УДК 517.98

В.В. СЕМЕНОВ

ВЫПУКЛАЯ МАКСИМИЗАЦИЯ И СВОЙСТВО α ШАХЕРМАЙЕРА[1]

Ключевые слова: *выпуклый функционал, максимум, разрешимость, перенормировка, свойство α, вариационный принцип*.

В статье установлена связь между одним понятием геометрии банаховых пространств и существованием решений бесконечномерных задач выпуклой максимизации. Рассматриваются лишь действительные банаховы пространства. Замкнутый шар пространства E с радиусом $r > 0$ и центром в нуле обозначим $B_r(E)$.

Известно, что в рефлексивном банаховом пространстве полунепрерывный снизу выпуклый функционал достигает минимума на произвольном ограниченном замкнутом выпуклом множестве. Однако существуют даже в бесконечномерном гильбертовом пространстве ограниченные замкнутые выпуклые множества, не имеющие элемента с максимальной нормой, а также неограниченные сверху на замкнутом шаре выпуклые непрерывные функционалы. В работе [1] дано простое описание класса выпуклых функционалов, достигающих супремума на произвольном ограниченном замкнутом выпуклом подмножестве рефлексивного банахова пространства.

Нетривиальность задач выпуклой максимизации также заключена в возможном существовании локальных максимумов, не являющихся глобальными. Это усложняет вид условий глобального максимума. Данный круг вопросов содержательно изучен в [2].

В работах [3, 4] показано, что если $f: E \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ — собственный выпуклый $\sigma(E, E^*)$-полунепрерывный снизу функционал, удовлетворяющий условию Липшица на $\sigma(E, E^*)$-компактном выпуклом множестве $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $x^* \in E^*$ такой, что $\| x^* \|_{E^*} < \varepsilon$ и задача $f + x^* \to \sup\limits_X$ разрешима. Это утверждение является обобщением результата Линденштраусса [5, 6] о сильной плотности множества линейных непрерывных операторов, вторые сопряженные которых достигают своей нормы на единичном замкнутом шаре банахова пространства. Компактность множества X в топологии $\sigma(E, E^*)$ играет важную роль в рассуждениях [3, 4].

Далее покажем, что при выполнении определенного геометрического условия результат, аналогичный доказанному в работе [3], будет справедлив для задачи максимизации выпуклого функционала, заданного на шаре банахова пространства E, и без условия слабой компактности шара, т.е. без условия рефлексивности пространства E.

При изучении вопроса о плотности множества линейных непрерывных операторов, достигающих нормы, В. Шахермайер ввел и начал изучать класс банаховых пространств с геометрией, близкой к геометрии пространства l_1 со стандартной нормой.

Определение 1 [7]. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойство α, если существуют число $\lambda \in [0,1)$ и семья $\{(e_\alpha, e_\alpha^*)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subseteq E \times E^*$ такие, что:

1) $\| e_\alpha \|_E = \| e_\alpha^* \|_{E^*} = \langle e_\alpha^*, e_\alpha \rangle_{E^*, E} = 1 \ \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

2) $| \langle e_\alpha^*, e_\beta \rangle_{E^*, E} | \le \lambda$ при $\alpha \ne \beta$;

3) $B_1(E) = \overline{\mathrm{conv}} \{\pm e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.

Строение единичного шара пространства, имеющего свойство α, подобно строению единичного шара пространства l_1 (в этом случае $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$, $\lambda = 0$, $\{e_n\}$ — стандартный базис Шаудера в l_1, $\{e_n^*\} \subseteq l_\infty$ — соответствующие биортогональные функционалы).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

Рассмотрим задачу максимизации выпуклого функционала на замкнутом шаре пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ со свойством α. Пусть функционал f — выпуклый и ограниченный сверху на $B_1(E)$. Имеем экстремальную задачу

$$f \to \sup_{B_1(E)} . \tag{1}$$

Действительно, задача (1) не всегда имеет решения. Но геометрическое свойство α обеспечивает возможность с помощью сколь угодно малых линейных возмущений $x^* \in E^*$ получить из задачи (1) разрешимую задачу

$$f + x^* \to \sup_{B_1(E)} .$$

Теорема 1. Пусть банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойство α, $f: E \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал, ограниченный сверху на единичном шаре $B_1(E)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $x^* \in E^*$ такой, что $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ и функционал $f + x^*$ достигает супремума на $B_1(E)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sup_{x \in B_1(E)} f(x) = \sup_{x \in \{\pm e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}} f(x)$, то можем выбрать $\alpha \in \mathfrak{A}$ так, что

$$f(e_\alpha) > \sup_{x \in B_1(E)} f(x) - \varepsilon \frac{1-\lambda}{2} \quad \text{или} \quad f(-e_\alpha) > \sup_{x \in B_1(E)} f(x) - \varepsilon \frac{1-\lambda}{2}.$$

Рассмотрим случай для выбранного e_α (для $-e_\alpha$ все рассуждения аналогичны). Определяем функционал $x^* \in E^*$ следующим образом:

$$x^* = \frac{\varepsilon}{2} e_\alpha^* .$$

Понятно, что $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$. Покажем, что функционал $f + x^*$ достигает своего максимума на шаре $B_1(E)$ в точке e_α.

Имеем

$$f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha \rangle_{E^*, E} > \sup_{x \in B_1(E)} f(x) - \varepsilon \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sup_{x \in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} .$$

Далее,

$$f(-e_\alpha) + \langle x^*, -e_\alpha \rangle_{E^*, E} \le \sup_{x \in B_1(E)} f(x) - \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sup_{x \in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} < f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha \rangle_{E^*, E}$$

и для $\beta \ne \alpha$

$$f(\pm e_\beta) + \langle x^*, \pm e_\beta \rangle_{E^*, E} \le \sup_{x \in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \langle e_\alpha^*, \pm e_\beta \rangle_{E^*, E} \le$$

$$\le \sup_{x \in B_1(E)} f(x) + \frac{\varepsilon\lambda}{2} < f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha \rangle_{E^*, E} .$$

Таким образом, получили

$$f(e_\alpha) + \langle x^*, e_\alpha \rangle_{E^*, E} = \sup_{\beta \in \mathfrak{A}} \{ f(e_\beta) + \langle x^*, e_\beta \rangle_{E^*, E} \} = \sup_{x \in B_1(E)} \{ f(x) + \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} \},$$

что и требовалось доказать. ■

Справедлив следующий результат об эквивалентной перенормировке банаховых слабо компактно порожденных пространств [6].

Теорема 2 [7]. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ — банахово *WCG*-пространство. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ на E существует норма $|||\cdot|||$ такая, что $B_1(E) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq B_{3+\varepsilon}(E)$ и пространство $(E, |||\cdot|||)$ имеет свойство α.

Из теорем 1 и 2 непосредственно следует теорема.

Теорема 3. На банаховом *WCG*-пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$ можно задать такую эквивалентную норму $|||\cdot|||$, что для произвольных ограниченного сверху выпуклого функционала f, заданного на новом единичном шаре $B(|||\cdot|||)$, и $\varepsilon > 0$ существует вектор

$x^* \in E^*$ такой, что $\|x^*\|_{E^*} < \varepsilon$ и функционал $f + x^*$ достигает супремума на $B(|||\cdot|||)$.

Замечание. В работе [7] В. Шахермайер доказал, помимо упомянутой теоремы 2, еще ряд интересных утверждений об эквивалентных перенормировках пространств:

1) если банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ суперрефлексивно (т.е. $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет эквивалентную равномерно выпуклую норму [6]), то $\forall \varepsilon > 0$ на E существует норма $|||\cdot|||$ такая, что $B(|||\cdot|||) \subseteq B_1(E) \subseteq (1+\varepsilon) B(|||\cdot|||)$ и пространство $(E, |||\cdot|||)$ имеет свойство α;

2) $\forall \varepsilon > 0$ на c_0 существует норма $|||\cdot|||$ такая, что $B_1(c_0) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq$ $\subseteq B_{1+\varepsilon}(c_0)$ и пространство $(c_0, |||\cdot|||)$ имеет свойство α;

3) $\forall \varepsilon > 0$ на l_∞ существует норма $|||\cdot|||$ такая, что $B_1(l_\infty) \subseteq B(|||\cdot|||) \subseteq$ $\subseteq B_{2+\varepsilon}(l_\infty)$ и пространство $(l_\infty, |||\cdot|||)$ имеет свойство α.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ — банаховы пространства; $A \in \mathcal{L}(E, F)$ — линейный непрерывный оператор, действующий из E в F; $f: F \to \mathbb{R}$ — непрерывная полунорма.

Рассмотрим теперь следующую экстремальную задачу:

$$f(Ax) \to \sup_{x \in B_1(E)}. \tag{2}$$

Отметим, что если в задаче (2) $f(\cdot) = \|\cdot\|_F$, то получим задачу вычисления нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ оператора $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

Применим к задаче (2) теорему 1.

Теорема 4. Пусть банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивно или имеет свойство α. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует оператор $B \in \mathcal{L}(E, F)$ такой, что $\|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon$, $\dim R(B) = 1$ и задача

$$f(Ax + Bx) \to \sup_{x \in B_1}$$

имеет решения.

Доказательство. Пусть $\sup_{x \in B_1(E)} p(x) = \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax) = M > 0$ и $\varepsilon > 0$. Если пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивно, то по теореме 4 работы [3] существует функционал $x^* \in E^*$ такой, что

$$\|x^*\|_{E^*} < \min\left\{\frac{M}{4}, \frac{3M\varepsilon}{4\|A\|_{(E,F)}}\right\}$$

и $p + x^*$ достигает супремума на шаре $B_1(E)$ в точке $x_0 \in B_1(E)$.

Если пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ нерефлексивно и имеет свойство α, то существование такого функционала x^* следует из теоремы 1.

Поскольку $\forall x \in B_1(E)$

$$p(x) + \langle x^*, x\rangle_{E^*, E} \le p(x_0) + \langle x^*, x_0\rangle_{E^*, E},$$

то симметричность p и $B_1(E)$ обеспечивает выполнение $\forall x \in B_1(E)$ неравенства

$$p(-x) - \langle x^*, -x\rangle_{E^*, E} = p(x) + \langle x^*, -x\rangle_{E^*, E} \le$$

$$\le p(x_0) + \langle x^*, -x_0\rangle_{E^*, E} = p(-x_0) - \langle x^*, -x_0\rangle_{E^*, E},$$

т.е. $p - x^*$ достигает супремума на шаре $B_1(E)$ в точке $-x_0 \in B_1(E)$. Значит, функционал $p + \alpha x^*$ $(\alpha \in \{-1, 1\})$ достигает супремума на шаре $B_1(E)$ в точке $\bar{x} \in \{-x_0, x_0\}$.

Выберем число $\alpha \in \{-1, 1\}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + \alpha\langle x^*, x\rangle_{E^*, E}\} = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + |\langle x^*, x\rangle_{E^*, E}|\}.$$

Таким образом,

$$f(A\bar{x}) + \alpha\langle x^*, \bar{x}\rangle_{E^*, E} = \sup_{x \in B_1(E)} \{f(Ax) + \alpha\langle x^*, x\rangle_{E^*, E}\} =$$

$$= \sup_{x \in B_1(E)} \{ f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*, E}| \}.$$

Имеет место неравенство

$$\sup_{x \in B_1(E)} \{ f(Ax) + \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} \} = \sup_{x \in B_1(E)} \{ f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*, E}| \} \geq$$

$$\geq \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax) = M > 0.$$

Отсюда

$$f(A\bar{x}) = f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} - \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} =$$

$$= \sup_{x \in B_1(E)} \{ f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*, E}| \} - \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} \geq M - \| x^* \|_{E^*} > \frac{3}{4} M > 0.$$

Оценим отношение $|\langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E}| / f(A\bar{x})$. Имеем

$$0 \leq \frac{|\langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E}|}{f(A\bar{x})} \leq \frac{M/4}{3M/4} = \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим следующий оператор $E \xrightarrow{B} F$:

$$E \ni x \to Bx = \alpha \langle x^*, x \rangle_{E^*, E} \frac{A\bar{x}}{f(A\bar{x})} \in F.$$

Понятно, что $B \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim R(B) = 1$ и $\| B \|_{\mathcal{L}(E, F)} < \varepsilon$.

Для $x \in B_1(E)$ имеем

$$f(Ax + Bx) \leq f(Ax) + f(Bx) = f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*, E}| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in B_1(E)} \{ f(Ax) + |\langle x^*, x \rangle_{E^*, E}| \} = f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E}. \qquad (3)$$

Положим $x = \bar{x}$ в $f(Ax + Bx)$. Тогда справедливо равенство

$$f(A\bar{x} + B\bar{x}) = f\left(A\bar{x} + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} \frac{A\bar{x}}{f(A\bar{x})} \right) =$$

$$= f(A\bar{x}) \left| 1 + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} \frac{1}{f(A\bar{x})} \right| = f(A\bar{x}) \left(1 + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E} \frac{1}{f(A\bar{x})} \right) =$$

$$= f(A\bar{x}) + \alpha \langle x^*, \bar{x} \rangle_{E^*, E}. \qquad (4)$$

Объединив (3) и (4), получим

$$f(A\bar{x} + B\bar{x}) = \sup_{x \in B_1(E)} f(Ax + Bx),$$

что и доказывает теорему 4. ■

Таким образом, в статье доказано, что при наличии в банаховом пространстве E свойства α Шахермайера экстремальная задача $f \to \sup_{B_1(E)}$ с выпуклым ограниченным сверху на шаре $B_1(E)$ функционалом f допускает линейный вариационный принцип. Иными словами, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $x^* \in E^*$ такой, что $\| x^* \|_{E^*} < \varepsilon$ и задача $f + x^* \to \sup_{B_1(E)}$ разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляшко С.И., Семенов В.В., Кацев М.В. Замечания о достижимости супремума выпуклым функционалом // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1–2. — С. 81–86.
2. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. — Новосибирск: Наука, 2003. — 355 с.
3. Семенов В.В., Кацев М.В. Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації // Доп. НАН України. — 2007. — № 3. — С. 51–58.
4. Семенов В.В. Линейный вариационный принцип для выпуклой векторной максимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 105–114.
5. Lindenstrauss J. On operators which attain their norm // Israel J. Math. — 1963. — **1.** — P. 139–148.
6. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. — Киев: Вища шк., 1980. — 215 с.
7. Schachermayer W. Norm attaining operators and renormings of Banach spaces // Israel J. Math.— 1983. — **44,** N 3. — P. 201–212.

Поступила 22.08.2008