УДК 519.21

С.В. АНТОНЮК, В.К ЯСИНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПУАССОНОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ СО ВСЕЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ

Ключевые слова: *стохастическое дифференциально-функциональное уравнение, пространство Скорохода, пуассоновская мера, винеровский процесс, слабый инфинитезимальный оператор, сильное решение, устойчивость.*

Наиболее конструктивным и универсальным подходом к исследованию устойчивости детерминированых систем является концепция устойчивости по Ляпунову, а именно, метод функций Ляпунова (функционалов Ляпунова–Красовского) [10]. Главное превосходство этого метода заключается в возможности сделать вывод об устойчивости системы, для которой найти аналитический вид решения невозможно непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений.

Для построения теории устойчивости стохастических систем принципиально важными есть такие моменты:
- рассмотрение систем, которые владеют марковским свойством;
- концепция сильной вероятностной устойчивости, при которой возможно изучение асимптотического поведения реализаций случайного процесса-решения соответствующего стохастического уравнения;
- использование метода функций (функционалов), а именно, понятие производной для детерминированых систем или слабого инфинитиземального оператора для стохастических динамических систем, для вычисления которых не требуется интегрирование уравнения возмущенного движения.

1. МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО ВСЕЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ (СДФУ$_\infty$)

Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$ СДФУ$_\infty$

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{k} a_i(t,x^t)\,dt+\sum_{j=1}^{l}\left[b_j(t,x^t)\,dw_j(t)+\int_{\Theta} c_j(t,x^t,z)\widetilde{\nu}_j(d\theta,dt)\right] \quad \forall t\ge 0, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t)=\varphi(t,\omega) \qquad \forall\ t\in(-\infty,0]. \qquad (2)$$

Здесь $x(t)\in R^n$, $x^t\equiv\{x(t+z), -\infty<z\le 0\}\in X$, где X — пространство предыстории, т.е. пространство $R^n\times D_\rho^p$, а D_ρ^p — пространство Скорохода [1] локально ограниченых напрерывных справа функций φ: $R^+\to R^n$, имеющих левосторонние границы, таких что $\int_0^\infty |\varphi(s)|^p\,\rho(s)\,ds<\infty$.

Норма в пространстве X вводится следующим образом:

$$||\varphi||_X\equiv\left(|\varphi(0)|^p+\int_0^\infty|\varphi(s)|^p\,\rho(s)ds\right)^{1/p}=(|\varphi(0)|^p+||\varphi||_\rho^p)^{1/p}; \qquad (3)$$

$$||\varphi||_\rho^p<\infty,\ 1\le p<\infty.$$

Определение 1. Функция $\rho : R^+ \to R^+$ называется функцией сглаживающего действия, если она удовлетворяет таким условиям:

1) ρ суммируемая в R^+;

2) $\forall z \ge 0$ справедливы неравенства $\overline{K}(z) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{s\in R^+} \dfrac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le \overline{\overline{K}} < \infty$;

3) $\underline{K}(z) \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{s\in R^+} \dfrac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty$;

4) ρ ограничена в R^+;

5) $\rho > 0$ строго положительна на $s \in (0,\infty)$;

6) $s\rho(s) \to 0$, если $s \to \infty$.

Функционалы $a_i(t,x^t) \equiv a_i(t,x(t+z))$, $-\infty \le z \le 0$, $i=\overline{1,k}$, переводят $R_+ \times X$ в R^n; функционалы $b_j(t,x^t) \equiv b_j(t,x(t+z))$, $-\infty \le z \le 0$, $j=\overline{1,l}$, переводят $R_+ \times X$ в $M_n^n(R^n)$; функционалы $c_j(t,x^t,\theta) \equiv c_j(t,x(t+z),\theta)$, $-\infty \le z \le 0$, $j=\overline{1,l}$, переводят $R_+ \times X \times \Theta$ в R^n; $\{w_j(t) \equiv w_j(t,\omega),\ j=\overline{1,l},\ t \ge 0,\ \omega \in \Omega\}$ — скалярные стандартные винеровские процессы; $\tilde{\nu}_j(d\theta,\,dt) \equiv \nu_j(d\theta,\,dt) - \Pi_j(d\theta)\,dt$, $j=\overline{1,l}$, — центрированные скалярные пуассоновские меры [3], причем $w_j(t)$ попарно независимые и не зависят от $\tilde{\nu}_j$.

Изучим марковское свойство решений уравнения (1), которое будет использоваться как основной инструмент при исследовании устойчивости таких уравнений.

Пусть: 1) a_i, $i=\overline{1,k}$; b_j и c_j, $j=\overline{1,l}$, измеримы по совокупности переменных;

2) выполняется условие Липшица по второму аргументу: существует постоянная $L>0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(t,\varphi)-a_i(t,\psi)| + \sum_{j=1}^{l} \Bigg[|b_j(t,\varphi)-b_j(t,\psi)| + \\ + \int_{\Theta} |c_j(t,\varphi,\theta)-c_j(t,\psi,\theta)| \Pi_j(d\theta) \Bigg] \le L\|\varphi-\psi\|_X \quad \forall\, \varphi,\psi \in X; \tag{4}$$

3) выполняется условие равномерной ограниченности по времени $t \ge 0$

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(t,\varphi)| + \sum_{j=1}^{l} \left[|b_j(t,\varphi)| + \int_{\Theta} |c_j(t,\varphi,\theta)| \Pi_j(d\theta) \right] \le L(1+\|\varphi\|_X) \tag{5}$$

$\forall\, t \in [t_0, T]$ и $\forall\, \varphi,\psi \in X$.

Тогда согласно [2] существует единственное с точки зрения стохастической эквивалентности сильное решение $\{x(t),\, t \in [0,T]\}$ задачи (1), (2).

Для каждого $\varphi^0 \in X$, $s \ge 0$ обозначим $x^t(s,\varphi)$, $t \ge s$, процесс истории, определяемый решением уравнения (1), построенным при начальном условии φ^0.

Пусть $\{X_s^t,\, t \ge s \ge 0\}$ — семейство отображений, которые определяются равенством

$$X_s^t \varphi \equiv x^t(s,\varphi), \tag{6}$$

и назовем семейством операторов сдвига вдоль решения уравнения (1).

Произвольному $\varphi \in X$ при всех $s \ge 0$ и $t \ge s$ оператор сдвига X_s^t ставит в соответсвие случайную величину $x^t(s,\varphi)$ со значениями в X. Мера, определяемая этой случайной величиной на σ-алгебре $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ борелевских подмножеств пространства X, является счетно-аддитивной функцией элементов $A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ [1], которая зависит от $\varphi \in X$:

$$p(s,\varphi,t,A) \equiv \mathbf{P}(X_s^t \varphi \in A). \tag{7}$$

Семейство $\{p(s,\varphi,t,A\}$ назовем переходной вероятностью для решений (1). Из теоремы существования и единственности решения [2] следует эволюционное свойство оператора сдвига: $X_\tau^t X_s^\tau \varphi = X_s^t \varphi$ при произвольном $\varphi \in X$ и всех $t \ge \tau \ge s \ge 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\{v(\varphi,\omega),\varphi \in X, \omega \in \Omega\}$ — $\mathcal{B}\times\Sigma$-измеримое непрерывное отображение $X\times\Omega$ в R_+, которое при любом $\varphi \in X$ имеет конечное математическое ожидание. Если $\mathcal{M}\subset\Sigma$ и $\xi(\omega)$ — $\mathcal{M}$-измеримая случайная величина, то

$$\mathbf{E}\{v(\xi(\omega),\omega)|\mathcal{M}\} = \mathbf{E}\{v(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}|_{\varphi=\xi(\omega)}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть при всех $\varphi \in X$, $\omega \in \Omega$ с вероятностью единица $0 \le v(\xi(\omega),\omega) \le c$ и $q \in \mathbf{N}$. В силу сепарабельности простоpанства X [8] существует счетное покрытие $\{S_{1/q}^{(0)}(x_k^q),\ k \in \mathbf{N}\}$ пространства X сферами

$$S_{1/q}^{(0)}(x_k^q) \equiv \left\{\varphi \in X \middle|\ ||\varphi - x_k^q||_X < \frac{1}{q}\right\}.$$

Обозначим

$$A_k^q \equiv \xi^{-1}(S_{1/q}^{(0)}(x_k^q));\quad B_1^q = A_1^q;\quad B_k^q = A_k^q / \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l^q,\ k \ge 2.$$

При всех $q \in \mathbf{N}$ справедливо равенство $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_k^q$ и при $k \ne l$: $B_k^q \cap B_l^q = \varnothing$.

Пусть ξ_q — случайная величина со значениями в X, которая определяется равенством $\xi_q(\omega) = x_k^q$ при $\omega \in B_k^q$, $k \in \mathbf{N}$. По построению $||\xi_q(\omega) - \xi(\omega)||_X < \frac{1}{q}$ при всех $\omega \in \Omega$. Пусть $A \in \mathcal{M}$, тогда из того, что $B_k^q \in \mathcal{M}$ при всех $k \in \mathbf{N}$, следует равенство

$$\int_A \mathbf{E}\{v(\xi_q,\omega)|\mathcal{M}\}d\mathbf{P} = \int_A v(\xi_q,\omega)\,d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap B_k^q} v(\xi_q,\omega)d\mathbf{P} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap B_k^q} v(x_k^q,\omega)d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap B_k^q} \mathbf{E}\{v(x_k^q,\omega)|\mathcal{M}\}d\mathbf{P} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap B_k^q} \mathbf{E}\{v(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}\Big|_{\varphi=\xi_q} d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\{v(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}\Big|_{\varphi=\xi_q} d\mathbf{P}.$$

Отсюда имеем (8) для неперерывных по φ равномерно ограниченных отображений $v(\varphi,\omega$, поскольку по теореме Лебега

$$\lim_{q\to\infty} \int_A |v(\xi_q(\omega),\omega) - v(\xi(\omega),\omega)|d\mathbf{P} = 0.$$

Если $v(\varphi,\omega$ не является равномерно ограниченным, то сконструируем при $n \in \mathbf{N}$ отображение $v_n = \dfrac{nv}{n+v}$.

С вероятоностью единица $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(\varphi,\omega) = v(\varphi,\omega)$ при всех $\varphi \in X$ и, кроме того, $v_n(\varphi,\omega) \le n$, а также $v_n(\varphi,\omega) \le v(\varphi,\omega)$ при всех $\varphi \in X$, $\omega \in \Omega$. Согласно доказанному выше равенство (8) выполянется для каждого $v_n(\varphi,\omega)$, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку для всех $A \in \mathcal{M}$ и $\varphi \in X$ по теореме о монотонной сходимости следует

$$\lim_{n\to\infty} \int_A v_n(\xi(\omega),\omega)\,d\mathbf{P} = \int_A v(\xi(\omega),\omega)\,d\mathbf{P} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A \mathbf{E}\{v_n(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}\Big|_{\varphi=\xi(\omega)} d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\{v(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}\Big|_{\varphi=\xi(\omega)} d\mathbf{P}.$$

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$|x(\cdot)|^*_{t_0}(t) \equiv \sup |x(s)|$;

$\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства X;

$C(X)$ — пространство непрерывных отображений X в R;

$\mathcal{N}_a^b$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы приросты винеровского процесса и пуассоновской меры;

$G(X)$ — пространство непрерывных ограниченных отображений из X в R;

$\mathrm{ca}(\mathcal{B})$ — пространство счетно-аддитивных мер на $\mathcal{B}$.

Теорема 1. Если выполняются условия (4), (5), то переходная вероятность (7) владеет следующими свойствами:

1) $p(s,\varphi,t,A)$ при всех $t \ge s \ge 0\ \forall \varphi \in X$ и $A \in \mathcal{B}$ являются элементами $\mathrm{ca}(\mathcal{B})$;

2) $p(s,\varphi,t,A)$ обладает так называемым феллеровым свойством, а именно: $\forall\, t \ge s \ge 0$ и $\forall\ f \in C(X)$ она удовлетворяет равенству

$$\mathbf{E}\{f(X_s^t\varphi)\} = \int_X p(s,\varphi,t,dy) f(y), \tag{9}$$

причем $\mathbf{E}\{f(X_s^t\varphi)\}$ непрерывна по φ и из неотрицательности f следует и ее неотрицательность;

3) для произвольных $t \ge s \ge 0$ и $A \in \mathcal{B}$ $p(s,\varphi,t,A)$ измерима по φ;

4) при всех $t \ge s \ge 0$ и $A \in \mathcal{B}$ для произвольной начальной функции $\xi \in X_s$ переходная вероятность удовлетворяет равенству

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_s^t\xi \in A) = \mathbf{E}\{p(s,\xi,t,A)\} = \int_X p(s,\varphi,t,A)\,\mathbf{P}_\xi(d\varphi), \tag{10}$$

где $\mathbf{P}_\xi(A) \equiv \mathbf{P}(\xi \in A)$;

5) при $t \ge \tau \ge s \ge 0$, $\varphi \in X$ и $\forall\ A \in \mathcal{B}$ $p(s,\varphi,t,A)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чепмэна

$$p(s,t,\varphi,A) = \int_X p(s,\varphi,t,dy) p(\tau,y,t,A); \tag{11}$$

6) при всех $s \ge 0$, $\varphi \in X$ и $\varepsilon > 0$ $p(s,\varphi,t,A)$ владеет свойством стохастической непрерывности

$$\lim_{t \downarrow s} p(s,\varphi,t,S_\varepsilon(\varphi)) = \begin{cases} 1 & \text{для } \varphi \in S_\varepsilon(\varphi), \\ 0 & \text{для } \varphi \notin S_\varepsilon(\varphi), \end{cases} \tag{12}$$

где $S_\varepsilon(\varphi) \equiv \{\forall\ \varphi \in X \big|\ ||\varphi||_X < \varepsilon\}$.

Доказательство аналогично, как и для стохастических дифференциальных уравнений [3].

Доказательство. 1. Первое свойство является тривиальным следствием определения переходной вероятости как вероятности, владеющей счетно-аддитивным свойством.

2. Феллеровое свойство $p(s,\varphi,t,A)$ следует из того, что для решений (1) справедливо [4] $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{E}\{||x^\bullet - x^{t_0}||_X^{*l}(t)\} = 0$ и определение переходной вероятности. Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} ||\varphi_n - \varphi|| = 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}||X_s^t\varphi_n - X_s^t\varphi||_X^{*l} = 0$, а по теореме Лебега имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, f(X_s^t\varphi_n) = \mathbf{E}\{p \lim_{n\to\infty} f(X_s^t\varphi_n)\} = \mathbf{E}\, f(p \lim_{n\to\infty} X_s^t\varphi_n) = \mathbf{E}\, f(X_s^t\varphi).$$

3. Доказательство этого свойства следует из (9) и возможности [1] аппроксимировать вероятностную меру $\forall\ A \in \mathcal{B}$, т.е.

$$\mathbf{E}\{\chi_A(X_s^t\varphi)\} = \int_X p(s,\varphi,t,dy)\,\chi_A(y) \equiv \mathbf{P}\{X_s^t\varphi \in A\},$$

последовательность $\mathbf{E}\{f_n(X_s^t\varphi)\}$, где $\{f_n, n \ge 1\}$ — монотонная последовательность элементов $C(X)$, нормы которых ограничены единицей [5, с. 198].

4. Для доказательства этого свойства воспользуемся леммой 1 для $\upsilon(\varphi,\omega)=f(X_s^t\varphi)$, где $f\in C(X)$. Запишем

$$\mathbf{E}\{f(X_s^t\xi)\}=\mathbf{E}\{\upsilon(\xi,\omega)\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\upsilon(\xi,\omega)|\mathcal{M}\}\}=$$

$$=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\upsilon(\varphi,\omega)|\mathcal{M}\}\}\Big|_{\varphi=\xi}\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\upsilon(\varphi,\omega)\Big|_{\varphi=\xi}\}\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\int_X p(s,\varphi,t,dy)f(y)\Big|_{\varphi=\xi}\right\}=\mathbf{E}\left\{\int_X p(s,\xi,t,dy)f(y)\right\}=$$

$$=\int_X\int_X p(s,\varphi,t,dy)f(y)\mathbf{P}_\xi(d\varphi).$$

Далее опять аппроксимируем $\mathbf{E}\{f(X_s^t\xi)\}$ последовательностью математических ожиданий непрерывных функций $\mathbf{E}\{f_n(X_s^t\xi),n\in\mathbf{N}\}$ [1].

5. Это свойство следует из эволюционного свойства оператора сдвига и леммы 1. Пусть $\upsilon(\varphi,\omega)=f(X_s^t\varphi)$ и $f\in C(X)$, тогда

$$\mathbf{E}\{f(X_s^t\varphi)\}=\mathbf{E}\{f(X_\tau^t X_s^\tau\varphi)\}=\mathbf{E}\{\upsilon(X_s^t\varphi,\omega)\}=$$

$$=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\upsilon(X_s^\tau\varphi,\omega)\Big|\mathcal{N}_s^\tau(dw)\vee\mathcal{N}_s^\tau(\tilde\nu)\}\}=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\upsilon(z,\omega)\Big|_{z=X_s^\tau\varphi}\}\}=$$

$$=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{f(X_\tau^t z)\}\Big|_{z=X_s^\tau\varphi}\}=\mathbf{E}\left\{\int_X p(\tau,X_s^\tau\varphi,t,dy)f(y)\right\}=$$

$$=\int_X f(y)\int_X p(s,\varphi,\tau,dz)p(\tau,z,t,dy).$$

Опять нужно построить последовательность неотрицательных монотонных функций $\{f_n,n\ge 1\}\in C(X)$, как в предыдущем пункте [8].

6. Данное свойство называется свойством стохастической непрерывности. Его доказательство следует из такого соотношения:

$$\lim_{t\downarrow s}P(||x^t(s,\varphi)-\varphi||_X>\varepsilon)=0. \tag{13}$$

Действительно, используя неравенство Чебышева, получим (12).

Из теоремы 1 можно сделать вывод, что процесс $x^t(s,\varphi)$ — стохастический непрерывный справа феллеровый марковский процесс со значениями в X, имеющий границы слева с переходной вероятностью (7), а значит, согласно [5] (теорема 3.10, с.144) является строго марковским.

Следствие 1 [4]. Если $s\in[0,T]$, $\{s_n,n\in\mathbf{N}\}\subset[0,T]$, $t\in[0,T]$, $\{\varphi_n,n\in\mathbf{N}\}\subset X$, $\varphi\in X$, то в условиях предыдущей теоремы из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}(|s_n-s|+||\varphi_n-\varphi||_X)=0$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\{||x^{t+s_n}(s_n,\varphi_n)-x^{t+s}(s,\varphi)||_X\}=0$.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (4), (5) для уравнения (1), (2), тогда для всех $t\ge t_1\ge s\ge 0$, $\Gamma\in\mathcal{B}$ и $\varphi\in X$ решение $\{x^t(s,\varphi),t\ge s\}$ владеет маркивским свойством

$$\mathbf{P}(x^t(s,\varphi)\in\Gamma\Big|\mathcal{F}_{t_1})=p(t_1,x^{t_1}(s,\varphi),t,\Gamma),$$

где функция $p(s,\varphi,t,\Gamma)$ — переходная вероятность, определенная (7).

Доказательство. Учитывая равенство

$$\mathbf{P}(x^t(s,\varphi)\in\Gamma\Big|\mathcal{F}_{t_1})\equiv\mathbf{E}\{I_\Gamma(x^t(s,\varphi))\Big|\mathcal{R}_{t_1}\},$$

достаточно показать [5]

$$\mathbf{E}\{f(x^t(s,\varphi))\big|\mathcal{F}_{t_1}\} = \int_X p(t_1, x^{t_1}(s,\varphi), t, dy) f(y)$$

для произвольного $f \in G(X)$. Используя лемму 1, легко получаем соотношение

$$\mathbf{E}\{f(x^t(s,\varphi))\big|\mathcal{F}_{t_1}\} = \mathbf{E}\{f(X_{t_1}^t X_s^{t_1})\big|\mathcal{R}_{t_1}\} = \mathbf{E}\{f(X_{t_1}^t \psi)\}\big|_{\psi = x^{t_1}(s,\varphi)}.$$

Остается только воспользоваться (9).

2. СЛАБЫЙ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Определим слабый инфинитезимальный оператор для марковского процесса x^t, в пространстве X для функционалов $v: R_+ \times X \to R$, $v \in G(\mathbf{V})$, $\mathbf{V} = R_+ \times X$.

Считается, что функционал $v(t,\varphi)$ принадлежит области определения слабого инфинитезимального оператора $\mathcal{L}$, если:

- в каждой точке $(s,\varphi) \in \mathbf{V}$ существуют числа $\Delta > 0$ и $c > 0$ такие, что справедливо

$$\sup_{0 < t \le \Delta} \frac{1}{t} |\mathbf{E}\{v(t+s, x^{t+s}(s,\varphi)\} - v(s,\varphi)| \le c; \tag{14}$$

- в каждой точке $(s,\varphi) \in \mathbf{V}$ существует граница

$$(\mathcal{L}v)(s,\varphi) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbf{E}\{v(t+s, x^{t+s}(s,\varphi)\} - v(s,\varphi)], \tag{15}$$

причем

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{E}\{(v)(s+t, x^{s+t}(s,\varphi))\} = (\mathcal{L}v)(s,\varphi). \tag{16}$$

Для слабого инфинитеземального опертатра строго марковского процесса справедлива формула Дынкина [5].

Лемма 3. Если Q — открытое множество в X, $v \in \mathbf{D}(\mathcal{L})$, $\tau(t) \ge s$ — марковский момент времени (первый момент выхода из Q) для строго марковского процесса $x^t(s,\varphi)$ такого, что $\mathbf{E}\{\tau(t)\} < \infty$, то справедлива формула Дынкина:

$$\mathbf{E}\{v(s+\tau(t), x^{s+\tau(t)}(s,\varphi))\} = v(s,\varphi) + \mathbf{E}\left\{\int_0^{\tau(t)} \mathcal{L}\, v(s+z, x^{s+z}(s,\varphi) dz\right\} \tag{17}$$

для всех $s \ge 0$, $t \ge 0$, $\varphi \in Q$, где $\tau(t) \equiv \min\{\tau, t\}$, $\tau \equiv \inf\{z \in R_+ \big| x^{s+z}(s,\varphi) \notin Q\}$.

Пусть $N \in \mathbf{N}$, τ_N — первый момент выхода из окружности

$$S_N \equiv \{\varphi \in X \big| \, ||\varphi||_X < N\}.$$

Если для каждого $t > 0$ имеем $\mathbf{P}\{\lim_{N \to \infty} \tau_N(t) = t\} = 1$, то (17) можно переписать в виде

$$\mathbf{E}\{v(s+t, x^{s+t}(s,\varphi))\} = v(s,\varphi) + \mathbf{E}\left\{\int_0^t \mathcal{L}\, v(s+z, x^{s+z}(s,\varphi) dz\right\}.$$

Пусть H — открытое множество из X, $\tau > 0$ — время выхода из H:

$$\tau \equiv \inf\{t \in R_+ \big| x^t \notin \mathrm{H}\}, \ \tau(t) = \tau \wedge t.$$

Пусть $\widetilde{x}^t$ — процесс, остановленный в момент τ: $\widetilde{x}^t = x^{\tau(t)}$, и пусть $\widetilde{\mathcal{L}}$ — слабый инфинитезимальный оператор процесса $\widetilde{x}^t$. Вычислить $\widetilde{\mathcal{L}}$, как правило, достаточно трудно. В следующей лемме покажем, что для ограниченного открытого множества H слабый инфинитезимальный оператор $\widetilde{\mathcal{L}}$ можно вычислить в точках множества H через вычисление соответствующего инфинитезимального процесса для неостановленного процесса, который является решением уравнения вида

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{k} a_i(x^t)\,dt+\sum_{j=1}^{l}\left[b_j(x^t)\,dw_j(t)+\int_{\Theta} c_j(x^{t-},\theta)\tilde{\nu}_j(dz,dt)\right]. \qquad (18)$$

Лемма 4. Пусть:

1) $U \in X$ — ограниченное открытое множество;

2) $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{c}_j$, $i=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,l}$, — квазилинейные функционалы, удвлетворяющие условию Липшица, и $\bar{a}_i(t,x)=0$, $\bar{b}_j(t,x)=0$, $\bar{c}_j(t,x)=0$ при $x\notin U$;

3) $\bar{x}(t)$ — решение (18) з коэффициентами $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{c}_j$.

Тогда существует $Y \equiv Y_U$ — ограниченная окрестность множества U, такая что если начальное условие (история) $x \in Y$, то $\bar{x}^t \in Y$ для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Поскольку $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{c}_j$, $i=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,l}$, превращаются в ноль вне множества U при всех начальных условиях $x \in U$, $\bar{x}(t)$ равномерно ограничено для всех $t \geq 0$; значит, $\bar{x}^t$ принадлежит ограниченной окрестности U^+ множества U при всех $t \geq 0$.

Если $x \in U^+ \setminus U$, то решение задается в виде $T^t x$, $t \geq 0$. Пусть Y определено следующим образом: $Y \equiv \bigcup_{t\geq 0} T^t U^+$. Множество Y ограничено, поскольку, используя сглаживающее свойство и то, что $x \in Y$, получим $\bar{x}^t \in Y$ при всех $t \geq 0$, т.е. Y удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 5. Пусть:

1) Η — открытое множество из X;

2) $x(t)$ — решение уравнения (18) с коэффициентами, удовлетворяющими условию равномерной ограниченности;

3) $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{c}_j$, $i=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,l}$, — квазилинейные функциналы, удовлетворяющие условию Липшица и такие, что $\bar{a}_i(x)=a_i(x)$, $\bar{b}_j(x)=b_j(x)$, $\bar{c}_j(x)=c_j(x)$ для $x \in \mathrm{H}$ и $\bar{a}_i(x)=0$, $\bar{b}_j(x)=0$, $\bar{c}_j(x)=0$ вне U — окрестности множества $\bar{\mathrm{H}}$;

4) $\bar{\mathcal{L}}$ — слабый инфинитезимальный оператор процесса $\bar{x}^t$ — решения уравнения (18) с коэффициентами $\bar{a}_i$, $\bar{b}_j$, $\bar{c}_j$ (процесс $\bar{x}^t$ считается таким, что имеет фазовое пространство Y, определенное леммой 4);

5) $F: X \to R$ — непрерывный функционал.

Если сужение этого функционала на Y принадлежит $\mathbf{D}(\bar{\mathcal{L}})$ и $\bar{\mathcal{L}}F$ ограничено на Y, то сужение функционала F на $\bar{\mathrm{H}}$ находится в области определения $\tilde{\mathcal{L}}$ и для всех $x \in \mathrm{H}$

$$(\tilde{\mathcal{L}}F)(x)=(\bar{\mathcal{L}}F)(x). \qquad (19)$$

Доказательство. Согласно условию 3) решение $\{\bar{x}^t,\ t \geq 0\}$ равномерно ограничено в ограниченном множестве H: $\|\bar{x}^t\|_X \leq B$ почти везде.

Пусть $\bar{\mathcal{L}}F \equiv \Phi$. Сначала докажем, что, подставляя x вместо начального условия φ^0 в (18), получим

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathbf{E}\{\Phi(\tilde{x}^t)\}=\Phi(x).$$

Действительно, учитывая, что $\bar{x}^t=\tilde{x}^t$ при $\tau \geq t$ и Φ ограничено на ограниченных множествах, имеем

$$|\mathbf{E}\{\Phi(\bar{x}^t)\}-\mathbf{E}\{\Phi(\tilde{x}^t)\}| \leq \mathbf{E}\{|I_{\{\tau<t\}}[\Phi(\bar{x}^t)-\Phi(\tilde{x}^t)]|\} \leq \mathrm{const}\,\mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}\}.$$

Пусть $\delta \equiv \mathrm{dist}(x,\partial \mathrm{H})$. Из непрерывности справа $\{x^t\}$ получим $\|\bar{x}^\tau - x\|_X \geq \delta$. Если $l>1$, то

$$\mathbf{E}\{|\bar{x}-x|_s^{*l}(t)\} \geq \mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}|\bar{x}-x|_s^{*l}(t)\} \geq \delta^l \mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}\},$$

а поскольку [4]

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathbf{E}\{|\bar{x}-x|_s^{*l}(t)\}=0, \qquad (20)$$

то $\lim_{t\downarrow 0}\mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}\}=0$. Понятно, что $\mathbf{E}\{\Phi(\tilde{x}^t)\}$ равномерно ограничено при $x \in \mathrm{H}$. Осталось показать, что при $x \in \mathrm{H}$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[\mathbf{E}\{F(\widetilde{x}^t)\}-F(x)]=\Phi(x).$$

Поскольку $\Phi(x)$ — граница аналогичного соотношения для $\bar{x}^t$, то достаточно показать, что при $x\in \mathrm{H}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{E}\{F(\widetilde{x}^t)\}-\mathbf{E}\{F(\bar{x}^t)\}}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}[F(\widetilde{x}^t)-F(\bar{x}^t)]\}}{t}=0.$$

Согласно предположениям F ограничено на Y. Таким образом, достаточно, чтобы

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\mathbf{E}\{I_{\{\tau<t\}}\}=0.$$

Пусть $t^*\equiv\inf\left\{t\colon ||T^t x-x||\ge\frac{\delta}{2}\right\}$. Поскольку

$$||x^t-x||_X\le||x^t-T^t x+T^t x-x||_X\le||x^t-T^t x||_X+||T^t x-x||_X,$$

то на множестве $\{\tau\le t^*\}$:

$$\delta\le||x^\tau-x||\le||x^\tau-T^\tau x||+||T^\tau x-x||\le||x^\tau-T^\tau x||+\frac{\delta}{2},$$

т.е. $||x^\tau-T^\tau x||\ge\frac{\delta}{2}$. Далее, из (20) следует $\mathbf{E}\{|x^\bullet-T^\bullet x|_0^{*l}(t)\}=O(t^{l/2})$. Если $t\le t^*$, то $\{\tau\le t\}\subset\{\tau\le t^*\}$, а значит, $\mathbf{E}\{|x^\bullet-T^\bullet x|^{*l}(t)\}\ge\mathbf{E}I_{\{\tau\le t\}}|x^\bullet-T^\bullet x|^{*l}(t)\ge$ $\ge\left(\frac{\delta}{2}\right)^l\mathbf{E}I_{\{\tau\le t\}}$. Итак, если l выбрать больше 2, то $\frac{1}{t}\mathbf{E}\{I_{\{\tau\le t\}}\}=o(1)$ при $t\to 0$. Осталось показать, что семейство функций $\left\{\frac{1}{t}[\mathbf{E}\{F(\widetilde{x}^t)\}-F(x)],\ t\ge 0\right\}$ равномерно ограничено при $x\in\overline{\Theta}$. Поскольку $\bar{x}^t$ — строго марковский процесс и $\widetilde{x}^t=\bar{x}^{\tau(t)}$, то из формулы Дынкина следует

$$\mathbf{E}\{F(\widetilde{x}^t)\}-F(x)=\int_0^{\tau(t)}\Phi(\bar{x}^s)ds. \qquad (21)$$

Поскольку решение $\bar{x}^t$ ограничено при $x\in\Theta$ и φ ограничено на Y, то правая часть (21) ограничена выражением $M\mathbf{E}\{\tau(t)\}$, где $M\equiv\sup\limits_{0\le s\le t}|\Phi(\bar{x}^s)|$. Тогда

$$\frac{1}{t}[\mathbf{E}\{F(\widetilde{x}^t)\}-F(x)]\le M\,\mathbf{E}\left\{\frac{\tau(t)}{t}\right\}\le M,$$

а значит, равномерно ограничено, что и завершает доказательство леммы.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СДФУ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И ПУАССОНОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

В этом разделе изучается устойчивость сильного решения СДФУ$_\infty$ (18), используются результаты и идеи [6] вместе со специальными методами фазового пространства X.

Лема 6. Пусть: 1) x^t — непрерывный справа строго марковский процесс на $Y\subset X$ со слабым инфинитезимальным оператором $\mathcal{L}$;

2) $V\colon Y\to R$ — неотрицательный функционал;

3) $Q\subset Y$ — открытое множество и τ — время выхода из Q

$$\tau\equiv\inf\{t\colon x^t\notin Q\} \qquad (22)$$

($\tau=\infty$, если $\{t \,|\, x^t \notin Q\}=\varnothing$) и $\tau(t)=\tau \wedge t$;

4) пусть $\widetilde{x}^t = x^{\tau(t)}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ — слабый инфинитезимальный оператор $\widetilde{x}^t$ и

$$(\widetilde{\mathcal{L}}V)(x)=-k(x)\le 0 \tag{23}$$

при $x\in Q$.

Тогда для $x=x^0\in Q$ имеем:

а) $V(\widetilde{x}^t)$ — неотрицательный супермартингал;

б) $\mathbf{P}\left\{\sup\limits_{0\le t} V(\widetilde{x}^t)\ge q\right\}\le \dfrac{V(x)}{q}$ для произвольного положительного q; (24)

в) существует случайная величини ξ такая, что $V(\widetilde{x}^t)\to\xi$ почти наверное.

Доказательство. Пусть $x\in Q$. Поскольку $V\in \mathbf{D}(\widetilde{\mathcal{L}})$ и $\tau(t)$ ограничено, то по формуле Дынкина

$$\mathbf{E}\{V(\widetilde{x}^t)\}-V(x)=-\mathbf{E}\left\{\int\limits_0^{\tau(t)} k(x^s)ds\right\}\le 0, \tag{25}$$

а значит, $V(\widetilde{x}^t)$ — супермартингал [9].

Пункт б) леммы 6 является мартингальным неравенством, а п. в) — мартингальной теоремой сходимости.

Лемма доказана.

Предположим, что V — непрерывный неотрицательный функционал на X, и для $\varepsilon>0$ рассмотрим множество

$$Q_1\equiv\{x: V(x)<q\}. \tag{26}$$

Обозначим τ_1 время выхода из Q_1.

Теорема 2. Пусть для Q_1 и V выполняются предположения предыдущей леммы. Пусть Q — открытое подмножество множества Q_1, определенного в (26). Предположим следующее:

1) для некоторого $\delta>0$ функционал k из (23) равномерно непрерывный на множестве

$$R_\delta\equiv\{x:\ k(x)<\delta\}\cap Q; \tag{27}$$

2) множество $Q'\subset Q_1$ такое, что для достаточно больших t и достаточно малых ε

$$P\{\tau_Q>t, ||x^\bullet - x^t||_t^*\ (t+h)>\varepsilon\}\to 0 \tag{28}$$

при $h\to 0$, равномерно по t (при больших t) и любого $x\in Q'$.

Тогда для фиксированного $x=x^0\in Q'$, обозначив Ω_Q множество

$$\Omega_Q=\{\omega:\ \sup_{t\ge 0} V(x^t)<q\}, \tag{29}$$

будем иметь

$$k(x^t)\to 0 \text{ при } t\to\infty \text{ п. н. в } \Omega_Q. \tag{30}$$

Доказательство. Докажем, что при $t\to\infty$ вероятность того, что x^t покинет R_δ после момента t, стремится к нулю. Тогда, поскольку δ произвольно, то при $t\to\infty$, $k(x^t)\to 0$ почти наверное в Ω_Q. Доказательство проводится пошагово.

Сначала покажем, что общее время, проведенное вне R_δ, конечно. Пусть $T_x(\delta,t)$ — общее время, проведенное процессом x^s, $s\le\tau$ в $Q\setminus R_\delta$ после момента t. Если $I_x(\delta,\omega,s)$ — индикатор множества $\{(s,\omega): k(x^s)\ge\delta\}$, то $T_x(\delta,t)=\int\limits_{\tau(t)}^{\tau} I_x(\delta,\omega,s)ds.$

Поскольку $V\ge 0$, из (25) следует, что

$$\mathbf{E}T_x(\delta,0)\le\frac{V(x)}{\delta}. \tag{31}$$

Итак, $T_x(\delta,0)<\infty$ почти наверное, а отсюда

$$T_x(\delta,0) \ge T_x(\delta,t) \to 0 \text{ п.н. при } t \to \infty. \tag{32}$$

Далее, фиксируя $1 \ge \gamma > 0$, нужно показать, что вероятность x^t не покинуть R_δ при достаточно больших t больше, чем $1-\gamma$. Тогда, поскольку γ и δ произвольно выбраны, справедливо, что $k(x^t) \to 0$ при $t \to \infty$ п.н. в Ω_Q.

Из равномерной непрерывности k в R_δ

$$\min\{||x-y||: x \in R_{\delta/2},\ y \in Q \setminus R_\delta\} > 0.$$

Выбирая h достаточно малым, а $t'_x(h,\gamma)$ — достаточно большим, так чтобы при $t \ge t'_x(h,\gamma)$ вероятность в (28) была меньше $\gamma/2$, получаем, что

$$P_1 \equiv \mathbf{P}\{\tau \ge t,\ x^t \in Q \setminus R_\delta,\ x^{t+u} \in R_{\delta/2}$$

$$\text{для некоторого } 0 \le u \le h,\ t \ge t'_x(h,\gamma)\} \le \gamma/2.$$

Согласно (31), (32) имеем $\mathbf{E}T_x(\delta,t) \to 0$ п.н. при $t \to \infty$, значит, за неравенством Чебишева существует $t_x(h,\gamma) \ge t'_x(h,\gamma)$ такое, что

$$\mathbf{P}\left\{T_x(\delta,t) \le T_x\left(\frac{\delta}{2},\ t\right)h\right\} \ge 1-\frac{\gamma}{2},\ t > t_x(h,\gamma).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}\{\tau > t,\ x^t \in Q \setminus R_\delta,\ t \ge t_x(\gamma,\delta)\} \le \mathbf{P}\{T_x\left(\frac{\delta}{2}, t\right) \ge h,\ t \ge t_x(\gamma,\delta)\} + P_1 \le \gamma,$$

что и завершает доказательство теоремы

В общем случае множество Q_1, определенное в (26), не является ограниченным, но рассматривать инфинитезимальный оператор можно лишь на ограниченных множествах. Тем не менее можно справиться с ситуацией, в которой $V(x^t) < q$, считая, что $|x(t)| \le B_1$, где B_1 — постоянная, независящая от начального условия x^0. Далее, если рассматривать только те начальные условия, которые принадлежат ограниченному множеству в Q_1, то существует ограниченное множество $U \subset X$ такое, что $x^t \in U$ для всех $t \le \tau_1$ (τ_1 — момент выхода из Q_1).

Точнее, пусть V, τ_1, Q_1 такие, как сказано выше, и x^t — решение уравнения (18), с коэффициентами, которые удовлетворяют локальному условию Липшица и равномерной ограниченности (как известно [4], в этом случае также существует единственное сильное решение уравнения (18)). Предположим, что для каждого ограниченного множества D из X существует постоянная $K > 0$ такая, что для $x = x^0$ в $D \cap Q_1 \equiv Q_D$ норма x^t ограничена постоянной K при $0 \le t \le \tau_1$:

$$||x^t|| \le K \text{ при } 0 \le t \le \tau_1.$$

Положим $B \equiv \{x: ||x|| \le K\}$ и $Q \equiv Q_1 \cap B \supset Q_D$. Пусть τ_Q — момент выхода из Q, τ_B — момент выхода из B ($\tau_B \ge \tau_Q$), $\overline{a}_i$, $\overline{b}_j$, $\overline{c}_j$ — коэффициенты, которые совпадают с a_i, b_j, c_j, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,l}$, на B, и $\overline{a}_i \equiv 0$, $\overline{b}_j \equiv 0$ и $\overline{c}_j \equiv 0$ вне окрестности U множества B. Процесс $\overline{x}^t$ уравнения (18) с коэффициентами $\overline{a}_i$, $\overline{b}_j$, $\overline{c}_j$ считается процессом, что имеет фазовое пространство Y, которое построено в лемме 4. Если же $x = x^0 \in B$, то $\overline{x}^t = x^t$ при $t \le \tau_B$. Пусть $\overline{\mathcal{L}}$ — слабый инфинитезимальный оператор процесса $\overline{x}^t$, $\widetilde{x}^t$ — процесс $\overline{x}^{\tau_Q(t)}$, а $\widetilde{\mathcal{L}}$ — его инфинитезимальный оператор. Пусть для фиксированного $x = x^0 \in Q$ Ω_Q определяет множество

$$\Omega_Q = \{\omega: \sup_{t \ge 0} V(x^t) < q\}. \tag{33}$$

Теорема 3. При использовании вышеуказанных условий предположим, что сужение V на $\overline{Q}$ находится в области определения $\widetilde{\mathcal{L}}_Q$ и

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_Q V)(x) = -k(x) \le 0 \tag{34}$$

при $x \in Q$. Предположим, что k равномерно непрерывно на множестве

$$R_\delta \equiv \{x\colon k(x) < \delta\} \tag{35}$$

для некоторого $\delta > 0$. Тогда для каждого $x \in Q_D$

$$\mathbf{P}(\Omega_Q) \ge 1 - \frac{V(x)}{q}, \tag{36}$$

$$k(x^t) \to 0 \text{ при } t \to \infty \text{ п.н. в } \Omega_Q. \tag{37}$$

Доказательство. Поскольку все предположения леммы 6 выполняются, (36) следует из (24). Другие выводы леммы 6 также имеют место для $\bar{x}^t$.

Аналогично, если доказать, что условие

$$P\{\bar{x}^u \in Q, 0 \le u \le t, \|\bar{x}^t - \bar{x}^{t+\bullet}\|_0^* (h) > \varepsilon\} \to 0 \text{ при } h \to 0 \tag{38}$$

выполняется равномерно по t (достаточно большого) для каждого $x^0 = x \in Q_D$, то все условия теоремы 2 выполняются, а значит, справедливо (37).

Для доказательства (38) оценим

$$\|\bar{x}^{t+s} - \bar{x}^t\|_X^p \le k_p (\|\bar{x}^{t+s} - T_x^{s-t}\|_x^p + \|T_x^{s-t} - \bar{x}^t\|_x^p).$$

Поскольку $p \ge 1$, то

$$\mathbf{E}\{\|\bar{x}^{t+\bullet} - T^\bullet \bar{x}^t\|_0^{*p}(h)\} = O(h^{p/2}), \text{ если } \|\bar{x}^t\| \le K. \tag{39}$$

Теперь оценим второе слагаемое (для упрощения записей будем писать x^t вместо $\bar{x}^t$). Записывая

$$x^t = x^t I_{[0,t)} + x^t I_{[t,\infty)} \equiv x_1^t + x_2^t, \tag{40}$$

получаем

$$\|T^s x^t - x^t\| \le \|T^s x_1^t - x_1^t\| + \|T^s x_2^t - x_2^t\| =$$

$$= \|T^s x_1^t - x_1^t\| + \|T^{t+s} x^0 - T^t x^0\|. \tag{41}$$

Функция $t \to T^t x^0$ непрерывна справа и сходится к $x^0(0)^+$ (постоянная начальная функция со значением $x^0(0)$) при $t \to \infty$; значит, она равномерно непрерывна и $\|T^\bullet x^0 - T^t x^0\|_t^* (t+h) = o(1)$ при $h \to 0$ равномерно по t.

Осталось оценить $\|T^s x_1^t - x_1^t\|^p$, $s \le h$. Имеем

$$\|T^s x_1^t - x_1^t\|^p = \int_0^\infty |T^s x_1^t - x_1^t|^p (u) \rho(u) du =$$

$$= \int_0^s |x_1^t(0) - x_1^t(u)|^p \rho(u) du + \int_s^t |T^s x_1^t - x_1^t|^p (u) \rho(u) du + \int_t^{t+s} |x_1(t+s-u)|^p \rho(u) du.$$

Так как $|x_1(u)| \le K$ для всех $0 \le u \le t$, первое и последнее слагаемое являются $o(1)$. Для второго слагаемого имеем

$$\int_s^t |T^s x_1^t - x_1^t|^p (u) \rho(u) du = \left[\int_s^t \left| \int_{t-u-s}^{t-u} \left[\sum_{i=1}^k a_i(x^v) dv + \sum_{j=1}^l b_j(x^v) dw_j(v) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^l \int_\Theta c_j(x^v, \theta) \widetilde{\nu}_j(d\theta, dv) \right] \right|^p \rho(u) du \le$$

$$\le k_p^{(3)}\left[\int_s^t\left|\int_{t-u-s}^{t-u}\sum_{i=1}^{k}a_i(x^v)\,dv\right|^p\rho(u)du+\int_s^t\left|\int_{t-u-s}^{t-u}\sum_{j=1}^{l}b_j(x^v)\,dw_j(v)\right|^p\rho(u)du+\right.$$

$$\left.+\int_s^t\left|\int_\Theta\int_{t-u-s}^{t-u}\sum_{j=1}^{l}c_j(x^v,\theta)\widetilde{\nu}_j(d\theta,dv)\right|^p\rho(u)du\right].$$

Используя неравенства Гельдера и Буркхольдера [7] и то, что

$$\sum_{i=1}^{k}|\overline{a}_i(x^v)|+\sum_{j=1}^{l}\left[|\overline{b}_j(x^v)|+\int_\Theta|\overline{c}_j(x^v,\theta)|\Pi_j(d\theta)\right]\le L(1+||x^v||)\le L(1+K),$$

получаем

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_\bullet^t|T^\bullet x_1^t-x_1^t|^p(u)\rho(u)du\right|_0^*(h)\right\}\le k_p^{(3)}\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^t\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{t-u-}^{t-u}a_i(x^v)dv\right|^p\rho(u)du+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t\left|\sum_{j=1}^{l}\int_{t-u-\bullet}^{t-u}b_j(x^v)dw_j(v)\right|^p\rho(u)du+\int_0^t\left|\sum_{j=1}^{l}\int_{t-u-\bullet}^{t-u}\int_\Theta c_j(x^v,\theta)\widetilde{\nu}_j(d\theta,dv)\right|^p\rho(u)du\right|_0^*(h)\le\right.$$

$$\le k_p^{(3)}(L^p(1+K)^p||\rho||_{L_1})\left[1+c_{p1}h^{p/2}+c_{p2}h^{p/2}\sum_{j=1}^{l}\int_\Theta\Pi_j(d\theta)\right]h^{p/2}=O(h^{p/2})$$

при $h\to 0$ равномерно по t.

Итак,
$$P\{||x^t-x^{t+\bullet}||_0^*(h)>\varepsilon\}\le\frac{\mathbf{E}\{||x^t-x^{t+\bullet}||_0^*(h)\}}{\varepsilon^p}\to 0$$

при $h\to 0$ равномерно по t, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
2. Ясинский В.К., Антонюк С.В. Существование *l*-го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 4. — С. 141–152.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968. — 354 с.
4. Ясинский В.К. Математические методы исследования устойчивости стохастических систем с последействием при наличии пуассоновских возмущений // Дисс. докт. физ.-мат. наук. — Черновцы: Черновиц. гос. ун-т, 1992. — 383 с.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с
6. Kushner H.J. On the stability of processes defined by stochastic differential equations // Differential equations. — 1968. — N 4. — P. 424–443
7. Mizel V., Trutzev V. Stochastic differential equations // J. Integral Equations. — 1984. — **17**. — P. 1–72
8. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функционалных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
9. Липцнер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
10. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Наука, 1969. — 212 с.

Поступила 24.12.2008