ и классы r_n всех дробно-рациональных выражений порядка $n = l + m$ вида $r_n(x) = P_l(x) / Q_m(x) \equiv r_n(x;\, A;\, B)$, где $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы степеней l и m с наборами соответственно коэффициентов $A = \{a_i\}$, $i = \overline{0, l}$, и $B = \{b_j\}$, $j = \overline{0, m}$. Тогда постановка задачи нахождения наилучших чебышевских аппроксимантов имеет вид

$$\max_{x\in[a,b]} |\, f(x) - P_n(x;\, A)\,| \equiv L[P_n] = \min_{P_n}, \quad \min_{P_n} L[P_n] = L[\Pi_n(x)] = \rho, \tag{1}$$

$$\max_{x\in[a,\,b]} |\, f(x) - r_n(x;\, A;\, B)\,| \equiv L[r_n] = \min_{r_n}, \quad \min_{r_n} L[r_n] = L[R_n(x)] = \delta, \tag{2}$$

где $\Pi_n(x)$ и $R_n(x)$ — полиномиальный и дробно-рациональный наилучшие чебышевские аппроксиманты, а ρ и δ — соответственно величины их наилучших приближений.

Существование, единственность и свойства наилучших аппроксимантов вытекают из классических теорем Э. Бореля и П.Л. Чебышева [3, с. 49, 50–56] — для полиномиальных аппроксимантов и Н.И. Ахиезера и П.Л. Чебышева [4, с. 64, 66] — для дробно-рациональных. На основании этих теорем единственные решения задач (1) и (2) совпадают соответственно с решениями «элементарных» задач вида

$$\max_{x\in X_1} |\, f(x) - P_n(x;\, A)\,| = \dot{\rho}, \tag{1'}$$

$$\max_{x\in X_2} |\, f(x) - r_n(x;\, A;\, B)\,| = \dot{\delta} \tag{2'}$$

на таких $(n+2)$-точечных подмножествах $X_1, X_2 \subset [a, b]$, для которых величины $\dot{\rho}$ и $\dot{\delta}$ достигают своих наибольших возможных значений, равных ρ и δ.

Каждая из таких $(n+2)$-точечных задач называется задачей чебышевской интерполяции функции $f(x)$ на множестве $n+2$ точек, которые являются соответственно чебышевским альтернансом для полиномиальной задачи (1) и экстремальным базисом для дробно-рациональной задачи (2). Именно это замечательное «свойство чебышевского альтернанса» служит теоретической основой для нахождения всех наилучших чебышевских приближений.

Все известные способы решения чебышевской задачи можно в основном разделить на способы, основанные на распространении методов Е.Я. Ремеза (особенно второго), и на способы, использующие аппараты линейного и выпуклого программирования. Для решения дробно-рациональной задачи применяются и различные приемы последовательной дифференциальной линеаризации по параметрам-коэффициентам. Синтезом многих направлений в последние годы явилась также теория сплайновой аппроксимации [5].

Преимущества методов Ремеза состоят в сравнительно быстрой скорости сходимости (в некоторых случаях квадратичной) и возможности стандартизации вычислений, что очень важно для эффективности их численных реализаций.

Метод Ремеза решения задач (1) и (2) основан на последовательных чебышевских интерполяциях (п.ч.и.), r шагов которых сводятся к нахождению последовательности $(n+2)$-точечных S-наборов $S_r = \{x_\nu^{(r)}\}$, $\nu = \overline{0, n+1}$, сходящейся к искомому чебышевскому альтернансу или экстремальному базису, и решению на каждом j-м шаге систем алгебраических уравнений

$$f(x_\nu^{(j)}) - P_{n,j}(x_\nu^{(j)}) = (-1)^\nu \rho'_j , \tag{3}$$

$$w(x_\nu^{(j)})[f(x_\nu^{(j)}) - P_{l,j}(x_\nu^{(j)}) / Q_{m,j}(x_\nu^{(j)})] = (-1)^\nu \delta'_j , \tag{4}$$

соответственно линейных относительно коэффициентов a_k, $k = \overline{0, n}$, полинома $P_{n,j}(x)$ и величины ρ'_j в задаче (3) и нелинейных относительно коэффициентов a_i, $i = \overline{0, l}$, b_i, $i = \overline{0, m}$, и величины δ'_j в задаче (4), $x \in S_j$, $\nu = \overline{0, n+1}$.

Заметим, что в отличие от полиномиального случая сходимость чебышевских интерполяций в задаче (4) теоретически обеспечивается не при любом начальном наборе $n+2$ точек, хотя применение известных в литературе численных реализаций (даже упрощенных вариантов метода Ремеза) показало крайне редкую их «несходимость».

Основная трудность всех численных реализаций п.ч.и. состоит в выборе $(n+2)$-точечных подмножеств области аппроксимации, на которых выполняются шаги чебышевских интерполяций. От способа этого выбора зависит не только скорость сходимости всего метода, но и сам факт его сходимости. Возможны три класса вариантов последовательной замены указанных $(n+2)$-точечных наборов: оптимальный, полуоптимальный и допустимый.

В оптимальном варианте для некоторых классов функций обеспечивается квадратичная скорость сходимости, что на практике дает, как правило, всего одну-две итерации, в полуоптимальном — число итераций для получения аналогичного эффекта оказывается в несколько раз больше, а в допустимом — может быть во много раз больше [2, с. 79]. Предложенные алгоритмы основаны на втором методе п.ч.и. Ремеза и обладают преимуществами по сравнению с аналогичными реализациями [6, 7]. Достоинством этих алгоритмов является разработка оптимального способа замены $(n+2)$-точечных наборов при переходе к новому S-набору [8].

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Пусть задана функция $\bar{f}(x)$, непрерывная на отрезке $E \equiv [a, b]$, и H_n — множество всех полиномов $P_n(x)$ степени $\le n$. Пусть также $\overline{\Pi}_n(x) \in H_n$ — полином наилучшей чебышевской аппроксимации $f(x)$ на всем отрезке E, дающий максимальное уклонение $\bar{\rho}$, т.е.

$$\bar{\rho} = \min_{H_n} \max_{x \in E} |\bar{f}(x) - P_n(x)| = \max_{x \in E} |\bar{f}(x) - \overline{\Pi}_n(x)|. \tag{5}$$

Если заменить отрезок E некоторой сеткой $E_N \subset E$, то по аналогии пусть $\Pi_n(x)$ — полином наилучшей чебышевской аппроксимации $f(x)$ на сетке E_N, дающий максимальное уклонение ρ, т.е.

$$\rho = \min_{H_n} \max_{x \in E_N} | f(x) - P_n(x) | = \max_{x \in E_N} | f(x) - \Pi_n(x) |. \tag{6}$$

Для непрерывной задачи (5) обеспечивается квадратическая скорость сходимости. В случае сеточной задачи (6) конечность всего процесса п.ч.и. гарантирована тем, что способ замены обеспечивает неповторяемость набора $\{x_i^{(j)}\}_{i=0}^{n+1}$ для различных j, а значит, число всех возможных $(n+2)$-точечных наборов на сетке E_N конечно.

При выборе каждого последующего набора S_{j+1} происходит полная замена предыдущего, причем берутся точки, соответствующие $n+2$ самым большим уклонениям аппроксиманта от функции с учетом чередования знаков, и в результате выбирается искомый набор чебышевского альтернанса, на котором ищется наилучший полином $P_{n,j}(x)$ с величиной наилучшего приближения ρ.

Для решения полиномиальной задачи разработаны два алгоритма («А» и «Б»), соответствующие записям аппроксимирующего полинома в формах $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ для алгоритма «А» и $\sum_{i=0}^{n} b_i T_i(x)$ для алгоритма «Б».

Алгоритм «Б» создан как модификация алгоритма «А» в связи с работой Н.С. Бахвалова [9] и применен для существенного улучшения алгоритма «А», поскольку используемая в алгоритме «А» привычная запись полинома в виде $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ при большом «разбросе» значений коэффициентов a_i может стать источником большой погрешности округлений при вычислении значений полинома в точках по схеме Горнера. В предложенном Н.С. Бахваловым алгоритме использована запись многочленов в виде линейной комбинации многочленов Чебышева $Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i T_i(x)$. Это позволяет существенно уменьшить указанную погрешность при вычислении значений полинома. В результате анализа полных погрешностей алгоритмов «А» и «Б» установлено, что преимущество алгоритма «Б» становится ощутимым при степенях $n > 0$; при $n \le 0$ оба алгоритма примерно равносильны.

Алгоритмы могут работать как для аналитически заданной, так и для дискретно заданной функции $f(x)$. В обоих случаях процедура выбора $(n+2)$-точечного набора на каждом шаге ч.и. предполагает дискретизацию, поэтому их отличие состоит только в том, что во втором из них значения функции в нужных точках известны, а в первом предусматривается процедура их вычисления.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Когда «природа» приближаемой функции $f(x)$ такова, что она на некоторых участках имеет «всплески», то для повышения точности приближения целесообразно использовать аппроксимацию рациональными дробями, которые наиболее точно отображают особенности поведения функции.

Пусть $\Re_n$ — класс всех рациональных дробей вида

$$r_n(x) = P_l(x) / Q_m(x) = \sum_{i=0}^{l} a_i x^i \Big/ \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, \tag{7}$$

где l и m — заданные степени, а $n = l + m$ — порядок $r_n(x)$.

Задача нелинейной наилучшей чебышевской аппроксимации состоит в нахождении таких параметров $\{a_i\}_{i=0}^{l}$ и $\{b_j\}_{j=0}^{m}$ выражения (7), чтобы

$$\min_{\Re_n} \max_{x \in E} | w(x)[f(x) - r_n(x)] | = \max_{x \in E} | f(x) - R_n(x) | = \delta_n. \tag{8}$$

Тогда $R_n(x)$ — наилучший дробно-рациональный чебышевский аппроксимант с величиной наилучшего приближения δ_n.

Весовая функция $w(x)$, имеющая важное значение при больших колебаниях $f(x)$ на сетке, предполагается положительной. В частности, когда $l = 0$ и $w(x) = 1$, имеем полиномиальный случай.

Поскольку переход от полиномов к дробно-рациональным функциям расширяет класс чебышевских аппроксимантов, очевидно, что $\delta_n \le \rho_n$, где ρ_n — величина наилучшего полиномиального приближения той же функции на том же самом отрезке E.

Несмотря на то что переход от полиномиальных аппроксимантов к дробно-рациональным не позволяет увеличить порядок стремления к нулю величины δ_n для всего класса функций, можно утверждать, что благодаря этому переходу расширяется класс функций, для которых величина наилучшего приближения будет того же порядка, что и для «хороших» функций.

Заметим, что в отличие от полиномиального случая сходимость п.ч.и. (причем, как правило, квадратическая) для задачи (7), (8) согласно работам А. Ральстона [10] может быть обеспечена только при условии наличия начального приближения $R_n^{(0)}(x)$, «близкого» к наилучшему дробно-рациональному аппроксиманту $R_n(x)$.

В некоторых частных случаях для многих математических функций, в особенности при малых значениях $n = m + k$, в качестве начального набора точек для нахождения $R_n^{(0)}(x)$ можно применять точки уклонения полинома Чебышева, но для общего случая чебышевской рациональной задачи нет никаких практических рекомендаций относительно выбора «близкого» $R_n^{(0)}(x)$. Этот недостаток устранен работами Х. Вернера [11], который предложил метод, всегда сходящийся с любого начального приближения. Однако громоздкость вычислений и низкая скорость сходимости (линейная), по утверждению самого Вернера, не позволяют использовать его эффективно на практике.

Учитывая сказанное выше, а также то, что даже упрощенные варианты п.ч.и. зачастую сходятся, автором статьи разработан сочетающий в себе преимущества методов Ремеза и Вернера **комбинированный алгоритм**. Идея этого алгоритма состоит в том, что на практике часто желательно получить приближение, модуль-максимум уклонения которого не превышает некоторого заданного числа $\gamma > 0$. Поэтому естественно вычислять последовательность аппроксимантов, начиная с более малых значений степеней l и m и повышая эти значения до получения приближения с желаемой точностью. Таким образом, будем предполагать, что всегда перед началом вычисления $R_{l,\,m}(x)$ уже получен наилучший аппроксимант $R_{l-1,\,m-1}(x)$. Для получения аппроксимантов каждой новой степени вначале используется метод п.ч.и. с обязательной проверкой сходимости алгоритма на каждом шаге итерации. В случаях, когда сходимость не нарушается, метод п.ч.и. работает до конца, т.е. до получения наилучшего аппроксиманта текущей степени. Если на каком-то шаге п.ч.и. сходимость нарушается (например, число участков перемены знака уклонений меньше $l + m + 2$), то для получения начального приближения $R_{l,\,m}^{(0)}(x)$, имеющего не меньше $l + m + 2$ экстремума, вступает в работу начальный алгоритм (н.а.) метода Вернера. После этого снова работает метод п.ч.и. Без учета случаев вырождения, если сходимость метода п.ч.и. обеспечена и абсолютное значение максимального уклонения наилучшего аппроксиманта не превышает величину желаемой точности, то алгоритм заканчивает работу. Иначе степень аппроксиманта повышается и снова начинает работать метод п.ч.и.

В комбинированном алгоритме учитываются случаи вырождения, когда у наилучшего аппроксиманта предыдущей степени уклонений равной величины и чередующих знак больше $l + m + 2$, и почти вырождения, когда участков перемены знака больше $l + m + 2$, а модуль-максимумов уклонений равной величины точно $l + m + 2$.

Несмотря на то что случаи вырождения, и особенно почти вырождения, крайне редки, очень важно с вычислительной точки зрения уметь их распознавать до начала вычисления вырожденного аппроксиманта. С этой целью в алгоритме предполагается, что перед вычислением $R_{l,\,m}(x)$ имеется наилучший аппроксимант $R_{l-1,\,m-1}(x)$. Это равносильно тому, что вычисления следует начинать всегда с невырожденных аппроксимантов $R_{l-m,\,0}(x)$ для $l \geq m$ или $R_{0,\,m-l}(x)$ для $l < m$.

Исходная функция $f(x)$ предполагается заданной на $[a, b]$ как аналитически, так и дискретно, однако при поиске новых экстремумов уклонений используется дискретная процедура вычисления значений $f(x)$ в точках.

В отличие от полиномиального случая, когда вход в алгоритм может начинаться либо по заданной точности, либо по степени, в случае дробно-рациональной аппроксимации вход в комбинированный алгоритм осуществляется только по заданной точности γ. Отличие также состоит в том, что в этом случае система $l+m+2$ алгебраических уравнений с $n+2$ неизвестными является нелинейной. Ее линеаризация относительно $n+1$ неизвестных коэффициентов осуществляется посредством исключения одного неизвестного $\dot{\delta}$. Учитывая легко устранимую нелинейность системы, ее решение находим следующим образом. Последнее уравнение (при $\nu = n+1$) рассматриваем как функцию от $\dot{\delta}$ и ищем $\dot{\delta}$ как корень функции $F[\dot{\delta}, a_0(\dot{\delta}), \ldots, a_l(\dot{\delta}), b_1(\dot{\delta}), \ldots, b_m(\dot{\delta})] \equiv F(\dot{\delta})$, решая уравнение $F(\dot{\delta}) = 0$ по методу секущей [12]. Затем, задавая начальные значения $\dot{\delta}^{(1)}$ и $\dot{\delta}^{(2)}$, решаем систему первых $l+m+1$ уравнения относительно $\{a_i\}_{i=0}^{l}$ и $\{b_j\}_{j=1}^{m}$. Подставляя эти значения поочередно в последнее уравнение, получаем $F(\dot{\delta}^{(1)})$ и $F(\dot{\delta}^{(2)})$. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия $|\dot{\delta}^{(i+1)} - \dot{\delta}^{(i)}| / |\dot{\delta}^{(i+1)} + \dot{\delta}^{(i)}| < \varepsilon$, где ε — заданное число.

Когда для текущего $R_{l,\,m}(x)$ п.ч.и. не сходятся, т.е. число NN модуль-максимумов экстремумов, чередующих знак и равных по величине, меньше $l+m+2$, или не сходится метод секущих, то начинает работать н.а. Вернера с наилучшего аппроксиманта $R_{l-1,\,m-1}(x)$, последовательно повышая его степени до степеней текущего аппроксиманта до тех пор, пока не будет получено не менее $l+m+2$ точек, в которых экстремумы уклонений чередуют знак. После этого снова начинает работать метод п.ч.и. до получения аппроксиманта, имеющего $l+m+2$ равных по модулю и чередующих знак экстремумов уклонений. Этот аппроксимант принимается за начальное приближение $R_{l,\,m}^{(0)}(x)$ метода п.ч.и. для нахождения наилучшего приближения $R_{l,\,m}(x)$, и работа комбинированного алгоритма продолжается до получения наилучшего аппроксиманта требуемой точности.

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача аппроксимации функции любого числа переменных $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ посредством обобщенных полиномов $F_n(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(X)$, а именно

$$\max_{x \in E} \left| f(X) - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(X) \right| \equiv L(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \min, \tag{9}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — точка m-мерного пространства на точечном множестве $E \equiv \{X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(N)}\}$, решается как частный случай задачи построения равномерно-наилучшего в чебышевском смысле приближения к решению системы несовместных линейных уравнений

$$\Phi_i(Z) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N,\ N > n). \tag{10}$$

Другими словами, задача состоит в определении таких параметров $z_1, z_2, \ldots, z_n$, чтобы значение величины

$$\max_{i=\overline{1,\,N}} |\Phi_i(z)| = \max_{i=\overline{1,\,2N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + b_i \right| \equiv L(z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{11}$$

было наименьшим возможным, т.е.

$$\max(|\Phi_1(Z)|, |\Phi_2(Z)|, \ldots, |\Phi_N(Z)|) \equiv L(Z)\ (= \rho) \to \min.$$

Алгоритм решения задачи (9) является реализацией аналога метода п.ч.и. Ремеза для случая сведения к задаче линейного программирования с неотрицательными коэффициентами, а именно: присоединяя в (10) к каждой функции $\Phi_i(Z)$ ее «симметрическую копию» $\Phi_{N+i}(Z) = -\Phi_i(Z) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - b_i$, задачу (10), (11) представляем в виде задачи алгебраического минимакса

$$\Phi_i(Z) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + b_i \approx 0 \;\; (i = \overline{1, 2N};\;\; a_{i\pm N, j} = -a_{ij};\;\; b_{i\pm N} = -b_i), \tag{12}$$

$$\max_{i=\overline{1, 2N}} \Phi_i(Z) = \max_{i=\overline{1, 2N}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j + b_i \right) \equiv L(Z) = \min = (\rho). \tag{13}$$

Задачи (10), (11) и (12), (13) эквивалентны задаче линейного программирования

$$\Lambda = \min,\;\; \xi_i = \Lambda - \Phi_i(Z) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j - b_i + \Lambda \ge 0 \;\; (i = \overline{1, 2N}).$$

Впервые сведение к задаче линейного программирования для дискретных чебышевских приближений предложено Е. Штифелем [13] для случая выполнения «большого детерминантного условия» (отличия от нуля всех определителей n-го порядка) для системы функций $\Phi_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$, $\;i = \overline{1, 2N}$, и развито Е.Я. Ремезом.

Частным случаем сформулированной задачи является наилучшее равномерное приближение функции одной переменной $f(x)$ на конечном множестве точек $E = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}\}$ обыкновенными полиномами (1). Однако сведение этой задачи к задаче линейного программирования нецелесообразно, так как применяемый для ее решения в чебышевской постановке метод п.ч.и. обладает безусловными преимуществами.

В разработанном алгоритме [14] реализована прямая и двойственная задачи линейного программирования, причем ведущая — двойственная, которая решается модифицированным симплекс-методом (м.с.-м.) с учетом того, что на практике число уравнений N значительно больше числа неизвестных n и таблица «расширенного базиса» размера $(n+2)(n+4)$ при м.с.-м. существенно меньше опорной таблицы $(n+2)N$ при прямом симплекс-методе.

В алгоритме применены также приемы, позволяющие сократить больше чем наполовину симплекс-таблицу (с.-т.) и в процессе решения двойственной задачи м.с.-м. преобразовывать только модифицированную (сжатую) с.-т., оставляя при этом неизменной опорную таблицу. Кроме того, алгоритм имеет такие основные особенности:

1) применение для двойственной задачи м.с.-м., в процессе которого строится опорная с.-т. размерности $(n+2)N$ и начальная модифицированная (сжатая) с.-т., содержащая обратную матрицу «расширенного» базиса размерности $(n+2)(n+2)$, ключевой столбец первой жордановой замены и столбец значений базисных переменных (в том числе и целевую функцию Λ);

2) преобразование по общим правилам жордановой замены только модифицированной с.-т. размерности $(n+2)(n+4)$, а не размерности $(n+2)N$, как при прямом симплекс-методе;

3) неизменность опорной таблицы в процессе решения задачи.

Таким образом, применяя м.с.-м., получаем оптимальное решение задач и вычисляем значения искомых параметров $z_1, z_2, \ldots, z_n$ исходной задачи (12), (13). Подставив полученные значения z_j в линейные функции $\Phi_{i_\nu}(Z)\,(\nu = \overline{1, n+1})$, получим значения $\Phi_{i_1}(Z)$, $\Phi_{i_2}(Z), \ldots, \Phi_{i_{n+1}}(Z)$. Наименьшая и наибольшая по модулю среди этих значений величины A и L являются соответственно нижней и верхней границами величины наилучшего приближения ρ, т.е. $A \le \rho \le L$. За критерий конца работы алгоритма принимается выполнение условия $L - \rho \le L - A$.

Для разработанных алгоритмов осуществлен анализ всех видов погрешностей, сопровождающих решение задач наилучшей чебышевской полиномиальной и дробно-рациональной аппроксимации, а именно погрешности постановки задачи за счет дискретного представления аппроксимируемой функции, неустранимой и вычислительной погрешностей алгоритмов, а также полной абсолютной погрешности решения этих задач. Такой анализ проводится по двум различным схемам, первая из которых удобна при минимальной информации о поведении дискретно заданной аппроксимируемой функции, а вторая — при наличии дополнительной информации о ее структурных свойствах. При этом получены неулучшаемые для некоторых классов функций как априорные, так и апостериорные мажорантные детерминированные оценки всех видов погрешностей, расчеты которых включены в вычислительные схемы алгоритмов и программ, что позволило значительно повысить точность результатов вычислений (в некоторых случаях на порядок). Для определения значений указанных оценок полной погрешности решения чебышевской задачи получены представляющие самостоятельный интерес вспомогательные результаты из конструктивной теории функций, в том числе уточняющие известные оценки венгерских авторов Г. Алексича, Д. Кралика и Л. Лейндлера. В целях существенного повышения эффективности разработанных вычислительных алгоритмов осуществлялись также различные процедуры для их модификации, в частности, реализован подход, основанный на применении сегментной (кусочной) аппроксимации разными классами аппроксимантов.

Преимущество этих алгоритмов заключается в том, что в целях повышения эффективности проведена их оптимизация по быстродействию и по точности.

Оптимизация по быстродействию достигается за счет следующих факторов:

— алгоритмы основаны на методе последовательных чебышевских интерполяций Ремеза и относятся к алгоритмам подъема, при работе которых нижняя граница выбранных на каждом шаге $n+2$ максимальных уклонений от функции аппроксиманта порядка n не уменьшается на последующих шагах, что предпочтительнее по скорости сходимости;

— в алгоритмах реализуется на практике один из трех возможных вариантов последовательной замены $(n+2)$-точечных наборов, на которых осуществляются шаги ч.и., а именно оптимальный, что обеспечивает квадратичную скорость сходимости всего итерационного процесса и позволяет получать результат за две-три итерации;

— комбинированный алгоритм реализации дробно-рациональной аппроксимации позволяет обеспечить сходимость п.ч.и. также для дробно-рационального случая, при этом сохраняются действия факторов оптимизации пп. 1) и 2).

Оптимизация по точности осуществляется благодаря следующим действиям:

— включению в вычислительную схему алгоритмов расчета как априорных, так и апостериорных оценок полной погрешности, что позволяет корректировать результаты, а именно, в зависимости от требуемой точности менять степень полинома, число точек сетки, параметр критерия останова и обоснованно выбирать вид аппроксиманта;

— просмотру на каждом шаге итерации при переходе к следующему шагу всех точек сетки при исследованиях поведения уклонений полинома от функций, при этом учитываются как верхняя, так и нижняя границы величины наилучшего приближения;

— использованию на каждом шаге чебышевских интерполяций для решения систем линейных алгебраических уравнений метода Краута, оптимизированного по точности [15];

— применению в алгоритме дробно-рациональной аппроксимации на каждом j-м шаге ч.и. для решения нелинейной системы уравнений относительно коэффициентов и величины наилучшего приближения специального подхода, основанного на линеаризации системы и использовании метода секущей;

— использованию схемы Бахвалова вместо схемы Горнера для уменьшения погрешности округлений при вычислениях в точках значений полиномов степени, большей 10;

— применению кусочно-полиномиальной аппроксимации для сжатия больших и сверхбольших массивов числовых данных, что значительно повышает точность приближения и обеспечивает высокие коэффициенты сжатия по сравнению с аппроксимацией без разбиения на сегменты.

В алгоритмах использованы дополнительные приемы повышения их эффективности:

— решение задач аппроксимации как для дискретно, так и аналитически заданных функций, при этом дополнительно вводится процедура вычисления значений функции в точках дискретизации;

— проведение предварительной аппроксимации в целях повышения точности значений дискретных данных в случаях, когда известны свойства исходной аппроксимируемой функции;

— обеспечение двух «входов» в алгоритмы, что позволяет находить либо аппроксимант заданной фиксированной степени («вход» по степени), либо такой, который обеспечивает заданную точность приближения («вход» по точности);

— использование различных классов аппроксимирующих выражений, наиболее соответствующих характеру поведения («природе») приближаемой функции;

— обеспечение построения полиномиального приближения с произвольным весом $w(x) \neq 0$;

— проверка в комбинированном алгоритме решения дробно-рациональной задачи перед началом каждой следующей итерации возможности появления случаев вырождения или почти вырождения, когда не удается получить нужное количество точек экстремального базиса, причем эти случаи в алгоритме распознаются до начала вычислений вырожденного аппроксиманта, после чего подключаются средства для их устранения;

— применение для аппроксимации функций многих переменных м.с.-м. и некоторых процедур, которые обеспечивают значительное уменьшение количества вычислений и повышение точности результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аппарат аппроксимации на протяжении многих лет использовался в составе прикладного программного обеспечения отечественных компьютеров и для сжатия массивов данных в расчетах сложных динамических систем, например прочностных характеристик летательных аппаратов для НИИ им. А.Н. Туполева, траекторий движения космических объектов, транссект и кривых трансконтинентальных переносов загрязнений воздушной среды, токовых состояний водных систем (водоемов, водотоков, Черного моря) в связи с последствиями Чернобыльской катастрофы и была подтверждена его высокая эффективность. Более подробно об этом изложено в работах [16–23].

Аппарат чебышевской аппроксимации в последнее время применен в рамках научно-технического проекта для решения расчетных задач АНТК «Антонов», а также для сжатия больших одномерных массивов-векторов (с возможным количеством значений до 10 млн чисел) в целях получения небольшого числа параметров аппроксимантов; достигнуты большие значения коэффициентов сжатия (в среднем более двух порядков) [24].

В состав программного обеспечения кластерного комплекса СКИТ включены библиотеки чебышевской аппроксимации функций одной и многих переменных и вычисления с повышенной точностью значений элементарных и специальных функций.

В настоящее время для СКИТ разрабатывается пакет программ аппроксимации функций разными способами приближения: интерполяционным, среднеквадратичным и чебышевским, который войдет в состав его Базового прикладного программного обеспечения. Этот пакет имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с известными аналогичными пакетами и специализированными библиотеками, такими, например, как Mathcad, Maple, MATLAB, Mathematica, MATHLIB, NETLIB [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — Т. 2, 3.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. — Киев: Наук. думка, 1969. — 623 с.

3. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 688 с.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 408 с.
5. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с.
6. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
7. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — 297 с.
8. Каленчук-Порханова А.А. Наилучшая чебышевская аппроксимация — алгоритмы и их применение // Пр. міжнар. симпоз. «Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV)». — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. — С. 279–284.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 631 с.
10. Ralston A. Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithm // Numerische Mathematik. — 1965. — **7,** N 4. — P. 322–330.
11. Werner H., Stoer J., Bommas W. Rational Chebyshev approximation // Ibid. — 1967. — **10,** N 4. — P. 342–352.
12. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 219 с.
13. Stiefel E. Note on Jordan elimination, linear programming and Chebysheff approximation // Numerische Mathematik. — 1960. — **2.** — P. 1–17.
14. Александренко В.Л. Алгоритм построения приближенного равномерно-наилучшего решения системы несовместных линейных уравнений // Алгоритмы и алгоритмические языки. — М.: ВЦ АН СССР, 1968. — Вып. 3. — С. 57–74.
15. Воеводин В.В. Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры. — М.: Изд-во МГУ и ВЦ, 1969. — 153 с.
16. Александренко В.Л., Порханова А.А. Алгоритмы приближения функции одной переменной полиномами по второму методу Е.Я. Ремеза // Вычисл. и прикл. математика. — Киев: Изд-во КГУ, 1967. — Вып. 3. — 116 с.
17. Каленчук-Порханова А.А. Об одном алгоритме полиномиальной чебышевской аппроксимации // Оптимизация вычислительных методов. — К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1974. — С. 45–51.
18. Порханова А.А. Чебышевская аппроксимация дробно-рациональными выражениями // Вычисл. математика в совр. науч.-техн. прогрессе. — Киев: Знание, 1974. — С. 300–308.
19. Каленчук-Порханова А.А. Алгоритмы и анализ погрешности наилучшей чебышевской аппроксимации одной переменной // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 1975. — М.: Наука, 1977. — С. 213–218.
20. Иванов В.В., Каленчук А.А. Об эффективности алгоритмов полиномиальных и дробно-рациональных чебышевских приближений // Тр. междунар. конф. по конструктивной теории функций. — София: Изд-во Болгар. АН, 1983. — С. 72–77.
21. Каленчук-Порханова А.А. Аппроксимация функций одной и многих переменных // Численные методы для многопроцессорного вычислительного комплекса ЕС. — М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1987. — С. 366–395.
22. Каленчук-Порханова А.А. Аппарат аппроксимации для анализа и синтеза сложных систем // Пр. Міжнар. конф. «50 років Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України». — Київ, 2008. — С. 354–361.
23. Каленчук-Порханова А.А. Алгоритмы реализации наилучшей чебышевской аппроксимации — повышение их эффективности // Пр. міжнар. симпоз. «Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV)». — К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. — С. 285–290.
24. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Наилучшая чебышевская аппроксимация для сжатия численной информации // Компьютерная математика. — 2009. — № 1. — С. 3–9.
25. Каленчук-Порханова А.А., Вакал Л.П. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой // Искусств. интеллект. — 2009. — № 1. — С. 52–60.

Поступила 30.06.2009