УДК 519.853.3

Н.Б. ШАМРАЙ

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Ключевые слова: *вариационно-подобные неравенства, условия разрешимости, 0-диагональная выпуклость, F-монотонность.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое выпуклое замкнутое множество и $G, F: X \to \mathbb{R}^m$ — однозначные непрерывные отображения. Рассмотрим задачу решения вариационно-подобного неравенства, обозначаемую далее как $VLI(G, F, X)$, которая состоит в поиске точки $x^* \in X$ такой, что

$$\left\langle G(x^*), F(x) - F(x^*) \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

Свойства непустоты, замкнутости и выпуклости множества X, а также непрерывности и однозначности отображений G, F предполагаются выполнимыми всюду в рамках данной статьи.

Заметим, что, с одной стороны, $VLI(G, F, X)$ является одним из многочисленных обобщений задачи решения вариационного неравенства (например, [1, 2]): найти точку $x^* \in X$ такую, что

$$\left\langle G(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n, \ G: X \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

с другой — представляет собой частный случай задачи равновесия (например, [3, 4]): найти точку $x^* \in X$ такую, что

$$\Phi(x^*, x) \geq 0 \quad \forall x \in X, \ X \subseteq \mathbb{R}^n, \ \Phi: X \times X \to \mathbb{R}. \tag{3}$$

Термин «вариационно-подобное неравенство» (variational-like inequality) впервые появился в работе [5] применительно к задаче нахождения точки $x^* \in X$ такой, что

$$\left\langle G(x^*), \eta(x, x^*) \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \ X \subseteq \mathbb{R}^n, \ G: X \to \mathbb{R}^n, \ \eta: X \times X \to \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Несмотря на то что вариационно-подобное неравенство (1) имеет тесную связь с задачами (2)–(4), оно обладает определенной спецификой и может служить самостоятельным объектом для исследований.

Побудительным мотивом к изучению $VLI(G, F, X)$, в частности, служит возможность преобразования исходного вариационного неравенства (2) в вариационно-подобное неравенство (1) с целью сокращения размерности, упрощения допустимой области или улучшения других вычислительных свойств исходной задачи [6]. Кроме того, с помощью вариационно-подобных неравенств (1) можно проводить полную или частичную параметрическую коррекцию несовместных систем неравенств, что позволяет получить обобщенные решения рассматриваемых некорректных систем [7, 8]. Также в терминах $VLI(G, F, X)$ естественным образом записываются условия равновесия экономических систем [9].

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Традиционно при исследовании вопроса о существовании решения у задач равновесия и вариационных неравенств рассматривают случаи ограниченного и неограниченного допустимого множества.

Как наиболее общий случай адаптируем теорию существования решений для задач равновесия (3) к построению той же теории для $VLI(G, F, X)$.

Теорема 1 [3, 4]. Пусть бифункция $\Phi: X \times X \to \mathbb{R} \cup (+\infty\}$ такая, что на множестве X для любого фиксированного $y \in X$ функция $\Phi(\cdot, y)$ полунепрерывна сверху и для любого фиксированного $x \in X$ функция $\Phi(x, \cdot)$ квазивыпукла. Задача равновесия (3) имеет решение, если выполнено одно из следующих условий:

а) множество X ограничено;

б) найдется непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для каждого $x \in X \setminus Y$ существует $y \in Y$, при котором $\Phi(x, y) < 0$.

Применяя теорему 1 к вариационно-подобным неравенствам (1), получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x) F(\cdot)$ квазивыпукла на X. Задача $VLI(G, F, X)$ имеет решение, если выполнено одно из следующих условий:

а) множество X ограничено;

б) найдется непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для любого $x \in X \setminus Y$ существует $y \in Y$, при котором $\langle G(x), F(y) - F(x) \rangle < 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу равновесия (3), где $\Phi(x^*, x) = \left\langle G(x^*), F(x) - F(x^*) \right\rangle$. Поскольку G и F — непрерывные отображения, то функция $\Phi(\cdot, y)$ непрерывна. Так как $G^T(x) F(\cdot)$ — квазивыпукла, то $\Phi(x, \cdot)$ также квазивыпукла. Тогда в силу теоремы 1 вариационно-подобное неравенство (1) имеет решение. Утверждение доказано.

Помимо предположений об ограниченности или неограниченности допустимого множества X представляет интерес исследование $VLI(G, F, X)$ на предмет существования решений в предположениях разных форм выпуклости отображений G и F. В качестве одной из таких форм может быть рассмотрена так называемая диагональная выпуклость, определение и свойства которой впервые были изучены в работе [10] применительно к бифункциям.

Обозначим $\Lambda^k = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^k : \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$ k-мерный симплекс.

Определение 1. Будем считать, что $VLI(G, F, X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X, если для каждого конечного множества точек $\{y^1, \ldots, y^k\} \in X$ и любой выпуклой комбинации $y_\lambda = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i y^i$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \Lambda^k$, выполнено

$$\left\langle G(y_\lambda), \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F(y^i) - F(y_\lambda) \right\rangle \ge 0.$$

Для вариационно-подобного неравенства (1) имеют место следующие условия разрешимости.

Теорема 2. Пусть $VLI(G, F, X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X и множество X ограничено. Тогда вариационно-подобное неравенство (1) имеет решение.

Доказательство. Пусть $y_\mu = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i y^i$, где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \Lambda^k$. Положим

$$\varphi(\mu, \lambda) = \left\langle G(y_\mu), \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F(y^i) - F(y_\mu) \right\rangle.$$

Для каждого $\mu \in \Lambda^k$ построим множество $V(\mu) = \left\{ \bar{\lambda} \in \Lambda^k : \varphi(\mu, \bar{\lambda}) = \min\limits_{\lambda \in \Lambda^k} \varphi(\mu, \lambda) \right\}$.

Поскольку Λ^k — компактное множество и $\varphi(\mu, \lambda)$ — линейная по λ функция, то $V(\mu)$ — непустое выпуклое подмножество Λ^k для любого $\mu \in \Lambda^k$. Покажем, что отображение $V: \Lambda^k \to 2^{\Lambda^k}$ замкнуто.

Возьмем произвольную точку $\widetilde{\mu} \in \Lambda^k$. Пусть $\lim\limits_{l \to \infty} \mu^l = \widetilde{\mu}, \mu^l \in \Lambda^k$ и $\lim\limits_{l \to \infty} \lambda^l = \widetilde{\lambda},\ \lambda^l \in V(\mu^l)$. Поскольку G и F — непрерывные отображения, то функция $\varphi(\mu, \lambda)$ непрерывна по μ, а так как $\varphi(\mu, \lambda)$ линейна по λ, то она также непрерывна по λ. Отсюда

$$\varphi(\widetilde{\mu}, \widetilde{\lambda}) = \lim_{l \to \infty} \varphi(\mu^l, \lambda^l) = \lim_{l \to \infty} \min_{\lambda \in \Lambda^k} \varphi(\mu^l, \lambda) =$$

$$= \min_{\lambda \in \Lambda^k} \lim_{l \to \infty} \varphi(\mu^l, \lambda) = \min_{\lambda \in \Lambda^k} \varphi(\widetilde{\mu}, \lambda).$$

Следовательно, $\widetilde{\lambda} \in V(\widetilde{\mu})$, т.е. V — замкнутое отображение.

По теореме Какутани отображение $V \colon \Lambda^k \to 2^{\Lambda^k}$ имеет неподвижную точку $\overline{\mu}$ такую, что

$$0 \le \varphi(\overline{\mu}, \overline{\mu}) = \min_{\lambda \in \Lambda^k} \varphi(\overline{\mu}, \lambda) = \min_{\lambda \in \Lambda^k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\langle G(y_{\overline{\mu}}),\ F(y^i) - F(y_{\overline{\mu}}) \right\rangle =$$

$$= \min_{i \in \{1, \dots, k\}} \left\langle G(y_{\overline{\mu}}),\ F(y^i) - F(y_{\overline{\mu}}) \right\rangle,$$

где $y_{\overline{\mu}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\mu}_i y^i$. Таким образом, для любого конечного множества точек $\mathcal{Y} = \{y^1, \dots, y^k\} \subset X$ существует точка $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\mathcal{Y}) \in \Lambda^k$ и соответственно вектор $y_{\overline{\mu}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{\mu}_i y^i$ такие, что

$$\left\langle G(y_{\overline{\mu}}), F(y) - F(y_{\overline{\mu}}) \right\rangle \ge 0 \quad \forall y \in \mathcal{Y}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех конечных подмножеств множества X. Для любого $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}$ построим множество $\mathcal{M}(\mathcal{Y}) = \{\overline{x} \in X \colon \left\langle G(\overline{x}), F(y) - F(\overline{x}) \right\rangle \ge 0\ \forall y \in \mathcal{Y}\}$.

В силу сказанного выше $\mathcal{M}(\mathcal{Y}) \ne \varnothing$. Пусть x^0 — предельная точка $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$, тогда ее можно представить в виде предела некоторой последовательности $\{x^l\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, сходящейся к x^0: $\lim\limits_{l \to \infty} x^l = x^0$. Поскольку G и F непрерывны,

$$0 \le \lim_{l \to \infty} \left\langle G(x^l), F(y) - F(x^l) \right\rangle = \left\langle G(x^0), F(y) - F(x^0) \right\rangle \quad \forall y \in \mathcal{Y}$$

и, следовательно, $x^0 \in \mathcal{M}(\mathcal{Y})$. Таким образом, для каждого $\mathcal{Y} \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ замкнуто. Покажем, что $\bigcap\limits_{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(\mathcal{Y}) \ne \varnothing$.

Заметим, что множество $\mathcal{M}$ является центрированной системой в X [11]. В самом деле, пусть $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{Y}_3 = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \in \mathcal{M}$. Тогда $\varnothing \ne \mathcal{M}(\mathcal{Y}_3) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{Y}_1) \cap \mathcal{M}(\mathcal{Y}_2)$. Отсюда следует, что любое конечное пересечение элементов множества $\mathcal{M}$ непусто, т.е. $\mathcal{M}$ — центрированная система в X.

Так как X — компактное множество, то всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение [11], т.е. $\bigcap\limits_{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(\mathcal{Y}) \ne \varnothing$.

Поскольку $X = \bigcup\limits_{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}} \mathcal{Y}$ и $\bigcap\limits_{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(\mathcal{Y}) \ne \varnothing$, то существует точка $x^* \in \bigcap\limits_{\mathcal{Y} \in \mathcal{M}} \mathcal{M}_{\mathcal{Y}}$ такая, что $\left\langle G(x^*), F(y) - F(x^*) \right\rangle \ge 0 \quad \forall y \in X$.

Теорема доказана.

Для неограниченного допустимого множества X справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $VLI(G, F, X)$ обладает свойством 0-диагональной выпуклости на X и существует непустое ограниченное подмножество $Y \subseteq X$ такое, что для любого $x \in X \setminus Y$ найдется $y \in Y$, при котором

$$\left\langle G(x), F(y) - F(x) \right\rangle < 0. \tag{5}$$

Тогда вариационно-подобное неравенство (1) имеет решение.

Доказательство. Построим шар $B(R)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ ||x||\le R\}$ с радиусом $R>0$ таким, что $Y\subset X\cap B(0,R)=X_R$. По теореме 2 существует точка $x_R\in X_R$, удовлетворяющая

$$\langle G(x_R),F(z)-F(x_R)\rangle\ge 0\ \ \forall z\in X_R.$$

В силу условия (5) для любого R решение $x_R\in Y$, значит, последовательность $\{x_R\}$ ограничена и можно считать, что существует точка $x^*\in Y$ такая, что $\lim\limits_{R\to\infty} x_R=x^*$.

Выберем произвольно точку $y\in X$. Очевидно, что найдется радиус $r>0$, при котором $y,x^*\in X_R$, где $R\ge r$. Отсюда для любого $R\ge r$ выполнено

$$\langle G(x_R),F(y)-F(x_R)\rangle\ge 0. \tag{6}$$

Поскольку отображения G и F непрерывны и $\lim\limits_{R\to\infty} x_R=x^*$, переходя к пределу в (6) при $R\to\infty$, для любого $y\in X$ получаем $\left\langle G(x^*),F(y)-F(x^*)\right\rangle\ge 0$.

Теорема доказана.

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННО-ПОДОБНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Гарантировать единственность решения $VLI(G,F,X)$ позволяют свойства монотонности. Будем использовать следующее определение.

Определение 2. Пусть $G: X\to\mathbb{R}^m$ и $F: X\to\mathbb{R}^m$. Отображение G называется:

— строго F-псевдомонотонным на X, если для любых $x,\ y\in X$ таких, что $x\ne y$, из $\langle G(x),F(y)-F(x)\rangle\ge 0$ следует $\langle G(y),F(y)-F(x)\rangle>0$;

— сильно F-монотонным на X с константой $\tau>0$, если для любых $x,\ y\in X$ выполнено $\langle G(x)-G(y),F(x)-F(y)\rangle\ge\tau\,||x-y||^2$.

Теорема 4. Если в $VLI(G,F,X)$ отображение G строго F-псевдомонотонно, то может существовать не более одного решения вариационно-подобного неравенства (1).

Доказательство. Предположим, что точки $x^1,x^2\in X,\ x^1\ne x^2$, являются решениями $VLI(G,F,X)$, т.е. выполнено

$$\left\langle G(x^1),\ F(x)-F(x^1)\right\rangle\ge 0\ \ \forall x\in X, \tag{7}$$

$$\left\langle G(x^2),\ F(x)-F(x^2)\right\rangle\ge 0\ \ \forall x\in X. \tag{8}$$

Положим $x=x^2$ в неравенстве (7) и $x=x^1$ в (8). Тогда

$$\left\langle G(x^1),\ F(x^2)-F(x^1)\right\rangle\ge 0,\qquad \left\langle G(x^2),\ F(x^2)-F(x^1)\right\rangle\le 0,$$

что противоречит предположению о строгой F-псевдомонотонности отображения G.

Теорема доказана.

Отметим, что любое сильно F-монотонное отображение одновременно является и строго F-псевдомонотонным. В самом деле, пусть отображение G сильно F-монотонно с константой $\tau>0$. Тогда, если для любых $x,\ y\in X$, таких, что $x\ne y$, выполнено $\langle G(x),F(y)-F(x)\rangle\ge 0$, имеет место неравенство

$$\langle G(y),F(y)-F(x)\rangle\ge\langle G(x),F(y)-F(x)\rangle+\tau\,||x-y||^2>0.$$

Строгой F-псевдомонотонности недостаточно, чтобы обеспечить разрешимость вариационно-подобного неравенства (1). Существование и единственность решения $VLI(G,F,X)$ гарантирует следующая теорема.

Теорема 5. Если в $VLI(G,F,X)$ на множестве X для любого фиксированного $x\in X$ функция $G^T(x)F(\cdot)$ выпукла и отображение G является сильно F-монотонным, то вариационно-подобное неравенство (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Если множество X ограничено, то в силу утверждения 1 задача $VLI(G, F, X)$ разрешима, а в силу теоремы 4 ее решение единственно.

Пусть X неограничено. Выберем произвольно точку $x \in X$ и шар $B(x, R) = \{u \in \mathbb{R}^n : ||u - x|| \leq R\}$ с центром в x и радиусом $R > 0$. Определим множество $X_R = X \cap B(x, R)$. Поскольку бифункция $G^T(x) F(u)$ непрерывна по u, на компактном множестве X_R она достигает своего наименьшего значения, следовательно, существует $-\infty < \mu_R < +\infty$ такое, что

$$\langle G(x), F(u) - F(x) \rangle \geq \mu_R \quad \forall u \in X_R .$$

При этом, так как $x \in X_R$, то $\mu_R \leq 0$. Выберем произвольно точку $y \in X \setminus X_R$. Положим $\lambda = \dfrac{R}{||x - y||} \in (0, 1]$. Точка вида $v = \lambda y + (1 - \lambda) x$ принадлежит множеству X_R.

По предположению теоремы бифункция $G^T(x) F(y)$ выпукла по y, следовательно, имеет место оценка

$$\mu_R \leq \langle G(x), F(v) - F(x) \rangle \leq \lambda \langle G(x), F(y) - F(x) \rangle.$$

Отсюда $\langle G(x), F(x) - F(y) \rangle \leq -\dfrac{\mu_R}{R} ||x - y||$.

Используя сильную F-монотонность отображения G с константой $\tau > 0$, получаем

$$\langle G(y), F(x) - F(y) \rangle \leq \langle G(x), F(x) - F(y) \rangle - \tau ||x - y||^2 \leq$$

$$\leq -\frac{\mu_R}{R} ||x - y|| - \tau ||x - y||^2 = -||x - y|| \left(\frac{\mu_R}{R} + \tau ||x - y|| \right) < 0 ,$$

если $||x - y|| > -\dfrac{\mu_R}{R\tau}$. Таким образом, можно построить непустое компактное множество $X_{\overline{R}} = X \cap B(x, \overline{R})$, где $\overline{R} > \max\left\{ R, \ -\dfrac{\mu_R}{R\tau} \right\}$, вне которого ни одна точка не может быть решением $VLI(G, F, X)$. Отсюда, так как любая выпуклая функция одновременно является и квазивыпуклой и 0-диагонально выпуклой, то по теореме 3 вариационно-подобное неравенство имеет решение. Поскольку любое сильно F-монотонное отображение является и строго F-монотонным, это решение единственно.

Теорема доказана.

Учитывая специфику $VLI(G, F, X)$, можно получить и другие условия существования и единственности решения. Как показывает следующий результат, свойство выпуклости функции $G^T(x) F(\cdot)$ в теореме 5 можно ослабить, если предположить, что F — липшицево отображение.

Теорема 6. Пусть $VLI(G, F, X)$ на множестве X либо удовлетворяет условию 0-диагональной выпуклости, либо для любого фиксированного $x \in X$ функция $G^T(x) F(\cdot)$ является квазивыпуклой. Если на множестве X отображение F удовлетворяет условию Липшица и отображение G является сильно F-монотонным, то вариационно-подобное неравенство (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Если множество X ограничено, то в силу результатов, полученных выше, $VLI(G, F, X)$ имеет единственное решение.

Пусть X неограничено. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, выберем произвольно точку $x \in X$, построим шар $B(x, R)$ и определим множество $X_R = X \cap B(x, R)$. Пусть $\mu_R < \infty$ такое, что $||G(u)|| \leq \mu_R$ для любого $u \in X_R$.

Выберем произвольно точку $y \in X \setminus X_R$. В силу предположений теоремы получаем следующую оценку:

$$\langle G(y), F(x) - F(y) \rangle \leq \langle G(x), F(x) - F(y) \rangle - \tau ||x - y||^2 \leq$$

$$\leq L ||G(x)|| \, ||x - y|| - \tau ||x - y||^2 \leq -||x - y|| (\tau ||x - y|| - L\mu_R) < 0$$

при $||x-y||>\frac{L\mu_R}{\tau}$, где $L>0$ — константа Липшица для отображения F, $\tau>0$ — константа сильной F-монотонности для отображения G.

Таким образом, существует непустое компактное множество $X_{\bar{R}}=X\cap B(x,\bar{R})$, где $\bar{R}>\max\left\{R, \frac{L\mu_R}{\tau}\right\}$, вне которого ни одна точка не может быть решением $VLI(G,F,X)$. Следовательно, по теореме 3 (если $VLI(G,V,X)$ удовлетворяет 0-диагональной выпуклости) или по утверждению 1 (если $G^T(x)F(\cdot)$ квазивыпукла) существует решение вариационно-подобного неравенства (1). Поскольку G сильно F-монотонно, по теореме 4 это решение единственно.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют развить общую теорию вариационных неравенств с точки зрения условий существования и единственности их решения.

Гарантом разрешимости одной из форм обобщения вариационных неравенств, так называемых вариационно-подобных неравенств, выступают свойства обобщенной выпуклости отображений и ограниченность допустимого множества или дополнительные предположения о его структуре. Существование решений у вариационно-подобных неравенств доказано при двух формах обобщенной выпуклости — квазивыпуклости и 0-диагональной выпуклости. Единственность решения обеспечивается свойством строгой F-псевдомонотонности. Условиями существования и единственности решения являются сильная F-монотонность отображений, а также либо условия выпуклости, либо условия обобщенной выпуклости (квазивыпуклости или 0-диагональной выпуклости) дополнительно с предположением липшицевости отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983. — 256 с.
2. Harker P.T., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications // Math. Program. Series B. — 1990. — **48**, N 2. — P. 161–220.
3. Konnov I. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin: Springer, 2001. — 184 p.
4. Bianchi M., Schaible S. Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems // J. Opt. Theory and Appl. — 1996. — **90**, N 1. — P. 31–43.
5. Parida J., Sahoo M., Kumar A. A variational-like inequality problem // Bull. Austral. Math. Soc. — 1989. — **39**. — P. 225–231.
6. Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Метод локальных выпуклых мажорант для вариационно-подобных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 3. — С. 355–363.
7. Шамрай Н.Б. О двух подходах к решению систем неравенств // Омск. науч. вестн. — 2003. — № 3 (24). — С. 55–57.
8. Зыкина А.В., Шамрай Н.Б. Проективный метод для систем неравенств // Докл. акад. наук высш. шк. России. Новосиб. отд-ние АН ВШ. — 2005. — № 1(4). — С. 36–43.
9. Шамрай Н.Б. Применение вариационно-подобных неравенств для решения задач транспортного ценового равновесия // Информатика и системы управления. — 2006. — № 1(11). — С. 62–72.
10. Zhou J.X., Goong C. On diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities // J. Math. Analysis and Appl. — 1988. — **132**, N 1. — P. 213–225.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

Поступила 05.10.2007