УДК 519.7

А.Ю. БРИЛА

ДОСТИЖИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПО ВЗВЕШЕННОЙ СУММЕ КРИТЕРИЕВ РАЗНОЙ ВАЖНОСТИ В ТРАНЗИТИВНОЙ СУБОРДИНАЦИИ

Ключевые слова: *достижимость, субординация, цепь критериев, линейная задача лексикографической многокритериальной оптимизации*.

В последнее время возрос интерес к исследованию многокритериальных моделей как непрерывной, так и дискретной оптимизации. Различным аспектам исследования и построения методов решения задач многокритериальной оптимизации посвящены работы [1–9].

Рассмотрим линейную многокритериальную задачу с линейными критериями

$$c_k(x),\ \ k = 1, 2, \ldots, q, \tag{1}$$

и множеством допустимых решений $X \subset R^n$. Пусть X^V — множество допустимых решений, которые являются вершинами множества X.

Если выбор осуществляется по многим критериям, то возникает вопрос, какая допустимая альтернатива может быть результатом этого выбора. Ее определение базируется на сравнении альтернатив между собой. На основании этого сравнения вводится единственное упорядочение на множестве рассматриваемых альтернатив. Критерий, с помощью которого осуществляется такое упорядочение, называют сверткой критериев [1]. Отметим, что свертки критериев обычно определяются путем сравнения критериев между собой. При их количественном сравнении, т.е. сравнении их значений (оценок), получаются свертки этих критериев в один единственный скалярный критерий. Некоторые способы построения таких сверток рассматриваются в [2–4]. При сравнении критериев согласно их относительной важности при оценке альтернатив получаются свертки этих критериев в один единственный векторный критерий с векторной функцией оценок.

Если оптимальную альтернативу многокритериальной задачи оптимизации можно получить как оптимальное решение соответствующей однокритериальной задачи оптимизации с целевой функцией, которая является линейной сверткой критериев многокритериальной задачи, то считается, что эта оптимальная альтернатива достижима по взвешенной сумме критериев разной важности.

Свертка критериев также может задаваться в системе связей между критериями, в которой выражается подчиненность одних критериев другим. Распространенной является система попарного подчинения, которую еще называют субординацией, заданной на множестве критериев. Субординация для любых двух критериев устанавливает то, что либо один из них подчинен другому, либо они взаимно подчинены, или ни один из них не подчинен другому.

Пусть на множестве линейных критериев (1) задана некоторая транзитивная субординация S, т.е. для произвольных критериев c_k, c_l, c_t $(1 \le k, l, t \le q)$, если c_k подчинен c_l и c_l подчинен c_t, то c_k подчинен c_t.

Упорядоченная последовательность критериев, т.е. вектор $h_p = (c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots, c_{p_{r_p}})$, $r_p \le q$, называют цепью критериев [1], ранжированных в субординации S, если и только если:

1) во множестве критериев (1) не существует критерия, который не принадлежит h_p и которому в субординации S подчинен каждый критерий последовательности h_p;

2) во множестве критериев (1) не существует критерия, который не принадлежит h_p и который в субординации S подчинен каждому критерию последовательности h_p;

3) критерии последовательности h_p в субординации S строго ранжированы в соответствии с порядком их номеров $p_1, p_2, \ldots, p_{r_p}$ так, что p_1-й критерий имеет наивысший ранг, p_{r_p}-й критерий имеет самый низкий ранг, ранг p_i-го критерия больше ранга p_j-го критерия, если и только если $i < j$.

Для каждой из таких цепей критериев можно рассматривать соответствующую задачу лексикографической оптимизации:

$$\max{}^L h_p(x) = (c_{p_1}(x), c_{p_2}(x), \ldots, c_{p_{r_p}}(x)),\ x \in X. \tag{2}$$

Для векторного критерия в задаче (2) можно отыскать такие коэффициенты $\alpha_k^p > 0,\ k = 1, 2, \ldots, r_p$, что решение задачи (2) является решением следующей задачи линейного программирования:

$$\max L'(x) = \sum_{k=1}^{r_p} \alpha_k^p c_{p_k}(x),\ \ x \in X. \tag{3}$$

Теорема 1 [5]. Если $X \subset R^n$ — замкнутый ограниченный выпуклый многогранник с конечным множеством вершин X^V, а все частичные критерии $c_{p_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, r_p$, линейны, то существуют положительные числа $\alpha_k^p > 0,\ k = 1, 2, \ldots, r_p$, такие, что множество точек максимума функционала $L'(x) = \sum\limits_{k=1}^{r_p} \alpha_k^p c_{p_k}(x)$ есть множество оптимальных решений задачи (2). Число $\alpha_{r_p}^p > 0$ можно назначить произвольно, а остальные последовательно выбрать из условий

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^{r_p} \alpha_k^P M_k,\ \ r = 1, 2, \ldots, r_p - 1,$$

где

$$0 < \mu_r \le \inf_{\substack{x,\, y \in X^V \\ c_r(x) \ne c_r(y)}} |c_r(x) - c_r(y)|,\ \ r = 1, 2, \ldots, r_p - 1,$$

$$M_k \ge \max_{x \in X} c_k(x) - \min_{x \in X} c_k(x),\ \ k = 2, 3, \ldots, r_p.$$

Заметим, что разным цепям критериев в субординации S, в общем, соответствуют разные наборы коэффициентов, таких что оптимальные решения соответствующих задач лексикографической оптимизации достижимы по взвешенной сумме критериев разной важности.

Рассмотрим вопрос нахождения таких коэффициентов α_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, что оптимальные решения задачи лексикографической оптимизации, соответствующей некоторой произвольной цепи критериев, достижимы по взвешенной сумме критериев разной важности. Для этого введем величины μ^*, M^*, m^*:

$$0 < \mu^* \le \inf\{|c_j(x) - c_j(y)| \mid x, y \in X^V, c_j(x) \ne c_j(y), j = 1, 2, \ldots, q\}, \tag{4}$$

$$M^* = \max\{c_j(x) \mid j \in 1, 2, \ldots, q, x \in X^V\}, \tag{5}$$

$$m^* = \min\{c_j(x) \mid j \in 1, 2, \ldots, q, x \in X^V\}. \tag{6}$$

Пусть α_q — произвольное положительное число, а все другие $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, \ldots$ $\ldots, \alpha_1$ находятся из условия

$$\alpha_l > \frac{1}{\mu^*} \sum_{k=l+1}^{q} \alpha_k (M^* - m^*),\ \ l = q-1, q-2, \ldots, 1. \tag{7}$$

Построим функционал
$$L(x)=\sum_{k=1}^{r_p}\alpha_k c_{p_k}(x). \tag{8}$$

Теорема 2. Решение задачи линейного программирования
$$\max L(x)=\sum_{k=1}^{r_p}\alpha_k c_{p_k}(x),\ x\in X, \tag{9}$$
является решением лексикографической задачи (2) для любого векторного критерия h_p, который выступает цепью критериев, ранжированных в транзитивной субординации S.

Доказательство. Покажем, что функционал (8) представляет лексикографический порядок на множестве X^V в задаче (2), т.е. что множество решений задачи (9) является множеством решений задачи (2). Действительно, согласно правилам определения величин μ^*, M^*, m^* получим:
$$0<\mu^*\le \inf\{|c_{p_k}(x)-c_{p_k}(y)|\,|\,x,y\in X^V,\ c_{p_k}(x)\ne c_{p_k}(y),\ k=1,2,\dots,r_p-1\}, \tag{10}$$
$$M^*\ \ge \max_{x\in X^V} c_{p_k}(x),\ k=2,3,\dots,r_p, \tag{11}$$
$$m^*\ \le \min_{x\in X^V} c_{p_k}(x),\ k=2,3,\dots,r_p. \tag{12}$$
Из условий (11), (12) следует
$$M^*-m^*\ \ge \max_{x\in X^V} c_{p_k}(x)-\min_{x\in X^V} c_{p_k}(x),\ k=2,3,\dots,r_p. \tag{13}$$

Таким образом, поскольку выполняются условия (10) и (13), то согласно теореме 1 получаем, что функционал (8) представляет лексикографический порядок на множестве X^V в задаче (2), а следовательно, решение задачи (9) является решением задачи (2). Поскольку условия (10), (13) выполняются для любого критерия c_k, $k\in\{1,2,\dots,q\}$, то оптимальные решения задачи (2) достижимы по взвешенной сумме с коэффициентами α_k, $k=1,2,\dots,q$, критериев разной важности для любого векторного критерия h_p, который является цепью критериев в транзитивной субординации S.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда на множестве линейных скалярных критериев (1) задана частичная транзитивная субординация ранжирования S. В этой субординации множество критериев разбивается на подмножества
$$Q_j=\{c_{j_1},c_{j_2},\dots,c_{j_{q_j}}\},\ j=1,2,\dots,r, \tag{14}$$
число которых равняется числу рангов r, по которым ранжируются критерии (1). Каждое из подмножеств (14) является множеством попарно неподчиненных друг другу критериев. Критерии подмножества Q_1 имеют наивысший ранг, а критерии подмножества Q_r — самый низкий; ранг критериев подмножества Q_l больше ранга критериев подмножества Q_p, если и только если $l<p$. Каждый критерий подмножества низшего ранга подчинен каждому критерию подмножества высшего ранга. Следовательно, любые два критерия с разными рангами в этой субординации связаны между собой связью подчиненности. Пусть c_k, c_l, c_t $(1\le k,l,t\le q)$ — некоторые критерии с разными рангами. Если c_k подчинен c_l и c_l подчинен c_t, то c_k подчинен c_t, поскольку c_k принадлежит подмножеству низшего ранга, а c_t — подмножеству высшего ранга, следовательно, эта субординация является транзитивной субординацией на множестве критериев.

Рассмотрим цепи критериев
$$\widetilde{h}_p=(c_{p_1},c_{p_2},\dots,c_{p_r}), \tag{15}$$
где из каждого из множеств (14) выбрано ровно по одному критерию, т.е. $c_{p_1}\in Q_1$, $c_{p_2}\in Q_2,\dots,c_{p_r}\in Q_r$. Очевидно, что в этом случае критерии в $\widetilde{h}_p$ строго ранжированы согласно порядку их следования.

Для каждой из таких цепей критериев рассмотрим соответствующую задачу лексикографической оптимизации

$$\max^L \widetilde{h}_p(x) = (c_{p_1}(x), c_{p_2}(x), \ldots, c_{p_r}(x)), \ x \in X. \tag{16}$$

Согласно теореме 2 можно найти q таких коэффициентов $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$, что решение задачи (16) является решением следующей задачи линейного программирования:

$$\max \widetilde{L}'(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k c_{p_k}(x), \ x \in X. \tag{17}$$

Отметим, что в случае рассматриваемой частичной субординации достаточно найти только r $(r \le q)$ коэффициентов. Для их нахождения введем величины μ^k, M_k, m_k

$$0 < \mu^k \le \inf_{\substack{x, y \in X^V \\ c_j(x) \ne c_j(y)}} |c_j(x) - c_j(y)|, \ c_j \in Q_k, \ k = 1, 2, \ldots, r-1, \tag{18}$$

$$M_k = \max \{c_j(x) \mid c_j \in Q_k, x \in X^V\}, \ k = 2, \ldots, r, \tag{19}$$

$$m_k = \min \{c_j(x) \mid c_j \in Q_k, x \in X^V\}, \ k = 2, \ldots, r. \tag{20}$$

Пусть $\widetilde{\alpha}_r$ — произвольное положительное число, а все другие $\widetilde{\alpha}_{r-1}, \widetilde{\alpha}_{r-2}, \ldots$ $\ldots, \widetilde{\alpha}_1$ находятся из условия

$$\widetilde{\alpha}_l > \frac{1}{\mu^l} \sum_{k=l+1}^{r} \widetilde{\alpha}_k (M_k - m_k), \ l = r-1, r-2, \ldots, 1. \tag{21}$$

Построим функционал

$$\widetilde{L}(x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{\alpha}_k c_{p_k}(x). \tag{22}$$

Теорема 3. Решение задачи линейного программирования

$$\max \widetilde{L}(x) = \sum_{k=1}^{r} \widetilde{\alpha}_k c_{p_k}(x), \ x \in X, \tag{23}$$

является решением лексикографической задачи (16) для любого векторного критерия $\widetilde{h}_p$, который является цепью критериев, ранжированных в рассматриваемой частичной субординации S.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. — 312 с.
2. Воронин А.Н. Метод многокритериальной оценки и оптимизация иерархических систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 84–92.
3. Воронин А.Н. Вложенные скалярные свертки векторного критерия // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 5. — С. 10–21.
4. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. — М.: Наука, 1986. — 142 с.
5. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Наука, 1975. — 192 с.
6. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6 — С. 39–46.
7. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп. НАНУ. — 2003. — № 10. — С. 80–85.
8. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
9. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Там же. — 2008. — № 3. — С. 158–172.

Поступила 24.12.2007