УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

ПОНЯТИЕ СПРАВЕДЛИВОГО ДЕЛЕЖА В КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ И ЕГО ПОИСК[1]

Ключевые слова: *конфликтные равновесия, кооперативные игры.*

ВВЕДЕНИЕ

В любой конфликтной задаче каждый участник в случае совместно скоординированных (кооперативных) действий имеет возможность получить выигрыш не меньше (практически, почти всегда больше), чем в случае отсутствия кооперации. Это означает, что для всех участников кооперация выгоднее, чем ее отсутствие.

Основная проблема, сдерживающая кооперацию, состоит в том, как справедливо разделить между участниками кооперативный доход. Если игроки заранее не договорятся о справедливом дележе, то кооперации они не создадут.

Задача определения справедливого дележа оказалась самой сложной в общей теории игр и до сих пор оставалась нерешенной. Дележ должен быть таким, чтобы ни у одного из игроков и ни у какой их группы (коалиции) не появилось оснований выйти из кооперации и действовать единолично или коалиционно. Следовательно, такой дележ должен обладать определенной устойчивостью в том смысле, что ни один из игроков и ни одна из коалиций не смогли бы вне рамок кооперации получить выигрыш больший, чем обеспечивает им справедливая доля от кооперативного дохода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется N игроков, каждый i-й из которых, выбирая точку (стратегию) q_i на доступном ему множестве Q_i, стремится максимизировать свою (платежную) функцию $J_i(q) = J_i(q_1, \ldots, q_N)$, $i = \overline{1, N}$, определяющую какую-то выгоду участника, характеризуемую этой функцией (например, максимальный денежный доход).

Нужно доказать, что, выступая кооперативно, все участники имеют возможность получить больше, чем в случае любого некооперативного решения игры.

В основу теории кооперативных игр Дж. Неймана и О. Моргенштерна [1] положено понятие гарантированного выигрыша коалиции P_k из k игроков, определяемое выражением

$$v(P_k) \stackrel{\Delta}{=} \sup_{q_{P_k}} \inf_{q_{P_{N-k}}} J_{P_k}(q_{P_k}, q_{P_{N-k}})$$

$$(P_k \cup P_{N-k} = P_N, \quad P_k \cap P_{N-k} = \varnothing), \tag{1}$$

где $J_{P_k} = \sum\limits_{i \in P_k} J_i$, P_k — коалиция из k участников, а q_{P_k} — стратегия коалиции P_k. Функция $v(P_k)$, названная характеристической функцией игры, задает верхнюю грань выигрышей, которую может с любой точностью обеспечить себе коалиция P_k даже в случае антагонистического по отношению к ней

[1]Работа выполнена по программе ОИТВС РАН (проект № 1-3) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00821).

поведения остальных $N-k$ игроков.

Дж. Нейман и О. Моргенштерн пытались найти устраивающие всех участников дележи кооперативного дохода, опираясь на казавшуюся им совершенно «безобидной» следующую аксиому: «если для некоторой эффективной коалиции P_m, $1<m<N$, т.е. коалиции, удовлетворяющей условию $\sum_{i \in P_m} x_i \le v(P_m)$, имеют место отношения $x_i > \bar{x}_i$ для всех $i \in P_m$, то можно сказать, что дележ $(x_1, \ldots, x_N)$, т.е. совокупность чисел $(x_1, \ldots, x_N)$, доминирует над дележом $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N)$ по коалиции P_m, т.е. первый дележ кооперативого дохода предпочтительнее последнего с точки зрения коалиции P_m».

Основываясь на аксиоме доминирования и на паре совершенно естественных аксиом: 1) $\sum_{i=1}^{N} x_i = v(P_N)$, 2) $x_i \ge v(i)$, $i=\overline{1, N}$, в [1] дается следующее определение решения: множество исходов (дележей) $(x_1, \ldots, x_N)$ называется решением, если ни одному элементу этого множества нельзя отдать предпочтения перед другими элементами множества; если всякому элементу вне множества можно предпочесть какой-либо элемент из этого множества.

Это ставшее классическим решение неудовлетворительно одновременно в нескольких отношениях. Во-первых, оно не всегда существует (в 1969 г. найден пример игры с 10 участниками, не имеющей решения), причем до сих пор не определен даже класс задач, в котором оно имеется. Во-вторых, это решение, когда существует, по сути, всегда неединственно: более того, оно состоит из бесконечного множества так называемых «решений», каждое из которых включает бесконечное множество дележей, причем дележи из одного «решения» могут доминировать над дележами другого, что сводит к нулю практическую ценность этой теории, особенно если учесть, что поиск решений-дележей — чрезвычайно сложная комбинаторная задача. В-третьих, почти все дележи из этих «решений» не обладают игровой устойчивостью в том смысле, что найдется хотя бы один участник, который не согласится с предложенным дележом из решения по той причине, что существует устойчивая игровая ситуация, в которой его выигрыш больше причитающейся ему доли от этого «дележа».

Идеальным решением (справедливым дележом) кооперативной игры (с трансферабельной полезностью, т.е. с возможностью раздела любого выигрыша на любые части) назовем такое, которое: 1) существует в любой игре; 2) с ним вынужден согласиться любой участник игры, т.е. оно должно удовлетворять некоторым требованиям естественной устойчивости, в соответствии с которыми выход участника из кооперации не позволит ему выиграть больше причитающейся ему доли от справедливого дележа; 3) это решение (справедливый дележ) является единственным.

Решение Неймана–Моргенштерна не удовлетворяет ни одному из трех перечисленных требований, предъявляемых к идеальному решению. В качестве альтернативы данному решению в 1953 г. Л. Шепли [2] было предложено решение, состоящее всего из одного дележа, в основе нахождения которого также лежит характеристическая функция $v(P_k)$. Однако это решение («вектор» Шепли) не удовлетворяет требованию устойчивости в том смысле, что найдется по крайней мере один игрок, которого не удовлетворит дележ, определяемый «вектором» Шепли, в том отношении, что он сможет выиграть вне рамок кооперации больше, чем обеспечивает ему дележ в соответствии с решением Шепли. И этот игрок (или несколько игроков) не согласится на создание кооперации, переведя игру в состояние устойчивого игрового равновесия, в котором его выигрыш превосходит его долю в кооперации, определяемую «вектором» Шепли.

Основным недостатком всех строившихся теорий кооперативных игр, в том числе и ранних теорий автора [3, 4], является их опора на понятие характеристической функции (1). В [4] показано, что даже использование некоторой «улучшенной» характеристической функции и замена неудовлетворительной аксиомы доминирования гораздо более эффективной с точки зрения устойчивости получаемых дележей аксиомой не позволило все же существенно приблизиться к понятию идеального решения кооперативных игр. Вероятно, построить удовлетворительную теорию кооперативных игр (да и не только кооперативных, но и любых игровых задач) невозможно, не располагая предварительно удовлетворительной теорией игровых равновесий.

К настоящему времени подобная теория создана и представлена в [5]. Данная общая теория использует в качестве отдельных составляющих все ценное, что было получено в классической теории игр, а именно, понятия седловой точки [6], равновесия по Роусу–Нэшу [7, 8] и «урезанное» равновесие Э.М. Вайсборда [9]. При построении общей теории равновесий необходимо было сначала найти такое исходное, наиболее слабое понятие равновесия, которое существует в любых конфликтных задачах независимо от класса используемых в них платежных функционалов и стратегий. Такое равновесие (A-равновесие [5]) автору удалось найти. Последовательное его усиление привело к иерархической цепи базовых взаимосвязанных равновесий $A \supset B \supset C \supset D$ и других их естественных усилений и ослаблений.

Поскольку A-равновесие никогда не пусто, то отпала необходимость доказывать теоремы существования для всех более сильных понятий равновесия, особенно если учесть тот факт, что всего лишь итерационное сужение (усиление) A-равновесия [5] (см. ниже теорему 3) приводит к весьма узкому и в то же время никогда не пустому множеству относительно «сильных» равновесий, всегда содержащему в себе все возможные наисильнейшие равновесия (как уже известные, так и еще не найденные).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПРАВЕДЛИВОГО ДЕЛЕЖА

Для определения справедливого дележа в кооперативной игре на основе теории конфликтных равновесий потребуется также понятие оптимальной последовательности коалиций [3–5], основанное на функции

$$\pi(P_k) \overset{\Delta}{=} 1/k\left[v(P_k) - \sum_{i \in P_k} v(i)\right] \overset{\Delta}{=} \frac{\Delta v(P_k)}{k},$$

характеризующей средний прирост доходов любых k игроков, объединившихся в коалицию P_k, по сравнению со случаем, если бы они действовали самостоятельно.

Следует иметь в виду, что функция π не означает, что прирост доходов $\Delta v(P_k^\alpha)$ игроков, объединившихся в коалицию P_k^α, распределяется между ними поровну. Она показывает только, что если величина $\pi(P_k^\alpha)$ в коалиции P_k^α больше, чем величина $\pi(P_i^\beta)$ в коалиции P_i^β, то при любой системе распределения, устраивающей игроков в обеих коалициях, все игроки коалиции P_k^α имеют возможность получить большую прибавку к их личному гарантированному доходу $v(j)$, чем игроки из коалиции P_i^β.

Непересекающиеся коалиции $P_i^1, P_j^2, P_k^3, \ldots$ из множества всех возможных коалиций $R(N)$ назовем оптимальными [5, с. 166], если они удовлетворяют условиям

$$\pi^1 \overset{\Delta}{=} \pi(P_i^1) = \pi(\overline{P}^1) = \max_{P^\alpha \in R(N)} \pi(P^\alpha), \quad P_i^1 = \cup \overline{P}^1;$$

$$\pi^2 \overset{\Delta}{=} \pi(P_j^2) = \pi(\overline{P}^2) = \max_{P^\alpha \in R(N-i)} \pi(P^\alpha),$$

$$P^\alpha \cap P_i^1 = \varnothing, \quad P_j^2 = \cup \overline{P}^2; \ldots, \tag{2}$$

где, например, P_i^1 — наибольшая коалиция (с числом участников i) на множестве коалиций $\overline{P}^1$ с одинаковым средним приростом доходов π^1.

Очевидно, $\pi^1 > \pi^2 > \pi^3 > \ldots$, а значит, на последовательности оптимальных коалиций игроки из «главной выигрывающей коалиции» P_i^1, т.е. той, средний доход членов которой максимален (и определяется функцией π^1), не заинтересованы принять в свой состав ни одного из оставшихся $(N-i)$ игроков, а игроки из второй оптимальной коалиции P_j^2 (определяемой функцией π^2) на том же основании не примут в свой состав игроков, не вошедших в первую и вторую оптимальные коалиции, и т.д.

Теорема 1 [5, с. 166]. Последовательность оптимальных коалиций $P^1, P^2, P^3, \ldots$ может быть неединственной только в том случае, если хотя бы одно из значений π^s в равенствах (2) достигается не менее чем на двух оптимальных коалициях, имеющих непустое пересечение.

Последовательность оптимальных коалиций $P^1, P^2, P^3, \ldots, P^\omega$ вводит следующие естественные ограничения на справедливый дележ кооперативного дохода:

$$\sum_{s \in P^1} x_s \ge v(P^1), \quad \sum_{s \in P^2} x_s \ge v(P^2), \ldots, \quad \sum_{s \in P^\omega} x_s \ge v(P^\omega). \tag{3}$$

В [5] теория кооперативных игр не была доведена до состояния, позволяющего находить в любой игре единственный справедливый дележ. Этот пробел в теории закрывает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $J_{P_N}(q^0) = v(P_N)$ — максимальный доход кооперации из N игроков, а q^* — единственное (наисильнейшее) равновесие. Тогда справедливый дележ $x_1 + \ldots + x_N = v(P_N)$ задается следующими равенствами с учетом неравенств (3):

$$x_i = \Gamma_i v(P_N) \overset{\Delta}{=} \Gamma_i J_{P_N}(q^0), \quad i = \overline{1, N},$$
$$\Gamma_i = \frac{J_i(q^*)}{\left(\sum_{k=1}^{N} J_i(q^*) \right)}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4}$$

или (что то же самое) — равенствами

$$x_i = J_i(q^*) + \Gamma_i \left(J_{P_N}(q^0) - \sum_{i=1}^{N} J_i(q^*) \right), \quad i = \overline{1, N}. \tag{4a}$$

Причем если кооперативный доход достигается в равновесной ситуации q^*, т.е. если $v(P_N) = J_{P_N}(q^*)$, то кооперативная игра (как следует из формулы (4)) имеет единственное решение (справедливый дележ), задаваемое, в случае недостижения ограничений (3), равенствами $x_i = J_i(q^*)$, определяющими непосредственно выигрыши игроков в этой ситуации. Если же дележ (4) не удовлетворяет ограничениям (3), то ищется совместное решение системы (3), (4). Если в задаче не одно, а множество Q^* равновесий, то полное множество претендующих на решение дележей в кооперативной игре получается подстановкой в приведенные выше формулы всех ситуаций $q^* \in Q^*$, причем устраивающий всех участников единственный справедливый дележ в игре всегда может быть получен с учетом ранжирования силы равновесий. В частности, в случае существования в игре m почти эквивалентных наисильнейших равновесий $(q^{1*}, \ldots, q^{m*})$ справедливый дележ кооперативного дохода находится из совместного решения системы неравенств (3) и следующих равенств:

$$x_i = \frac{J_i(q^{1*}) + \ldots + J_i(q^{m*})}{\sum_{k=1}^{N} (J_k(q^{1*}) + \ldots + J_k(q^{m*}))} J_{P_N}(q^0). \quad (5)$$

Заметим, что неединственность последовательности оптимальных коалиций в (3) формально порождает и неединственность дележа. Однако эта неединственность всегда разрешима. Разрешимость подобной формальной неединственности демонстрируется далее на примере 2, при решении которого используются понятия равновесий; их можно найти в [5, 10, 11].

Доказательство. Покажем, что в случае выхода из кооперации свою справедливую долю от кооперативного дохода не в состоянии улучшить ни один из участников, т.е. дележи (4) и (5) обеспечивают устойчивое решение кооперативной игры при удовлетворении ограничений (3) даже в случае неединственной последовательности оптимальных коалиций.

Если в игре только одна ситуация сильного равновесия, в которой достигается и ситуация кооперативного выигрыша, например, в тех случаях, когда в кооперативной ситуации выигрыши всех участников не очень сильно различаются по величине), то справедливый (т.е. устойчивый и не имеющий иных альтернатив) дележ (4) обеспечивают сами выигрыши игроков в равновесной ситуации, если ограничения (3) не достигаются. Поскольку независимо от того, кооперируются участники или нет, они гарантированно получают свой выигрыш в равновесной ситуации. Для сравнения заметим, что в кооперативной теории Неймана–Моргенштерна естественный справедливый равновесный выигрыш (дележ) никогда не мог бы быть найден вследствие континуумиального множества дележей в этой теории, претендующих на право называться справедливыми, и отсутствия критерия отбора на этом множестве действительно единственного справедливого (устойчивого по отношению к возможным его переделам) дележа. Что касается «справедливого» дележа по Шепли, то, как правило, он не совпадает с указанным наисильнейшим равновесием, а следовательно, не является устойчивым к возможным его переделам, в связи с чем не может называться справедливым. Если дележ (4) нарушает ограничения (3), но при этом последовательность оптимальных коалиций в (3) единственна, то уравнения и неравенства (3) и (4) решаются совместно и приводят к скорректированному (за счет неравенств (3)) дележу. В случае более одной последовательности оптимальных коалиций в (3) формально образуется и столько же возможных дележей, из которых, однако, всегда может быть найден единственный.

Если ситуация единственного наисильнейшего равновесия не совпадает с ситуацией кооперативного дохода, то любому из участников невыгодно отказываться от дележа, определяемого формулами (3), (4), поскольку отказ от кооперации означает в конечном счете переход игры в равновесную ситуацию, в которой все участники получают меньше, чем согласно справедливому дележу. Относительный выигрыш каждого участника в равновесной ситуации, в которой игра неизбежно оказывается при отказе от кооперации, служит основой разумного (справедливого) раздела, определяемого формулами (3) и (4).

В случае нескольких наисильнейших равновесий дележ кооперативного дохода осуществляется по формуле (5) (с учетом (3)), которая естественным образом обобщает формулу (4), учитывая выигрыши участников в этих равновесиях. Поскольку дробная часть формулы (5) определяет усредненную долю от суммарного выигрыша i-го участника в m наисильнейших равновесиях, в случае его отказа от дележа (5), (3) остальные игроки имеют возможность перевести игру в одну из ситуаций наисильнейшего равновесия, в которой его выигрыш меньше, чем получаемая им доля от дележа, определяемого формулой (5) (с учетом ограничений (3)).

Продемонстрируем возможности применения теоремы 2 для определения справедливого дележа в кооперативных играх на примерах игр с тремя участниками. Для решения этих примеров требуется знание различных типов равновесий [5, 10, 11], из числа которых далее приводится только наиболее общее понятие A-равновесия и его естественное усиление A'-равновесие, а также новые понятия $\hat{C}_{P_k}'$- и $\hat{D}_{P_k}'$-равновесий [11].

Определение 1[5]. Ситуацию $q^* = (q^*_{P_k}, q^*_{P_{N-k}}) \in G$ назовем коалиционно A_{P_k}-экстремальной для коалиции P_k, состоящей из k участников, если $G(q_{P^*_{N-k}}) = q^*_{P_k}$ или каждому состоянию $q_{P_k} \in G(q^*_{P_{N-k}}) \setminus q^*_{P_k}$ коалиции P_k можно поставить в соответствие по крайней мере одно состояние $\hat{q}_{P_{N-k}} \in G(q_{P_k})$ остальных участников $N-k$, так, чтобы

$$J_{P_k}(q_{P_k}, \hat{q}_{P_{N-k}} < q_{P_k} >) \le J_{P_k}(q^*). \tag{6}$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовем A'-равновесием [5], если она коалиционно экстремальна для любой коалиции P_k, $1 \le k < N$, из всего возможного числа $2^N - 2$ коалиций, т.е. если $A' = \bigcap\limits_{P_k} A_{P_k}$, $1 \le k \le N-1$.

Множество ситуаций, одновременно A_{P_k}-экстремальных для всех возможных коалиций, состоящих только из k участников, обозначим A'_{P_k}. Заметим, что множество всех возможных коалиций, состоящих только из k участников, равно числу сочетаний $c_N^k \overset{\Delta}{=} \dfrac{N!}{(N-k)!\,k!}$, а число всех возможных коалиций с числом участников от одного до $N-1$ включительно равно $\sum\limits_{k=1}^{N-1} c_N^k = 2^N - 2$. Очевидно, множество A' можно представить также в виде $A' = \bigcap\limits_{k} A_{P_k}'$, $1 \le k \le N-1$.

Поскольку множество A'-равновесий нередко оказывается пустым, в качестве основы для построения базовой цепи из последовательно усиливающихся равновесий в [5] принимается понятие всегда существующего A-равновесия, получающегося, если в определении 1 рассматриваются коалиции P_1 (число которых равно N), состоящие только из одного участника i ($i = 1, 2, \ldots, N$), в связи с чем неравенство (6) переходит в N неравенств

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \le J_i(q^*), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

Определение 2. Ситуация $q^* \in A'_{P_k}$ названа в [5] B'_{P_k}-равновесием, если равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in A'_{P_k}(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \tag{8}$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k (состоящей из k участников), число которых задается числом сочетаний c_N^k, т.е. «векторное» равенство (8) определяет c_N^k равенств, отвечающих c_N^k возможным коалициям, каждая из которых включает k участников (из общего числа N участников).

Следовательно, множество ситуаций B'_{P_k} задается пересечением всех тех множеств ситуаций, которые удовлетворяют всем c_N^k равенствам (8).

Определение 3. Ситуацию $q^* \in A'_{P_k}$ назовем $\hat{C}'_{P_k}$-равновесием, если «векторное» равенство

$$\max_{q_{P_{N-k}} \in G(q^*_{P_k})} J_{P_{N-k}}(q^*_{P_k}, q_{P_{N-k}}) = J_{P_{N-k}}(q^*) \tag{9}$$

выполняется для каждой конкретной коалиции P_k, представляя собой систему из c_N^k равенств. Следовательно, множество $\hat{C}'_{P_k}$-равновесных ситуаций задается пересечением c_N^k равенств (9).

Определение 4. Ситуацию $q^* \in \hat{C}'_{P_k}$ назовем $\hat{D}'_{P_k}$-равновесием, если она удовлетворяет «векторному» равенству

$$\max_{q \in \hat{C}'_{P_k}} J_{P_k}(q) = J_{P_k}(q^*), \tag{10}$$

представляющему собой систему из c_N^k равенств.

За счет определений 3 и 4 базовая система равновесий [5] может быть расширена, если ее дополнить следующими двумя равновесиями, получающимися из этих двух определений, если в них использовать только коалиции P_1, состоящие из одного участника.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in A$ назовем $\hat{C}'$-равновесием, если она удовлетворяет равенствам

$$\max_{q^i \in G(q_i)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Определение 6. Ситуацию $q^* \in \hat{C}'$ назовем $\hat{D}'$-равновесием, если

$$\max_{q \in \hat{C}_i{}'} J_i(q) = J_i(q^*), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{12}$$

Для задач с тремя и более участниками с учетом последних новых понятий равновесия ($\hat{C}'$ и $\hat{D}'$) итерационная структура только из основных базовых понятий равновесия (допускающих коалиционное и несимметричное расширение [5]) определяется следующей теоремой.

Теорема 3 [11]. В любой конфликтной задаче всегда выполняются следующие связи между базовыми равновесиями и их итерациями:

$$\begin{array}{lll}
 & & G \supset \overline{C} \\
 & & \cup \quad \cap \\
D \subset C \subset \Big| \; \overline{D} \subset \Big| & \subset B \subset \;\; ; D' \subset \;\; ; \hat{D}' \subset \hat{C}' \subset \Big| & \subset B' \subset \;\; A \supset \overline{C}^{\,0} \\
 & & \cup \quad \cap \\
D^1 \subset C^1 \subset \Big| \; \overline{D}^1 \subset \Big| & \subset B^1 \subset \;\; ; D'^1 \subset \;\; ; \hat{D}'^1 \subset \hat{C}'^1 \subset \Big| & \subset B'^1 \subset \;\; A^1 \supset \overline{C}^{\,1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

Благодаря данной теореме поиск наисильнейшего равновесия в задачах с любым числом участников упрощается за счет того, что на каждой следующей итерации слабейшие из равновесий (типа A^k) усиливаются (множества A^k сужаются), а остальные, более сильные, типы равновесий почти всегда ослабляются (множество этих равновесий расширяется), вследствие чего в случае отсутствия некоторого равновесия на k-й итерации оно может существовать на следующей итерации.

В задачах с двумя участниками иерархические и кольцевые связи между равновесиями богаче, чем в задачах с тремя и более участниками [5], причем оказывается, что все базовые равновесия, усиливающие на k-й итерации A^k-равновесие (при любом k), содержатся во множестве A^∞, за счет чего упрощается поиск наисильнейшего равновесия.

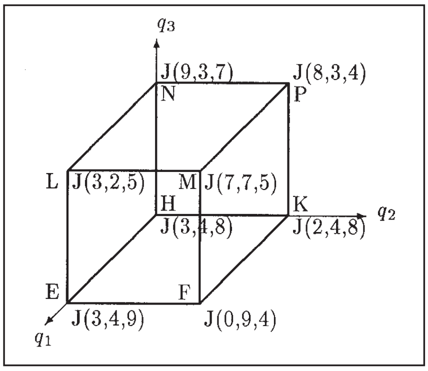

Рис. 1

Пример 1. Рассмотрим игру с тремя участниками, каждый из которых располагает всего двумя стратегиями. Пусть $J = (J_1, J_2, J_3)$ — платежная вектор-функция в этой игре. Поскольку стратегия $q_i(t)$ i-го участника принимает всего два значения, каждая функция J_i принимает всего восемь значений, которые при расчете равновесий целесообразно изобразить в трехмерном пространстве (q_1, q_2, q_3), например в виде параллелограмма (рис. 1) с вершинами E, F, H, K, L, M, N, P, в которых значения функций $J_i(q_1, q_2, q_3)$ следующие:

$$J(E) = (3, 4, 9),\ J(F) = (0, 9, 4),\ J(H) = (3, 4, 8),\ J(K) = (2, 4, 8),$$

$$J(L) = (3, 2, 5),\ J(M) = (7, 7, 5),\ J(N) = (9, 3, 7),\ J(P) = (8, 3, 4).$$

Исходя из рис. 1, найдем в сформулированной задаче сначала все базовые равновесия:

$$A_1 = (E, H, K, L, M, N, P), \quad A_2 = (E, F, H, K, M, N, P),$$

$$A_3 = (E, F, H, K, L, M, N, P), \quad A = (F, H, K, M, N, P),$$

$$B_1' = (E, H, K), \quad B_2' = (M, N, P), \quad B_3' = (E, H, M), \quad B' = \varnothing,$$

$$A_{12} = (F, M, N, P), \quad A_{13} = (E, M, N, P),$$

$$A_{23} = (E, F, H, K, M), \quad A'_{P_2} = (M), \quad A' = A \cap A'_{P_2} = (M),$$

$$B_{12} = (M, N, P), \quad B_{13} = (E, M, N, P), \quad B_{23} = (E, H, K, M),$$

$$B_{P_2} = B'_{P_2} = (M), \quad B \cap B_{P_2} = B' \cap B'_{P_2} = \varnothing.$$

Полученные базовые равновесия приводят к предварительному выводу, что в качестве одного из возможных кандидатов на роль наисильнейшего равновесия выступает ситуация (M). Найдем базовые равновесия на 1-й итерации, т.е. равновесия в игре, рассматриваемой только на множестве ситуаций A, которые позволят как уточнить «силу» равновесия (M), так и выявить новые равновесия. Соответствующие расчеты игры на множестве A приводят к следующим равновесиям:

$$A_1^1 = A_2^1 = (E, H, K, M, N, P), \quad A_3^1 = (E, H, K, M) = A^1,$$

$$A_{12}^1 = (E, H, M), \quad A_{13}^1 = (E, M, N, P), \quad A_{23}^1 = (E, H, K, M),$$

$$A'^1_{P_2} = (E, M), \quad A'^1 = A^1 \cap A'^1_{P_2} = (E, M),$$

$$B'^1_1 = (E, H, K), \quad B'^1_2 = (E, M), \quad B'^1_3 = (E, H, M), \quad B'^1 = (E),$$

$$B'^1_{12} = B'^1_{13} = B'^1_{23} = (E, H, K, M) = B'^1_{P_2},$$

$$B'^1 \cap B'^1_{P_2} = (E), \ \hat{C}'^1_1 = (E, H, K), \ \hat{C}'^1_2 = (M), \ \hat{C}'^1_3 = (E, H, M),$$

$$\hat{C}'^1 = \varnothing.$$

Итак, с одной стороны, $A'^1 = (E, M)$, в то время как ранее было найдено, что $A' = (M)$. Это свидетельствует, что на 1-й итерации множество равновесий типа A' расширилось и включило в себя не только ситуацию (M), но еще и ситуацию (E). Таким образом, множество ситуаций A' в данной задаче сильнее множества ситуаций A'^1. Следовательно, ситуация (E), рассматриваемая как A'-равновесная ситуация, немного слабее ситуации (M). С другой стороны, на множестве A'^1-равновесных ситуаций (E, M) ситуация (E) оказалась $B'^1 \cap B'^1_{P_2}$-равновесной, в то время как ситуация (M) таковой не является. Это означает, что ситуации (E) и (M) почти эквивалентны.

В игре имеется два практически эквивалентных наисильнейших равновесия — (E) и (M). Дележ кооперативного дохода в размере 19 (независимо от того, в какой из ситуаций, (M) или (N), игроки его получают) осуществляется с учетом только выигрышей участников в равновесных ситуациях (E) и (M). В случае несогласия кого-либо из участников с таким дележом игра может быть переведена в одну из равновесных ситуаций, причем в ту, в которой выигрыш несогласного с дележом игрока оказывается меньше его доли при справедливом дележе.Прежде чем искать справедливый дележ, найдем предварительно характеристическую функцию игры и последовательность оптимальных коалиций, которая предъявляет к дележу некоторые ограничения:

$$v(1) = 2, \quad v(2) = 3, \quad v(3) = 4, \quad v(1, 2) = 9, \quad v(1, 3) = 12, \quad v(2, 3) = 12,$$

$$\pi(1, 2) = 2, \quad \pi(1, 3) = 3, \quad \pi(2, 3) = 5/2.$$

Максимальное значение $\pi = 3$ достигается только для одной коалиции $(1, 3) = P^1$ (следовательно, в данной игре имеется всего одна последовательность оптимальных коалиций). Поскольку игроков всего три, роль второй оптимальной коалиции P^2 выполняет игрок 2. Оптимальная коалиция $P^1 = (1, 3)$ гарантирует себе выигрыш в размере 12, а оптимальная коалиция $P^2 = (2)$ — в размере 3, следовательно, дележ кооперативной игры должен удовлетворять ограничениям $x_1 + x_3 \geq v(1, 3) = 12, \ x_2 \geq 3$.

Поскольку в этой игре два равноценных равновесия — (E) и (M), применяя формулу (5), получаем

$$x_1 = 19\,\frac{3+7}{35} \approx 5.4; \quad x_2 = 19\,\frac{4+7}{35} \approx 6; \quad x_3 = 19\,\frac{9+5}{35} \approx 7.6.$$

Такой дележ удовлетворяет ограничениям (3), налагаемым оптимальными коалициями, и является справедливым. В самом деле, если в отсутствие кооперации в игре реализуется устойчивая ситуация (E), то 1-й игрок получает выигрыш всего лишь 3 вместо его кооперативной доли 5,4, а 2-й получает 4 вместо его доли 6. Если 3-й игрок не согласен со своей долей 7,6, то 1-й и 2-й игроки вполне могут перевести игру в устойчивую ситуацию (M), в которой выигрыш 3-го окажется всего лишь 5.

Заметим, что ограничения (3), предъявляемые оптимальными коалициями, довольно редко оказывают влияние на формулы (4) и (5). Следующий пример демонстрирует возможность подобного влияния.

Пример 2. Рассмотрим игру с тремя участниками, в которой платежные функции игроков принимают следующие значения: $J(E)=(5,6,5)$, $J(F)=(3,5,6)$, $J(H)=(2,8,3)$, $J(K)=(4,7,5)$, $J(L)=(7,1,6)$, $J(M)=(8,4,5)$, $J(N)=(4,3,4)$, $J(P)=(6,2,6)$. Все восемь возможных ситуаций и значения платежных функций в них изображены на рис. 2 в системе координат (q_1, q_2, q_3), где q_i — стратегия i-го игрока, принимающая всего два значения. Найдем наисильнейшие равновесия и решение кооперативной игры.

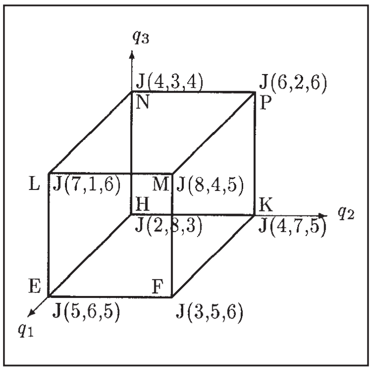

Рис. 2

Базовая система равновесий [5, 10, 11] приводит к следующим результатам:

$$A_1=(E,F,K,L,M,N,P),\quad A_2=(E,F,H,K,M,N,P),$$

$$A_3=(E,F,K,L,M,N,P),\quad A=(E,F,K,M,N,P),$$

$$A_{P_{12}}=(E,F,H,K,L,M,P),\quad A_{P_{13}}=(L,M),$$

$$A_{P_{23}}=(E,F,H,K),\quad A_{P_2}=\varnothing,\quad A'=\varnothing,$$

$$B_1=(E,F,K),\quad B_2=(E,M),\quad B_3=(E,K,M),\quad B=(E),$$

$$D_1'=\overline{D}_1=D_2'=\overline{D}_1=(E),\quad D_3'=\overline{D}_3=(E,K,M),$$

$$D'=\overline{D}=(E),\quad D'^n=\overline{D}^n=(E).$$

Ситуация (E) претендует на роль единственного наисильнейшего равновесия в этой игре. Все остальные ситуации — существенно более слабые равновесия. Первая итерация (т.е. игра на множестве A) предоставляет дополнительную информацию относительно равновесий:

$$A_1^1=(E,M,K,N,P),\quad A_2^1=(E,F,K,M,N),$$

$$A_3^1=(E,F,K,M,N,P),\quad A^1=(E,K,M,N),$$

$$A_{12}^1=(E,K,M,P),\quad A_{13}^1=(E,M),\quad A_{23}^1=(E,F,K),\quad A_{P_2}^1=(E),\quad A'^1=(E),$$

$$B_1^1=(E,K),\quad B_2^1=(E,M),\quad B_3^1=(E,K,M),\quad B^1=(E),$$

$$(D_1')^1=\overline{D}_1^1=(E),\quad (D_2')^1=\overline{D}_1^1=E,$$

$$(D_3')^1=\overline{D}_3^1=(E,K,M),\quad (D')^1=\overline{D}^1=(E),$$

$$C_1^1=(E,K),\quad C_2^1=(E,M),\quad C_3^1=(E,K,M),\quad C^1=(E),$$

$$D_1^1=(E),\quad D_2^1=(E),\quad D_3^1=(E,K,M),\quad D^1=(E),\ (\overline{C}^0)^1=(E,K,M,N).$$

Вторая итерация (т.е. игра на множестве A^1) завершает исследование равновесий:

$$A_1^2=A_2^2=A_3^2=A^2=A^1=(E,K,M,N),$$

$$B_1^2=(E,K),\quad B_2^2=(E,M),\quad B_3^2=(E,K,M),\quad B^2=(E),$$

$$A_{12}^2=(E,K,M),\quad A_{13}^2=(E,M),\quad A_{23}^2=(E,K),\quad A_{P_2}^2=A'^2=(E).$$

Итак, E — действительно наисильнейшее равновесие, а M, K, N — очень слабые равновесия. Поскольку равновесие E, по существу, единственно, дележ кооперативного дохода $J_{P_3}(M) = v(P_3) = 17$ осуществляется по формуле (4) с учетом ограничений (3).

Найдем последовательность оптимальных коалиций, рассчитав сначала функции $v(P_i)$ и π:

$$v(1) = 2,\ v(2) = 3,\ v(3) = 4,\ v(1,2) = 9,\ v(1,3) = 12,\ v(2,3) = 12,$$

$$\pi(1,2) = 2,\quad \pi(1,3) = 3,\quad \pi(2,3) = 5/2.$$

Поскольку функция π достигает одного и того же максимума (равного 3) на двух пересекающихся коалициях (2,3) и (1,3) (см. теорему 1), отсюда следует, что в данной задаче существует две последовательности оптимальных коалиций: $\{(2,3), (1)\}$ и $\{(1,3), (2)\}$, что требует рассмотрения. Формула (4) приводит к дележу $x_1 = (5/16)17 \approx 5,3$, $x_2 = (6/16)17 \approx 6,4$, $x_3 = (5/16)17 \approx 5,3$, не нарушающему ограничений (3) для первого случая, так как тогда $x_2 + x_3 = 11,7 > v(2,3) = 11$ и $x_1 = 5,3 > v(1) = 3$. Однако во втором случае ограничения (3) нарушаются, поскольку $x_1 + x_3 = 5,3 + 5,3 = 10,6 < 13$. Только один дележ $x_1 = 6,5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6,5$ удовлетворяет формулам (3) и (4) при выполнении обязательного условия, что 1-й и 3-й игроки, согласно формуле (4), должны получить поровну. Поэтому только этот последний дележ является единственно справедливым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
2. Shapley L.S. A value for n-person games // Contributions to the theory of games. — 1953. — **2**, N 28. — P. 307–317.
3. Смольяков Э.Р. Понятие решения коалиционной игры N лиц с трансферабельностью // Докл. АН СССР. — 1973. — **210**, № 2. — С. 1290–1292.
4. Смольяков Э.Р. Аксиоматика теории кооперативных игр // Докл. РАН. — 2002. — **383**, № 2. — С. 179–183.
5. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 304 с.
6. Neumann J. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Math. Annalen. — 1928. — **100**. — P. 295–320.
7. Nash J. Non-cooperative games // Ann. Math. — 1951. — **54**, N 2. — P. 286–295.
8. Roos C.F. Generalized Lagrange problems in the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — **30**. — P. 360–386.
9. Вайсборд Э.М. О коалиционных дифференциальных играх // Диф. уравнения. — 1974. — **10**, № 4. — С. 613–623.
10. Смольяков Э.Р. Новая теория кооперативных игр // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 5. — С. 156–167.
11. Смольяков Э.Р. Вспомогательные сильные равновесия для динамических конфликтных задач // Диф. уравнения. — 2007. — **43**, № 11. — С. 1497–1506.

Поступила 03.07.2007