УДК 519.1

Р.И. ПОДЛОВЧЕНКО

ТЕХНИКА СЛЕДОВ В РАЗРЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ПРОГРАММ

Ключевые слова: *алгебраическая модель программ, проверка эквивалентности, техника следов*.

ВВЕДЕНИЕ

Алгебраические модели программ введены в [1] как обобщение существующих к тому времени моделей программ двух типов: предложенных А.А. Ляпуновым и Ю.И. Яновым в [2, 3] и В.М. Глушковым и А.А. Летичевским в [4].

К основным проблемам в моделях программ относится проблема функциональной эквивалентности принадлежащих моделям схем программ. Ее решения, полученные для моделей программ, предшествующих алгебраическим, естественным образом адаптируются в решения для последних.

Интерес вызвало решение, полученное А.А. Летичевским в [5] для случая, когда полугруппа операторов, индуцирующая модель программ, обладает неразложимой единицей и левым сокращением. Сложность решения экспоненциальна. Возникла идея: выделить из полугрупп с неразложимой единицей и левым сокращением достаточно широкий класс полугрупп с полиномиальной сложностью решения проблемы эквивалентности в индуцируемых ими моделях программ.

Идея полиномиального решения восходит к применению техники следов, известной в теории математических моделей вычислений [6].

Настоящая работа посвящена определению требований, предъявляемых к алгебраическим моделям программ и достаточных для использования техники следов при разрешении проблемы эквивалентности.

С помощью исследований, проведенных в данной статье, устанавливается, что таким требованиям удовлетворяют так называемые уравновешенные полугрупповые модели программ с левым сокращением. Здесь ограничимся фактом применимости для этих моделей техники следов при разрешении в них проблемы эквивалентности. (В следующей работе опишем алгоритм разрешения эквивалентности.)

Определим, что представляет собой алгебраическая модель программ. Прежде всего, отметим концепции, на которых базируется введение этой модели. Они заключаются в следующем:

1) моделирование программ более простыми объектами — схемами программ опирается на явную предварительную формализацию понятия программы;

2) среди различных способов построения по программе ее схемы отбираются те, которые обладают свойством: из эквивалентности схем всегда вытекает эквивалентность программ, представляемых этими схемами.

Следование приведенным концепциям позволит изучать семантические свойства программ на их схемах.

Реализация данных концепций осуществляется следующим образом.

Фиксируется формализация последовательной программы над выбранным базисом операторов и логических условий. Ее особенность состоит в том, что она восходит к представлению функциональной составляющей реальной программы, записанной на алгоритмическом языке высокого уровня; эта составляющая — раздел операторов.

В формализованной программе, в отличие от реальной, структура представлена конечным графом, вершины которого, исключая вход и выход, нагружены базисными операторами и логическими условиями. При выполнении программ реализуются все принятые в алгоритмических языках последовательных программ средства композиции операторов, кроме аппарата процедур. Выполняемая программой функция — отображение множества состояний памяти в себя, являющееся в общем случае частичным. Эквивалентность программ вводится требованием совпадения выполняемых ими функций.

Схема программы получается из программы заменой базисных операторов операторными символами, а базисных логических условий — логическими переменными. Те и другие составляют символьный базис, над которым строятся схемы. Таким образом, граф программы наследуется в ее схеме. Этим достигается положение: всякое преобразование структуры графа схемы одновременно является и преобразованием структуры графа программы, для которой построена схема.

Для семантической трактовки схем программ вводится универсальная процедура выполнения схемы. Роль начальных данных при этом играет так называемая функция разметки, которая всякой цепочке операторных символов сопоставляет значения всех логических переменных. Таким образом обеспечивается детерминированность обхода схемы в процессе ее выполнения на функции разметки. Результатом выполнения схемы является цепочка операторных символов, описывающая путь ее обхода в случае, когда обход завершается в выходе схемы.

Эквивалентность схем программ над выбранным символьным базисом определяется двумя параметрами: множеством допустимых функций разметки, на которых выполняются схемы, и эквивалентностью цепочек операторных символов, используемой при сравнении результатов выполнения схем. Для эквивалентных схем области завершения их выполнения должны совпадать, а результаты выполнения быть эквивалентны.

По определению алгебраическая модель программ над заданным символьным базисом — множество всех схем программ над этим базисом с введенным на множестве отношением эквивалентности схем.

В возникшем параметрическом множестве алгебраических моделей программ изучению подлежат аппроксимирующие модели. Для модели этого типа существует класс программ, полученный интерпретацией символьного базиса базисом операторов и логических условий и такой, что из эквивалентности схем, принадлежащих модели, всегда следует эквивалентность программ, представленных этими схемами.

Аппроксимирующие модели позволяют применить к программам, моделируемым схемами, результаты семантического анализа схем.

В [7] получены достаточные условия того, что алгебраическая модель программ является аппроксимирующей. Ими выделен широкий класс моделей.

Проблема эквивалентности в модели состоит в построении алгоритма, который, получив на свой вход пару схем из модели, определяет, эквивалентны они или нет. Если такой алгоритм найден, то проблема эквивалентности называется разрешимой. Легко увидеть, что алгоритм, распознающий эквивалентность в аппроксимирующей модели, пригоден для применения его к аппроксимируемым ею программам.

Данная статья состоит из трех разделов. В названии этих разделов отражены решаемые в них задачи.

Как отмечалось, сам факт разрешимости не является новым в теории моделей программ. Однако то обстоятельство, что разрешимость установлена техникой следов, предполагает построение разрешающего алгоритма полиномиальной сложности.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГРАММ, АППРОКСИМИРУЮЩИЕ МОДЕЛИ И *u*-СХЕМЫ В НИХ

Каждая алгебраическая модель программ строится над двумя конечными и непересекающимися алфавитами — Y и P. Элементы Y называются операторными символами, элементы P — логическими переменными. Каждая логическая переменная принимает значения из множества $\{0,1\}$. Далее алфавиты Y и P остаются неизменными и поэтому не упоминаются в наименованиях зависящих от них понятий и конструкций.

Объектами модели являются схемы программ. Схема задается конечным ориентированным графом. В нем выделены две вершины: вход — вершина без входящих в нее дуг и с единственной исходящей дугой и выход — вершина без исходящих дуг. Остальные вершины графа, если таковые имеются, по своему типу делятся на преобразователи и распознаватели. Из каждого преобразователя исходит одна дуга, и ему сопоставлен символ из Y. Из каждого распознавателя исходят две дуги, несущие метки 0 и 1 соответственно, и ему сопоставлена логическая переменная из P.

Пример схемы приведен на рис. 1. Она представляет собой композицию двух циклов: одного — с предусловием p_1, а другого — с постусловием p_2.

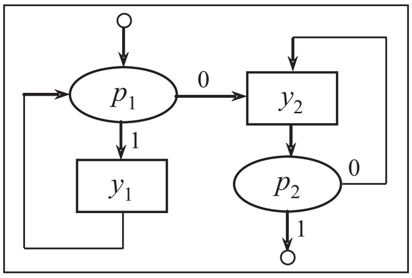

Рис. 1

Функциональное описание схемы связано с процессом ее выполнения, которое осуществляется на так называемой функции разметки. Определим ее.

Введем множество X, $X = \{x \mid x : P \to \{0,1\}\}$, элементы которого будем называть наборами значений всех логических переменных, или просто наборами.

Введем множество Y^*, элементы которого — слова в алфавите Y, называемые далее операторными цепочками.

По определению функция разметки — отображение множества Y^* в множество X. Множество всех функций разметки над Y и P обозначим $\mathfrak{L}$.

Опишем выполнение схемы на функции разметки.

Пусть G — схема над Y и P, μ — функция из $\mathfrak{L}$. Процесс выполнения G на μ состоит в продвижении по схеме G, сопровождаемом накоплением операторной цепочки. Обход схемы осуществляется детерминированным образом по следующим правилам. Он начинается во входе схемы G при пустой операторной цепочке и идет в направлении дуги, исходящей из посещаемой вершины схемы. В случае, когда это — вход или преобразователь, исходящая дуга единственна. Прохождение через преобразователь сопровождается приписыванием справа к текущей операторной цепочке символа, сопоставленного этому преобразователю. Переход через распознаватель не изменяет текущей операторной цепочки и состоит в выборе одной из двух исходящих из него дуг, а именно: выбирается дуга, помеченная числом $\mu h(p)$, где h — текущая операторная цепочка, а p — приписанная распознавателю логическая переменная. Выполнение схемы завершается при достижении ее выхода. В этом случае полагаем, что схема G остановилась на функции μ, и результатом ее выполнения считаем накопленную к моменту остановки операторную цепочку. О пути в схеме G, которым идет ее выполнение на функции μ, говорим как о прокладываемом в G функцией μ.

Алгебраическая модель программ над Y и P по определению представляет собой множество схем программ над Y и P с заданным на этом множестве отношением эквивалентности схем. Эквивалентность схем определяется двумя параметрами: эквивалентностью ν в Y^* и подмножеством L множества $\mathfrak{L}$. Для заданных параметров ν и L две схемы называются эквивалентными, если, какой бы ни была функция разметки μ из L, всякий раз, как на ней останавливается одна из схем, останавливается и другая, результаты их выполнения — ν-эквивалентные цепочки.

Для определенного параметрического множества моделей основной является проблема эквивалентности.

В [8] рассмотрены формальные программы над базисом Y и P, где символы из Y трактуются как операторы, а переменные из P — как логические условия. Формальной программе сопоставляется ее схема, сохраняющая управляющий граф программы и освобожденная от трактовки символов из Y и переменных из P конкретными конструкциями.

Считаем, что алгебраическая модель программ над Y и P аппроксимирует класс программ над Y и P (с трактовкой последних), если из эквивалентности схем, принадлежащих модели, всегда следует эквивалентность программ, для которых построены эти схемы. Модель называется аппроксимирующей, если существует класс программ, аппроксимируемый ею.

В [7] определены требования, предъявляемые к параметрам алгебраической модели программ и достаточные для того, чтобы модель была аппроксимирующей. Частный случай этих требований фиксируется следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть ν и L — параметры алгебраической модели программ над Y и P. Если эквивалентность ν полугрупповая, а множество L состоит из всех ν-согласованных функций разметки из $\mathfrak{L}$, то данная модель является аппроксимирующей.

Опуская доказательство этой теоремы, опишем используемые в ней понятия.

Отметим, что при введении отношения эквивалентности ν в Y^* исходной является следующая ситуация: множество Y^* с введенной в нем операцией конкатенации операторных цепочек представляет собой полугруппу с образующими — символами из Y и с единицей, роль которой играет пустая цепочка из Y^*.

Отношение ν называется полугрупповым, если для любых цепочек h_1, h_2, h_3, h_4 из Y^* выполняется импликация

$$(h_1 \overset{\nu}{\sim} h_2)\,\&\,(h_3 \overset{\nu}{\sim} h_4) \Rightarrow h_1 h_3 \overset{\nu}{\sim} h_2 h_4;$$

здесь запись $\overset{\nu}{\sim}$ используется для отношения эквивалентности ν.

Название «полугрупповая эквивалентность» отражает следующее: индуцируемые ею классы эквивалентных цепочек сами образуют полугруппу.

Функция разметки μ из $\mathfrak{L}$ называется ν-согласованной, если для любых операторных цепочек h_1, h_2 из Y^* имеет место импликация

$$h_1 \overset{\nu}{\sim} h_2 \Rightarrow \mu h_1 = \mu h_2.$$

Рассматриваем алгебраические модели программ, удовлетворяющие требованиям теоремы 1; они называются полугрупповыми. Этим выполняется обязательство: рассматривать только аппроксимирующие модели.

Формулируя следующую теорему, используем результат, установленный, в частности, в [9].

Теорема 2. Какой бы ни была алгебраическая модель программ над Y и P, проблема эквивалентности в модели сводима к проблеме эквивалентности в множестве u-схем, принадлежащих этой модели.

Поскольку далее рассматриваются именно u-схемы, определим их. Введем понятия и конструкции, используемые при этом.

Напомним определение фрагмента схемы; оно дано, например, в [8]. Фрагментом схемы называется подграф схемы, индуцированный некоторым множеством вершин схемы, называемых внутренними вершинами фрагмента, и удовлетворяющий требованиям: вместе с каждой внутренней вершиной подграфу принадлежат все инцидентные ей дуги; как внутренние вершины, так и инцидентные им дуги наследуют метки, приписанные им в схеме. Дуга, которая исходит из вершины фрагмента, не являющейся внутренней, и ведет во внутреннюю вершину фрагмента, называется входящей в него, ее начало — внешним входом во фрагмент, конец — внутренним входом. Дуга, которая ведет в вершину фрагмента, не являющуюся внутренней, но исходит из внутренней вершины, называется исходящей из фрагмента, ее начало — внутренним выходом из фрагмента, конец — внешним выходом.

На рис. 2 приведен фрагмент схемы над Y и P, называемый деревом распознавателей, произрастающим из вершины v схемы. Предполагается, что v — либо вход схемы, либо преобразователь, и v — единственный внешний вход фрагмента. Логические переменные $p_1, \ldots, p_m$ различны и в совокупности дают множество P. Дуги, исходящие из распознавателей с переменной p_m, являются исходящими из фрагмента.

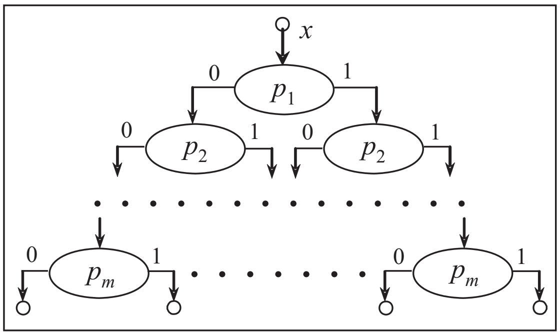

Рис. 2

Пустым циклом в схеме называется распознаватель, исходящие из которого дуги ведут в него же.

По определению *и*-схемой называется такая схема над Y и P, структура которой удовлетворяет следующим требованиям:

1) из входа схемы и любого принадлежащего ей преобразователя произрастает свое собственное дерево распознавателей;

2) всякий принадлежащий схеме распознаватель либо содержится в одном из упомянутых деревьев распознавателей, либо является пустым циклом;

3) всякий преобразователь, принадлежащий схеме, принадлежит какому-либо ориентированному пути из ее входа в выход.

Легко увидеть, что в *и*-схеме, каким бы ни было принадлежащее ей дерево распознавателей, любая исходящая из дерева распознавателей дуга ведет либо в выход схемы, либо в преобразователь, либо в пустой цикл.

Теорема 1 базируется на лемме 1, доказанной в [9].

Лемма 1. Существует алгоритм, который по любой схеме над Y и P строит *и*-схему, и последняя эквивалентна исходной в любой алгебраической модели программ над Y и P.

Опускаем описание этого алгоритма, приводя на рис. 3 *и*-схему, построенную с его помощью для схемы с рис. 1.

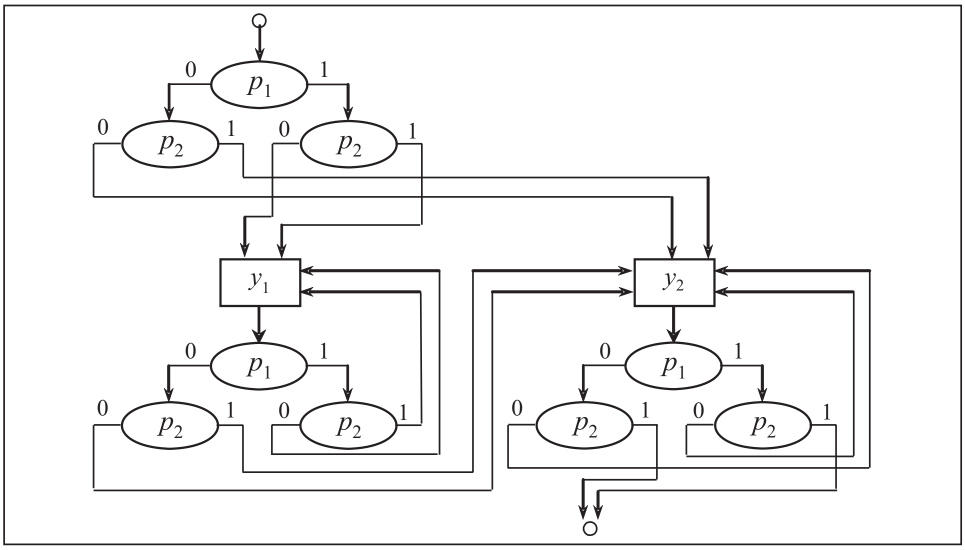

Рис. 3

Пусть полугрупповая модель программ над Y и P имеет параметры ν и L; обозначим ее $\mathfrak{M}$.

Предполагаем, что ν — разрешимая эквивалентность в Y^*, т.е. существует алгоритм, который, получив на свой вход две цепочки из Y^*, распознает, эквивалентны они или нет.

Опираясь на теорему 2, рассмотрим *u*-схемы, принадлежащие выбранной модели, обозначив $\mathfrak{M}_u$ их множество.

Цель данного раздела состоит в том, чтобы выявить требования, предъявляемые к схемам из $\mathfrak{M}_u$ и достаточные для отношения эквивалентности схем.

Отношение эквивалентности схем G_1, G_2 из $\mathfrak{M}$ запишем в виде $G_1 \sim G_2$ и введем ряд понятий.

Пусть G — схема из $\mathfrak{M}_u$, v — вход схемы или преобразователь, x — набор из X; *x*-переходом из вершины v назовем путь, начинающийся в v и завершающийся такой ветвью дерева распознавателей, произрастающего из v, метки дуг которого составляют набор x.

В схеме G будем рассматривать пути, состоящие из примыкающих один к другому *x*-переходов. Маршрутом назовем путь, начинающийся во входе схемы G. Если маршрут завершается в выходе схемы G, то назовем его маршрутом через схему G.

Всякий конечный маршрут w (он завершается или в выходе, или в пустом цикле, или в преобразователе) представим в виде

$$v_0 \overset{x_0}{\to} v_1 \overset{x_1}{\to} \ldots v_k \overset{x_k}{\to},$$

где $v_j \overset{x_j}{\to}$, $j = 0, \ldots, k$, — запись x_j-перехода из вершины v_j. Число $k+1$ назовем нормой маршрута w и обозначим ее $||w||$; используем обозначение $x_k = x(w)$.

Слово $y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_k}$, где y_{i_j} — символ, сопоставленный преобразователю v_j, $j = 1, \ldots, k$, назовем цепочкой, несомой маршрутом w, и обозначим $h(w)$.

Введем отношение N-эквивалентности схем G_1, G_2 из $\mathfrak{M}_u$, где N — натуральное число, обозначая его как $G_1 \overset{N}{\sim} G_2$.

Полагаем: если маршрут в схеме прокладывается некоторой функцией разметки из L, то о любом его подмаршруте будем говорить как о тоже прокладываемом этой функцией, называя первый маршрут полным.

По определению схемы G_1, G_2 из $\mathfrak{M}_u$ N-эквивалентны, если, какой бы ни была функция разметки из L, она прокладывает в G_1, G_2 равновеликие по норме маршруты w_1, w_2, нормы которых не превышают числа N и которые оканчиваются в однотипных вершинах, причем в случае, когда их тип — выходы схем, выполняется

$$h(w_1) \overset{\nu}{\sim} h(w_2).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $G_1, G_2 \in \mathfrak{M}_u$, то для любого натурального N

$$G_1 \sim G_2 \Rightarrow G_1 \overset{N}{\sim} G_2.$$

Заметим, что равновеликость маршрутов w_1, w_2, фигурирующих в определении отношения $G_1 \overset{N}{\sim} G_2$, следует из отношения $G_1 \sim G_2$ и того свойства *u*-схем, что каждый преобразователь в *u*-схеме принадлежит маршруту через нее.

В дальнейшем будем опираться на следующее утверждение.

Утверждение 2. Каким бы ни было натуральное N, для схем G_1, G_2 из $\mathfrak{M}_u$ отношение их N-эквивалентности алгоритмически распознаваемо.

Действительно, для проверки достаточно просмотреть выполнение схем на подфункциях функций из L, определенных на операторных цепочках длины N. Все такие подфункции могут быть построены, и их число конечно.

Введем понятия, непосредственно используемые в лемме 3, являющейся основной в этом разделе.

Пусть G_1, G_2 — схемы из $\mathfrak{M}_u$ и n_i — число преобразователей в схеме G_i, называемое ее размером, $i = 1, 2$. Рассмотрим маршруты w_1, w_2 в G_1, G_2 соответственно, нормы которых не меньше числа $n_1 n_2 + 1$, полагая, что в случае, когда норма равна числу $n_1 n_2 + 1$, маршрут оканчивается в преобразователе.

В маршрутах w_1, w_2 имеются повторяющиеся пары равноудаленных от их начала преобразователей. Пусть v_1, v_1 — первая из них, v_i — преобразователь из G_i $i = 1, 2$. Разобьем маршруты w_1, w_2 на отрезки, полагая

$$w_i = w_i' \, w_i'' \, w_i''', \;\; i = 1, 2, \tag{1}$$

где маршруты w_1', w_2' оканчиваются первой встречей с преобразователями v_1, v_2, а маршруты $w_1' \, w_1''$ и $w_2' \, w_2''$ — следующей встречей с ними.

Отрезки w_1'', w_2'' назовем интервалами повтора в w_1, w_2, маршруты w_1', w_2' — подводящими к интервалам повтора, а маршруты $w_1' \, w_1'''$ и $w_2' \, w_2'''$ — полученными сокращением маршрутов w_1, w_2 на интервалы повтора. Отрезку w_i'' припишем операторную цепочку, построенную удалением из цепочки $h(w_i' \, w_i'')$ ее начала — цепочки $h(w_i')$; приписанную цепочку называем несомой отрезком w_i'', $i = 1, 2$.

В доказательстве леммы 3 используется понятие сочетаемости маршрутов и применяется лемма 2, формулирующая критерий сочетаемости.

Пусть w_1, w_2 — маршруты в схемах из $\mathfrak{M}_u$. Назовем их сочетаемыми, если существует такая функция разметки из L, которая прокладывает в схемах пути, начинающиеся этими маршрутами.

Критерий сочетаемости маршрутов установим в случае, когда модель $\mathfrak{M}$ обладает следующим свойством: для любых h из Y^*

$$h \overset{\nu}{\sim} e \Leftrightarrow h = e,$$

где e — пустая цепочка из Y^*. Назовем $\mathfrak{M}$ моделью без разложимой единицы.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. В полугрупповой модели программ без разложимой единицы маршруты в схемах сочетаемы тогда и только тогда, когда для любых их собственных подмаршрутов u_1, u_2 выполняется требование

$$h(u_1) \overset{\nu}{\sim} h(u_2) \Rightarrow x(u_1) = x(u_2).$$

Доказательство. Необходимость требования леммы вытекает из определения функций, принадлежащих множеству L.

Достаточность требования устанавливается построением функции из L, прокладывающей пути в схемах, которые начинаются маршрутами w_1, w_2, удовлетворяющими требованию леммы.

Искомая функция μ определяется следующим образом: для любой цепочки h из Y^* имеем

$$\mu h = \begin{cases} x(u_1), & \text{если } h \overset{\nu}{\sim} h(u_1), \quad \text{где } u_1 \text{ — подмаршрут маршрута } w_1; \\ x(u_2), & \text{если } h \overset{\nu}{\sim} h(u_2), \quad \text{где } u_2 \text{ — подмаршрут маршрута } w_2; \\ x_0 & \text{в противном случае,} \quad \text{где } x_0 \text{ — некоторый набор из } X. \end{cases}$$

Корректность определения функции μ следует, во-первых, из неразложимости единицы, согласно чему возможны только три ситуации, указанные в определении μ, во-вторых, из равенства $x(u_1) = x(u_2)$, если одновременно имеют место первые две ситуации; это равенство обеспечивается предположением о том, что w_1, w_2 удовлетворяют требованию леммы.

Очевидно, что $\mu \in L$.

Лемма 2 доказана.

Отметим, что сочетаемость конечных маршрутов алгоритмически распознаваема в силу алгоритмической распознаваемости ν-эквивалентности цепочек из Y^*.

Преобразователи, принадлежащие схемам из $\mathfrak{M}'_u$, назовем сопряженными, если в них оканчиваются маршруты, несущие эквивалентные цепочки; эти маршруты называем подтверждающими сопряженность преобразователей.

Считаем, что полугрупповая модель программ обладает левым сокращением, если эквивалентность ν в такой модели удовлетворяет требованию: какими бы ни были цепочки h_1, h_2, h_3, h_4 из Y^*, имеем

$$(h_1 h_2 \overset{\nu}{\sim} h_3 h_4) \,\&\, (h_1 \overset{\nu}{\sim} h_3) \Rightarrow h_2 \overset{\nu}{\sim} h_4 .$$

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель с неразложимой единицей и левым сокращением. Достаточными условиями отношения $G_1 \sim G_2$, где G_1, G_2 — схемы из $\mathfrak{M}_u$ размеров n_1, n_2 соответственно, являются требования:

1) $G_1 \overset{n_1 n_2 + 1}{\sim} G_2$;

2) какой бы ни была функция из L, прокладывающая в G_1, G_2 маршруты нормы $n_1 n_2 + 1$, эти маршруты обладают свойством: их интервалы повтора начинаются в сопряженных преобразователях и несут эквивалентные цепочки.

Доказательство. Пусть G_1, G_2 — схемы из $\mathfrak{M}_u$, для которых выполнены требования 1) и 2). Рассмотрим произвольную функцию разметки μ из L и докажем утверждение: если одна из схем G_1, G_2 останавливается на функции μ, то другая останавливается тоже, и результаты их выполнения на μ — эквивалентные цепочки.

Пусть w_1, w_2 — полные маршруты, пролагаемые функцией μ в схемах G_1, G_2 соответственно. Предположим, что на μ останавливается схема G_1, т.е. w_1 — маршрут через нее.

Если $||w_1|| \le n_1 n_2 + 1$, то справедливость утверждения следует из отношения 1).

Из этого отношения также вытекает, что неравенство $||w_1|| > n_1 n_2 + 1$ влечет за собой неравенство $||w_2|| > n_1 n_2 + 1$, так как подмаршруты маршрутов w_1, w_2, имеющие норму $n_1 n_2 + 1$, должны оканчиваться в преобразователях.

Воспользуемся в этом случае свойством 2), представив маршруты w_1, w_2 в разбивке (1). Тогда согласно свойству 2) имеем

$$h(w_1') \overset{\nu}{\sim} h(w_2'), \tag{2}$$

$$h(w_1'') \overset{\nu}{\sim} h(w_2''). \tag{3}$$

Сократим w_1, w_2 на интервалы повтора w_1'', w_2''. По лемме 2 сокращенные маршруты $w_1' w_1'''$, $w_2' w_2'''$ сочетаемы, т.е. существует функция в L, прокладывающая эти маршруты; обозначим ее μ'.

Если $||w_1' w_1'''|| \le n_1 n_2 + 1$, то из отношения 1) следует, что $w_2' w_2'''$ — маршрут через G_2. Следовательно, w_2 — тоже маршрут через G_2.

Покажем, что

$$h(w_1) \overset{\nu}{\sim} h(w_2). \tag{4}$$

Поскольку

$$h(w_1' w_1''') \overset{\nu}{\sim} h(w_2' w_2''') \tag{5}$$

и имеет место (2), применив правило левого сокращения, получим

$$h(w_1''') \overset{\nu}{\sim} h(w_2''') .$$

Тогда из (2), (3), (5) вытекает (4).

Таким образом, в случае, когда $||w_1' w_1'''|| \le n_1 n_2 + 1$, утверждение справедливо.

Если же $||w_1' w_1'''|| > n_1 n_2 + 1$, то в проведенных ранее рассуждениях роль функции μ передается функции μ'.

Действуя описанным образом, через конечное число шагов убедимся в справедливости утверждения.

Лемма 3 доказана.

Техника, примененная при доказательстве леммы 3, называется техникой следов.

Очевидным является следующее утверждение.

Утверждение 3. Проверка условий 1) и 2) из леммы 3 реализуема алгоритмами.

Поставим следующую базовую задачу: из множества полугрупповых моделей $\mathfrak{M}$ с неразложимой единицей и левым сокращением выделить модели, для которых проблема эквивалентности в $\mathfrak{M}_u$ сводится к проблеме эквивалентности в таком подмножестве схем из $\mathfrak{M}_u$, в котором условия 1) и 2) являются критерием отношения эквивалентности схем.

Задача названа базовой потому, что ее решением определяются модели, в которых техникой следов устанавливается разрешимость проблемы эквивалентности.

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕХНИКОЙ СЛЕДОВ ПРОБЛЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В УРАВНОВЕШЕННОЙ ПОЛУГРУППОВОЙ МОДЕЛИ ПРОГРАММ С ЛЕВЫМ СОКРАЩЕНИЕМ

Решим базовую задачу.

По определению полугрупповая модель программ с параметрами ν и L называется уравновешенной, если в ней из ν-эквивалентности цепочек следует равенство их длин.

Очевидным является следующее утверждение.

Утверждение 4. Уравновешенная полугрупповая модель программ имеет неразложимую единицу.

Таким образом, для рассматриваемой модели справедлива лемма 3.

Полагаем далее, что $\mathfrak{M}'$ — уравновешенная полугрупповая модель с левым сокращением, и проведем анализ структуры принадлежащих ей эквивалентных схем из $\mathfrak{M}_u'$.

Для схемы G из $\mathfrak{M}_u'$ введем понятие куста с корнем в преобразователе v, принадлежащем схеме G. Это по определению — фрагмент схемы G, удовлетворяющий следующим требованиям:

• v — внутренний вход фрагмента;

• вместе с каждым преобразователем, являющимся внутренней вершиной фрагмента, внутренними являются и все распознаватели дерева, произрастающего из этого преобразователя;

• все ориентированные пути из вершины v к внутренним выходам фрагмента простые и равновеликие по длине; принадлежащие им преобразователи распределяются на уровни по принципу равноудаленности от v;

• для любого уровня, кроме последнего, выполняется свойство: каким бы ни был набор x из X, x-преемник любого преобразователя, принадлежащего этому уровню, находится на следующем по удаленности от v уровне;

• все ориентированные пути из v, завершающиеся выходящими дугами фрагмента, несут эквивалентные между собой цепочки.

Класс v-эквивалентности, которому принадлежат указанные цепочки, называется маркером куста с корнем в v.

Основной в данном разделе является следующая лемма.

Лемма 4. Пусть G_1, G_2 — эквивалентные u-схемы, принадлежащие уравновешенной полугрупповой модели с левым сокращением, v_1, v_2 — сопряженные преобразователи схем G_1, G_2 соответственно, помеченные различными операторными символами. Тогда v_1, v_2 являются корнями кустов с общим для них маркером.

Доказательству леммы 4 предпошлем используемые в нем понятия.

Пусть v_1, v_2 — сопряженные преобразователи схем G_1, G_2 и w_1, w_2 — маршруты в G_1, G_2 соответственно, подтверждающие сопряженность. Рассмотрим в схемах маршруты $w_1 w_1'$ и $w_2 w_2'$. Если они сочетаемы, то и пути w_1', w_2' будем называть сочетаемыми. Нормой пути w_i', $i=1,2$, назовем число $||w_i w_i'||-||w_i||$; цепочкой, несомой путем w_i', — цепочку, полученную удалением из $h(w_i w_i')$ ее начала $h(w_i)$; обозначим ее $h(w_i')$; в случае, когда w_i' оканчивается в преобразователе, полной цепочкой, несомой путем w_i', назовем $h(w_i')y$, где y — символ, приписанный этому преобразователю.

Доказательство. Полагаем выполненной посылку леммы. Пусть u_1, u_2 — маршруты, подтверждающие сопряженность преобразователей v_1, v_2. В силу уравновешенности полугруппы $||u_1|| = ||u_2||$.

Обозначим W^1 множество ориентированных путей из v_1 в выход схемы G_1, имеющих минимальную норму. Непустота множества W^1 следует из того, что G_1 — u-схема.

Рассмотрим схему G_2. Из отношения $G_1 \sim G_2$ и сопряженности v_1, v_2 следует, что для всякого маршрута $u_1 w_1$, где $w_1 \in W^1$, имеются маршруты, продолжающие маршрут u_2 и несущие цепочки, эквивалентные цепочке $h(u_1 w_1)$. Обозначим W^2 множество путей, продолжающих в этих маршрутах маршрут u_2.

Из уравновешенности рассматриваемой модели и равенства $||u_1|| = ||u_2||$ следует, что норма любого пути из W^2 совпадает с нормой путей из W^1. Отсюда вытекает утверждение: всякий путь, принадлежащий одному из множеств W^1, W^2, сочетаем с каким-либо путем, принадлежащим другому множеству.

Поскольку $h(u_1) \overset{v}{\sim} h(u_2)$ и имеет место правило левого сокращения, все пути из $W^1 \cup W^2$ несут эквивалентные цепочки.

Обозначим $\bar{k}$ норму путей из W^1, W^2.

Пусть W_j^i — множество путей нормы j, $j = 0, \ldots, \bar{k}$, являющихся начальными отрезками путей из W^i, и V_j^i — множество вершин, в которых оканчиваются пути из W_j^i, $i=1,2$. Так как все пути из $W^1 \cup W^2$ несут эквивалентные цепочки, а рассматриваемая модель уравновешенная, существует наименьшее из чисел j, где $j < \bar{k}$, для которого все пути из $W^1 \cup W^2$ несут эквивалентные полные цепочки. Обозначим это число k. Из того, что преобразователи v_1, v_2 помечены различными операторными символами, следует неравенство $k \ge 1$.

Докажем, что для любого j, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, выполняются свойства:

1) какой бы ни была вершина v из V_j^i и каким бы ни был набор x из X, x-преемником вершины v является вершина из V_{j+1}^i, $i=1,2$;

2) какими бы ни были пути w^1, w^2, где $w^i \in W_{j+1}^i$, $i=1,2$, они соединены цепью, т.е. существует последовательность

$$w_1, w_2, \ldots, w_l, \ l \ge 2,$$

состоящая из путей множества $W^1_{j+1} \cup W^2_{j+1}$, в которой $w_1 = w^1$, $w_l = w^2$, и всякие два соседних элемента последовательности — сочетаемые пути.

Свойства 1) и 2) установим индукцией по j.

Путь, полученный продолжением пути w на x-переход из последней его вершины, запишем как $[w,x]$, $x \in X$.

Базис индукции — $j=0$. В этом случае V^i_0 состоит из одной вершины, а именно υ_i, $i=1,2$. Так как υ_1, υ_2 помечены различными символами, всякий путь из множества

$$\{[w^1_0, x'] \mid x' \in X\} \tag{6}$$

сочетаем с любым путем из множества

$$\{[w^2_0, x''] \mid x'' \in X\}, \tag{7}$$

где w^i_0 состоит только из вершины υ_i, $i=1,2$. Это следует из критерия сочетаемости маршрутов, устанавливаемого леммой 2 и действующего для рассматриваемой модели.

Очевидно, что хотя бы один из путей множества (6) принадлежит множеству W^1_1 и, следовательно, является началом некоторого пути из W^1. Но тогда все пути множества (7) сочетаемы с этим путем, находясь в множестве W^2_1. В множество W^2_1 попали начальные отрезки путей из W^2, для каждого из которых существует сочетаемый путь из W^1. Таким образом, для $j=0$ свойства 1) и 2) имеют место.

Шаг индукции. Предположим, что свойства 1) и 2) имеют место для $j=0,1,\ldots,s-1$, где $s<k$, и рассмотрим случай $j=s$.

Из выбора числа k следует, что в множестве $W^1_s \cup W^2_s$ имеются два сочетаемых пути, несущих неэквивалентные полные цепочки; пусть это пути w_1, w_2. Применив к ним лемму 2, получим: какими бы ни были x_1, x_2 из X, пути $[w_1, x_1], [w_2, x_2]$ сочетаемы. Среди них имеются пути из множества $W^1_{s+1} \cup W^2_{s+1}$, следовательно, для любого x из X x-преемники вершин, оканчивающих пути w_1, w_2, принадлежат множеству $V^1_{s+1} \cup V^2_{s+1}$.

Предположим, что $w_1 \in W^2_s$.

Возьмем произвольную вершину υ' из V^1_s, и пусть w' — путь из W^1_s, оканчивающийся в υ'. Покажем, что x-преемник вершины υ', где x — произвольный элемент из X, принадлежит множеству V^1_{s+1}.

С этой целью для путей $[w', x]$ и $[w_1, x]$ построим соединяющую цепь. Воспользуемся индуктивным предположением о существовании цепи, соединяющей w' и w_1, и заменим каждый ее элемент w путем $[w,x]$, не нарушая имеющегося порядка их следования в цепи. Очевидно, что построенная таким образом последовательность путей — цепь. И поскольку $[w_1, x]$ принадлежит W^2_{s+1}, путь $[w', x]$ должен принадлежать множеству W^1_{s+1}. Это означает, что x-преемник вершины υ' находится в V^1_{s+1}.

Отсюда, по лемме 2, следует, что и любой x-преемник вершин из множества V^2_s принадлежит множеству V^2_{s+1}. Таким образом, свойство 1) действительно имеет место.

Покажем теперь, что для любых путей $[w', x_1], [w'', x_2]$, где $w' \in W^1_s$, $w'' \in W^2_s$, $x_1, x_2 \in X$, существует соединяющая их цепь.

Рассмотрим пути w_1, w_2, несущие неэквивалентные полные цепочки; $w_1 \in W_s^2$, $w_2 \in W_s^1$. Возьмем две цепи: соединяющую w' с w_1 и соединяющую w_2 с w''; их существование следует из индуктивного предположения. Каждый элемент w первой цепи заменим путем $[w, x_1]$, а каждый элемент w второй цепи — путем $[w, x_2]$. Легко увидеть, что в результате получим две цепи: одна соединяет $[w', x_1]$ с $[w_1, x_1]$, другая — $[w_2, x_2]$ с $[w'', x_2]$. Приписывая к первой цепи вторую и пользуясь тем, что $[w_1, x_1]$ и $[w_2, x_2]$ сочетаемы, получим искомую цепь.

Итак, свойство 2) установлено, т.е. индуктивный шаг полностью исчерпан.

Лемма 4 доказана.

Схему из $\mathfrak{M}'_u$ назовем чистой, если во всяком принадлежащем ей кусте с корнем в преобразователе последний является единственным внутренним входом куста.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Проблема эквивалентности в множестве u-схем, принадлежащих уравновешенной полугрупповой модели программ с левым сокращением, сводится к проблеме эквивалентности в множестве чистых u-схем из этой модели.

Доказательство. Покажем, что существует алгоритм, который для произвольной схемы из $\mathfrak{M}'_u$ строит эквивалентную ей чистую схему.

Пусть G — схема из $\mathfrak{M}'_u$. Предполагаемый алгоритм работает следующим образом. Сначала он выявляет все принадлежащие схеме максимальные по размеру кусты с корнем в преобразователе.

Пусть F — такой куст с корнем в v. С ним проводится работа, если в F имеются внутренние входы, отличные от v. Каждый из них определяет свой подфрагмент фрагмента F. Считаем, что ранг подфрагмента, целиком принадлежащего другому подфрагменту, меньше ранга последнего. Алгоритм осуществляет посредством копирования отклейку от F его подфрагментов, рассматривая их в порядке возрастания рангов. Каждая операция отклейки — эквивалентное преобразование схемы, число операций конечно. В результате работы с кустом F он трансформируется в куст с единственным внутренним входом. Конечность числа обрабатываемых кустов и конечность принадлежащих кустам подфрагментов гарантируют, что алгоритм преобразует схему G в чистую и эквивалентную ей схему за конечное число операций отклейки.

Лемма 5 доказана.

Обозначим M множество схем из $\mathfrak{M}'_u$, в которое по лемме 5 сводится проблема эквивалентности.

Лемма 6. В множестве M условия 1) и 2) из леммы 3 являются критерием отношения эквивалентности схем.

Доказательство. Пусть G_1, G_2 — схемы из M размеров n_1, n_2 соответственно. Требуется установить, что из отношения $G_1 \sim G_2$ следуют условия 1) и 2) из леммы 3. Выполнимость условия 1) вытекает из утверждения 1.

Покажем, что выполнимо условие 2).

Возьмем произвольную функцию разметки μ из L и рассмотрим равновеликие маршруты w_1, w_2, прокладываемые функцией μ в G_1, G_2 соответственно и имеющие норму, не превышающую числа $n_1 n_2 + 1$.

На основании леммы 4 и чистоты схем G_1, G_2 маршруты w_1, w_2 представимы в виде

$$w_i = u_{i0} w_{i1} \ldots u_{ik} w_{ik} u_{ik+1}, \quad i = 1, 2,$$

где для любого j, $j = 0, \ldots, k+1$, пути u_{1j} и u_{2j} несут равные цепочки, возможно пустые, а для любого j, $j = 0, \ldots, k$, пути w_{1j}, w_{2j} начинаются в сопряженных преобразователях, которым приписаны различные операторные символы, являются путями в кустах с корнем в этих преобразователях и таковы, что $h(w_{1j}) \overset{\nu}{\sim} h(w_{2j})$.

Очевидно, что для маршрутов w_1, w_2 первая повторяющаяся пара равноудаленных от их начала преобразователей принадлежит либо отрезкам типа *u*, либо отрезкам типа *w*, поскольку в чистой схеме отрезки одного и другого типа не имеют общих преобразователей.

Отсюда вытекает как сопряженность преобразователей, принадлежащих первой повторяющейся паре, так и эквивалентность цепочек, которые несут интервалы повтора.

Таким образом, свойство 2) из леммы 3 имеет место.

Лемма 6 доказана.

Результатом проведенных исследований является следующая теорема.

Теорема 3. В уравновешенной полугрупповой модели с левым сокращением техникой следов устанавливается разрешимость проблемы эквивалентности.

Действительно, как было доказано теоремой 2 и леммой 5, проблема эквивалентности в рассматриваемой модели сводится к проблеме эквивалентности чистых схем, принадлежащих модели. Разрешимость этой проблемы следует из леммы 6 и утверждения 3.

Во введении отмечалось, что сам факт разрешимости не является новым, однако новизна в том, что при этом использовалась техника следов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подловченко Р.И. Иерархия моделей программ // Программирование. — 1981. — № 2. — С. 3–14.
2. Ляпунов А.А. О логических схемах программ // Пробл. кибернетики. — 1958. — Вып. 1. — С. 46–74.
3. Янов Ю.И. О логических схемах алгоритмов // Там же. — 1958. — Вып. 1. — С. 75–127.
4. Глушков В.М., Летичевский А.А. Теория дискретных преобразователей // Избр. вопр. алгебры и логики. — Новосибирск: Наука, 1973. — С. 5–39.
5. Летичевский А.А. Эквивалентность автоматов относительно полугрупп с сокращением // Пробл. кибернетики. — 1973. — Вып. 27. — С. 195–212.
6. Трахтенброт Б.А. Сложность алгоритмов и вычислений (спецкурс для студентов НГУ). — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1967. — 258 с.
7. Подловченко Р.И. Полугрупповые модели программ // Программирование. — 1981. — № 4. — С. 3–13.
8. Подловченко Р.И. От схем Янова к теории моделей программ // Мат. вопр. кибернетики. — 1998. — Вып 7. — С. 281–302.
9. Подловченко Р.И. Алгоритм канонизации пар схем программ с перестановочными операторами // Программирование. — 1997. — № 6. — С. 3–16.

Поступила 20.11.2008

Ключевые слова на английском
algebraic model of programs, equivalence checking problem, cross-section technique.