УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, А.А. РОСКЛАДКА

О КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, неопределенность, случайная величина, стохастическое множество.*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ В ОБЩЕМ ВИДЕ И ЕЕ СВЯЗЬ С ВАЖНЫМИ НАУЧНЫМИ ЗАДАНИЯМИ

Теория и методы комбинаторной оптимизации, являясь разделом дискретной оптимизации [1–9], в настоящее время активно развиваются на основе погружения комбинаторных множеств в евклидово пространство в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации [10–29].

Развитие евклидовой комбинаторной оптимизации с учетом неопределенно заданной информации обусловило появление новых моделей, которые используют исходные данные в условиях неопределенности [10, 19, 20, 22, 25, 27–30].

Рассмотрим необходимые основные понятия и определения евклидовой комбинаторной оптимизации, опираясь в основном на [10]. Обозначим J_m множество первых m натуральных чисел, т.е. $J_m = \{1, \dots, m\}$. Под мультимножеством $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ будем понимать совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые (неразличимые). Любое мультимножество G, которое имеет n разных элементов, можно задать его основанием $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — кортежем всех разных элементов из G и кратностью — числом повторений каждого элемента основания этого мультимножества. Кортеж кратностей мультимножества называют его первичной спецификацией и обозначают $[G] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Не нарушая общности суждений, будем считать, что элементы мультимножества G упорядочены по возрастанию, т.е. имеет место неравенство $g_1 \le g_2 \le \dots \le g_\eta$.

Рассмотрим упорядоченную k-выборку из мультимножества G

$$e = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \tag{1}$$

где $g_{i_j} \in G,\ i_j \ne i_t\ \ \forall\, i_j, i_t \in J_\eta,\ \forall\, j, t \in J_k$.

Множество E, элементами которого являются k-выборки $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$, $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k)$ вида (1) из мультимножества G, назовем евклидовым комбинаторным множеством, если из условия $\exists\, j \in J_k,\ \bar{e}_j \ne \tilde{e}_j$ следует $\bar{e} \ne \tilde{e}$.

Другими словами, свойство множества E заключается в следующем: два элемента $\bar{e}$ и $\tilde{e}$, принадлежащие этому множеству, различны, если они независимо от других отличий имеют разный порядок следования символов, которые их образуют.

Наиболее распространенными среди евклидовых комбинаторных множеств являются:

— общее множество перестановок $E_{kn}(G)$ — множество всех k-выборок вида (1), где $k = \eta > n$, из мультимножества G, которое состоит из k действительных чисел, среди которых n различных;

— общее множество размещений $E_{\eta n}^{k}(G)$ — совокупность всех упорядоченных k-выборок вида (1) из мультимножества G, которое состоит из η действительных чисел, среди которых n различных при условии $\eta_i \le k\ \ \forall\, i \in J_k$;

— общее множество сочетаний $S_{\eta n}^{k}(G)$ — совокупность всех k-выборок вида (1) из мультимножества G, состоящего из η действительных чисел, среди которых n различных при условии $\eta_i \le k\ \ \forall\, i \in J_k$.

Если наличие и количество одинаковых чисел среди элементов мультимножества не является существенным, то соответствующие евклидовые комбинаторные множества будем обозначать $E_n(G)$, $E_n^k(G)$ и $S_n^k(G)$.

Под общей задачей евклидовой комбинаторной оптимизации понимают задачу нахождения

$$F(x^*) = \min_{x \in E} F(x), \tag{2}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in E} F(x) \tag{3}$$

при ограничениях

$$\psi^i(x) \le 0 \quad \forall\, i \in J_m, \tag{4}$$

где m — некоторые целые неотрицательные константы; E — евклидово комбинаторное множество в пространстве R^k; $F(x)$, $\psi^i(x)$, $\psi^{r+i}(x)$ — некоторые функции.

Рассмотрим анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы, и выделим ранее нерешенные части общей проблемы.

Исследователи теории и методов евклидовой комбинаторной оптимизации продвинулись в решении детерминированных задач оптимизации (2), (3) на многих евклидовых комбинаторных множествах с линейными, дробно-линейными, выпуклыми и вогнутыми целевыми функциями, а также соответствующих линейных задач с дополнительными ограничениями вида (4), (5) [10–19, 21–24, 26].

Однако модель (2)–(4) не учитывает того, что многим факторам, характеризующим реальные процессы, свойственна неопределенность. Исходная информация для планирования, проектирования и управления в экономике, технике, военном деле, как правило, недостаточно достоверная. Планирование производства также обычно происходит в условиях неполной информации об обстановке, в которой будет выполняться план и реализовываться выработанная продукция. Игнорирование неопределенности параметров задачи, как правило, приводит к искажению результатов и потере адекватности рассматриваемой модели [3].

Последующее развитие евклидовой комбинаторной оптимизации привело к возможности рассмотрения оптимизационных задач на евклидовых комбинаторных множествах в условиях неопределенности [19, 20, 22, 23, 25, 27–29]. Понятие неопределенности очевидно является чрезвычайно широким: — от четкого указания границ и характера изменения случайных факторов до случаев с высокой степенью неопределенности, в которой можно говорить лишь о гипотезах, которые характеризуют поведение случайных параметров задачи. В постановках задач оптимизации можно выделить такие основные виды неопределенности данных:

— стохастическая неопределенность — известны законы распределения вероятностей;

— интервальная неопределенность — значения данных лежат в известных интервалах;

— нечеткая неопределенность — данные в виде нечетких множеств;

— параметрическая неопределенность — значения зависят от некоторого параметра;— многокритериальная неопределенность выражается необходимостью многокритериальной оптимизации.

Оптимизация в условиях неопределенности на комбинаторных множествах в первую очередь использует подходы и методологию дискретного программирования.

Исследование задач первой группы опирается на аппарат теории вероятностей [31] и стохастического программирования [32, 33]. В основе второго подхода лежат понятия интервальной геометрии и интервального анализа [30, 34–37]. Неопределенность третьего вида основана на использовании теории нечетких множеств [34, 38, 39]. Четвертый подход к учету неопределенности исследуется средствами устойчивости и параметрического анализа [4]. Пятый тип неопределенности исследуется методами векторной оптимизации [5, 40–45].

Основная цель статьи заключается в поиске общего подхода к постановке и исследованию задач евклидовой комбинаторной оптимизации.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

1. Постановка общей задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. Общую задачу евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности можно представить в виде

$$S\,\{F^1(\langle\widetilde{x}\rangle,\omega),\ldots,F^t(\langle\widetilde{x}\rangle,\omega)\}\to \text{extr}, \tag{5}$$

$$\varphi_i(\langle\widetilde{x}\rangle,\omega)\le 0 \quad \forall\, i\in J_m, \tag{6}$$

$$\langle\widetilde{x}\rangle\in\widetilde{E}, \tag{7}$$

$$\omega\in\Omega, \tag{8}$$

где $\langle\widetilde{x}\rangle=(\langle x,\nu_x\rangle\,|\,\mu_x)$ — нечетко определенный элемент интервального пространства $I(R^n)$, заданный с погрешностью измерения ν_x и со значением функции принадлежности, равным μ_x; m — целая неотрицательная константа; ω — случайный параметр, который характеризует определенное состояние среды; Ω — множество этих состояний; $F^t(\langle\widetilde{x}\rangle,\omega)$ — многокритериальный (t-критериальный) интервальнозначный целевой функционал, который зависит также от ω; S — некоторая векторная стохастическая функция, каждая компонента которой имеет статистическое содержание (математическое ожидание, дисперсия, вероятность непревышения заданного порога и т.п.); φ_i, $i\in J_m$, — некоторые стохастические функции; $\widetilde{E}$ — нечетко заданное евклидово комбинаторное множество с рандомизированными свойствами из элементов интервального пространства: $\widetilde{E}\subset I(R^n)$. Каждый элемент модели (5)–(8) можно рассматривать как зависимый от ряда параметров.

2. Построение модели задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях стохастической неопределенности. Рассмотрим пример построения математической модели в виде (5)–(8) в условиях стохастической неопределенности.

Пусть существует некоторая полубесконечная (достаточно длинная) полоса, которая разделена на полоски одинаковой ширины h (рис. 1). Задано p прямоугольников длиной $a_1,\ldots,a_p$ и шириной h. Задача состоит в размещении прямоугольников без наложений в полосе от ее начала таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимально возможной.

Задача и точные методы ее решения в детерминированной постановке рассмотрены в [11], а приближенные методы — в [10, 19, 25]. Однако на практике длины прямоугольников $a_1,a_2,\ldots,a_p$ имеют погрешности измерений, для которых, в свою очередь, задан закон распределения значений. Поэтому рассмотрение задачи с учетом стохастической неопределенности в задании начальных данных является актуальной проблемой.

Стохастическая неопределенность является распространенным типом неопределенности и присуща многим реальным процессам. Так, работа автоматических устройств сопровождается непредвиденными случайными препятствиями, статистические закономерности которых не всегда могут быть определены и учтены при вычислении управляющих воздействий.

Если мультимножество $G(\omega)=\{g_1(\omega),g_2(\omega),\ldots,g_\eta(\omega)\}$ содержит элементы, являющиеся случайными числами и зависящие от некоторого состояния среды ω, то $G(\omega)$ будем называть стохастическим мультимножеством, а соответствующие евклидовы комбинаторные множества — стохастическими евклидовыми комбинаторными

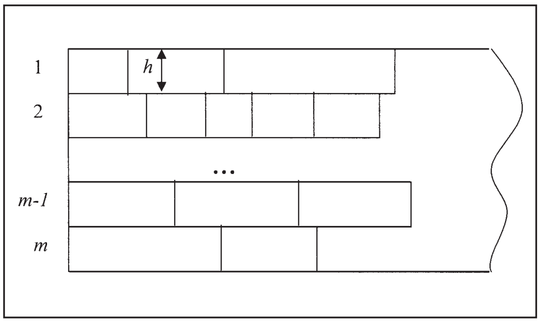

Рис. 1. Размещение прямоугольников в задаче упаковки

множествами (например, общее множество перестановок $E_{kn}(G(\omega))$ назовем стохастическим общим множеством перестановок).

Использование методов решения поставленной задачи упаковки в условиях стохастической неопределенности предполагает знание результатов операций нахождения суммы, минимума и максимума стохастических величин. Если известны вероятности того, что случайные величины g_i — элементы стохастического мультимножества — примут значения, меньшие, чем текущий аргумент $x \in R^1$ (т.е. известно $P(g_i < x) = F_{g_i}(x)$), то будем считать, что известно распределение (функция распределения $F_{g_i}(x)$) случайных значений g_i.

На практике наиболее часто встречается нормальный закон распределения. Доказано (например, [31]), что сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким-либо законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону. Такой закон распределения случайных величин характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением σ.

Таким образом, в случае нормального распределения случайных величин $g_i(\omega)$ элементы стохастического мультимножества будем представлять в виде упорядоченной пары $g_i(\omega) = (m_i, \sigma_i)$, $i \in J_\eta$, где m_i, σ_i — параметры нормального распределения случайной величины — значения элемента мультимножества g_i.

Будем считать, что в случае стохастической неопределенности длины прямоугольников $a_i = (m_i, \sigma_i)$, $i \in J_p$, являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. Известно [31], что сумма k нормально распределенных величин (m_i, σ_i) является нормально распределенной случайной величиной с параметрами (M, Σ), где $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_k, \Sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2}$.

Введем определение максимума и минимума двух нормально распределенных случайных чисел: $a_1 = (m_1, \sigma_1)$ и $a_2 = (m_2, \sigma_2)$.

Определение 1. Если выполняется одно из взаимоисключающих условий: $m_1 > m_2$ или $\sigma_1 > \sigma_2$ при $m_1 = m_2$, то число a_1 будем считать максимумом, а a_2 — минимумом.

При сравнении случайных величин необходимо также определение равенства двух нормально распределенных случайных чисел.

Определение 2. Два нормально распределенных случайных числа $a_1 = (m_1, \sigma_1)$ и $a_2 = (m_2, \sigma_2)$ будем считать равными, если $m_1 = m_2$ и $\sigma_1 = \sigma_2$.

Если не выполнено хотя бы одно из двух названных условий, то числа a_1 и a_2 можно упорядочить, используя определение 1.

Возвратимся к построению математической модели задачи. В каждой полоске в оптимальном решении очевидно может стоять от одного до $p - (m-1) = p - m + 1$ прямоугольников, где m — количество разделенных полосок, т.е. целая часть от деления ширины полосы на h. Обозначим $n = m(p - m + 1)$ и введем в рассмотрение $n - p$ прямоугольников с шириной h и длиной a_0, где случайное число a_0 — нормально распределенная величина с нулевым математическим ожиданием и бесконечно малым среднеквадратическим отклонением. При этом предел при $m = 0$ плотности при нормальном распределении с такими параметрами в точке $x = 0$ определяется формулой

$$\lim_{\sigma \to 0} f(x) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right) = \infty,$$

а при произвольном фиксированном значении в точке $x = x_0 \neq 0$ как

$$\lim_{\sigma \to 0} f(x) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right) = 0.$$

Это значит, что практически все возможные значения случайной величины a_0 сосредоточены в бесконечно малой окрестности нуля. Введенную таким образом величину a_0 назовем стохастическим аналогом обычного нуля. Тогда можно считать, что в каждой полоске находится ровно $p - m + 1$ прямоугольников. Обозначим x_{ij} длину прямоугольника (случайное число), который находится в *i*-й полоске на *j*-м месте от начала полоски, $i \in J_m$, $j \in J_{p-m+1}$. Такую величину будем называть стохастической длиной соответствующего прямоугольника. Рассмотрим вектор вида

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1,\, p-m+1}, x_{21}, \ldots, x_{2,\, p-m+1}, \ldots, x_{i1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{i,\, p-m+1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{m,\, p-m+1}).$$

Образуем мультимножество $G = \{a_1, \ldots, a_p, a_0, \ldots, a_0\}$, в котором элемент a_0 встречается $n - p$ раз. Тогда вектор x можно рассматривать как элемент стохастического множества перестановок $E_n(G(\omega))$ из элементов мультимножества $G(\omega)$. При этом каждой перестановке x будет соответствовать определенное размещение прямоугольников в полосе и соответственно каждому размещению прямоугольников отвечает перестановка x.

Используя введенные операции суммы, нахождения максимума и минимума случайных величин, можно представить математическую модель сформулированной задачи упаковки прямоугольников в условиях стохастической неопределенности в таком виде:

найти
$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(G(\omega))} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}\ ; \tag{9}$$

$$x^* = \arg \min_{x \in E_n(G(\omega))} \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}\ , \tag{10}$$

где $\arg F(x)$ обозначает точку x, которая доставляет соответствующее значение F функции $F(x)$.

Поставленную задачу можно решить с помощью метода ветвей и границ [46]. В его основе лежит система ветвлений и отсечений, идея которой для задачи (9), (10) состоит в следующем.

Используя введенное выше определение максимума в условиях стохастической неопределенности, упорядочим стохастические длины прямоугольников по убыванию $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_p$. Упорядочивание случайных чисел будем проводить согласно правилу: $a_i \succ a_j$, если $\max\{a_i; a_j\} = a_i$.

Размещаем прямоугольник длины a_1 в первую полосу. Начиная со второго прямоугольника, последовательно размещаем каждый из прямоугольников длины a_i в каждую из полос. Таким образом, формируются ветви алгоритма. Под длиной занятой части полосы будем понимать случайное число, являющееся суммой стохастических длин прямоугольников [31], размещенных в данной полосе. Оценкой $\xi(Q_i^j)$ узла Q_i^j дерева решений (j — номер уровня ветвления, i —

порядковый номер узла на текущем уровне) данного алгоритма является длина занятой части полосы. На каждом этапе разветвляется узел с порядковым номером s, имеющий наименьшую оценку на текущем уровне, т.е. для этого узла $\xi(Q_s^j) = \min_i \xi(Q_i^j)$.

Процесс ветвления заканчивается после размещения последнего прямоугольника длиной a_p в каждую из полос и после оценки соответствующих допустимых решений.

Фрагмент дерева ветвлений изображен на рис. 2.

3. Оценка сложности алгоритма для задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях стохастической неопределенности. Подсчитаем количество арифметических операций и операций сравнения, которые нужно выполнить для нахождения максимума двух случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения. Пусть $a_1 = (m_1, \sigma_1)$, $a_2 = (m_2, \sigma_2)$.

Вначале необходимо выполнить одну операцию сравнения математических ожиданий m_1 и m_2, а в случае $m_1 = m_2$ выполнить сравнение среднеквадратических отклонений σ_1 и σ_2. Для нахождения максимума из s случайных нормально распределенных величин достаточно выполнить не более $2(s-1)$ арифметических операций. Очевидно, что для нахождения минимума количество операций будет тем же.

Для нахождения параметров нормального распределения для величины, являющейся суммой s нормально распределенных случайных чисел, необходимо вначале выполнить $(s-1)$ операций сложения математических ожиданий для нахождения суммы $\sum_{i=1}^{s} m_i$. Для определения величины $\sqrt{\sum_{i=1}^{s} \sigma_1^2}$ необходимо выполнить s возведений в квадрат (умножений на себя) среднеквадратических отклонений σ_i, последующие $(s-1)$ операций их сложения и операцию нахождения квадратного корня из результата. Таким образом, для нахождения искомой суммы из s нормально распределенных случайных слагаемых необходимо выполнить $s-1+s+s-1+1=3s-1$ арифметических операций.

Проведем анализ алгоритма метода полного перебора для решения задачи (9), (10). Естественно, что оценка сложности метода полного перебора допустимых решений для стохастической неопределенности не является полиномиальной, поскольку перестановки дают как минимум факториальную сложность алгоритма $\omega(n!)$ (в обозначениях [47]). Целесообразность проведения такого анализа состоит в нахождении верхней оценки сложности решения задачи упаковки для стохастической неопределенности.

Если длины прямоугольников нормально распределены с параметрами (m_i, σ_i) $\forall\, i \in J_p$, то с учетом вышеустановленных $3s-1$ операций для вычисления суммы s слагаемых общее количество операций сложения, выполненных для вычисления длин занятых частей полос, составляет $3n-1 = = 3m(p-m+1)-1$ операций. При определении максимального значения целевой функции для каждой перестановки необходимо выполнить $2(m-1)$ операций сравнения. Наконец, для нахождения оптимального решения нужно сравнить $n! = (m(p-m+1))!$ значений, полученных для каждого допустимого варианта размещения прямоугольников по полосам. Количество операций для таких сравнений равно $2\cdot[(m(p-m+1))!-1]$. Следовательно, для вычисления общего количества операций (арифметических операций сложения и сравнения), которые необходимо осуществить для нахождения оптимальной упаковки в данной задаче, нужно количество операций для поиска одного допустимого решения ($3m(p-m+1)-1$ операций сложения и $2(m-1)$ операций сравнения) умножить на количество операций сравнения допустимых решения при поиске оптимального решения. Таким образом, общее количество операций не превышает $2\cdot[(m(p-m+1))!-1]\cdot[3m(p-m+1)-1+2(m-1)]$, что составляет величину $\Theta((m^2)!+(p+1)!)$ согласно терминологии [47].

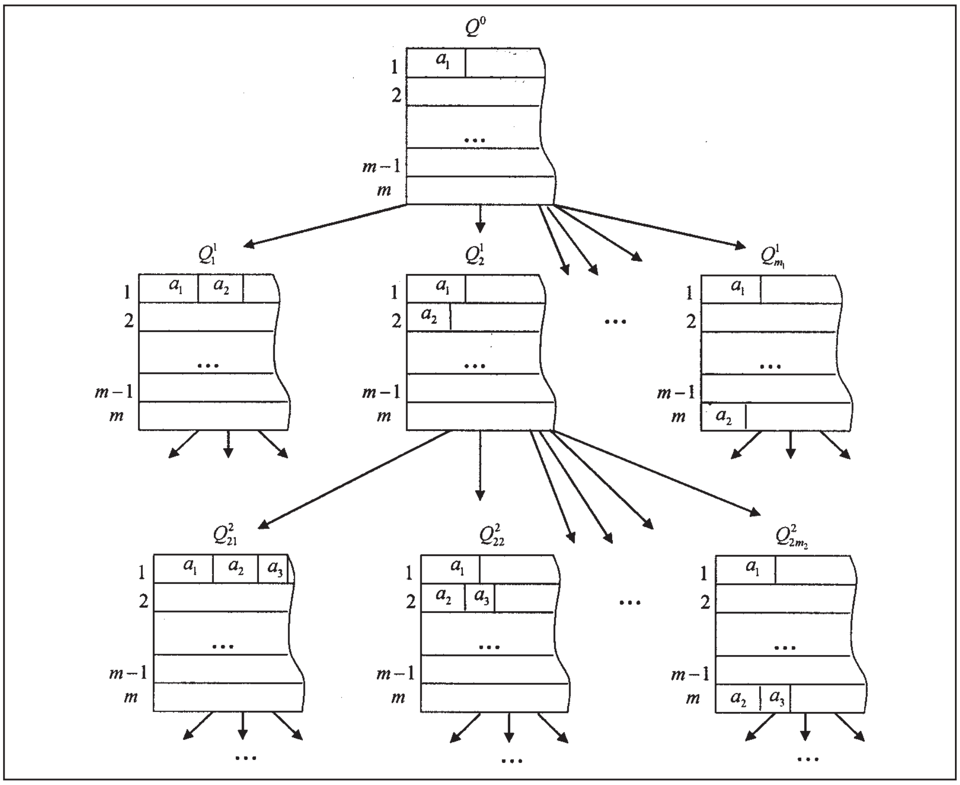

Рис. 2. Дерево ветвлений в методе ветвей и границ для задачи упаковки прямоугольников на стохастических перестановках (a_iы — символическое изображение стохастической длины прямоугольников)

4. Учет различных типов неопределенности в задачах евклидовой комбинаторной оптимизации. Большой интерес представляют исследования задач евклидовой комбинаторной оптимизации, в которых исходные данные задачи включают несколько типов неопределенности. В качестве примера рассмотрим формирование общего подхода к учету стохастической и нечеткой неопределенности.

Определение 3 [38]. Нечетким числом G назовем нечеткое множество вида $\widetilde{G} = \{(g_1 | \mu_1), \ldots, (g_\eta | \mu_\eta)\}$, где $\{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$, $g_i \in R^1$ $\forall\, i \in J_m$, — носитель нечеткого множества, $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\eta\}$, $\mu_i \in R^1$ $\forall\, i \in J_\eta$, — множество значений функции принадлежности, $0 \le \mu_i \le 1$ $\forall\, i \in J_\eta$.

В случае, когда элементы мультимножества являются нечетко заданными числами, будем считать его мультимножеством нечетких чисел $\widetilde{G} = \{(g_1 | \mu_1), \ldots, (g_\eta | \mu_\eta)\}$.

Введем в рассмотрение мультимножество $\widetilde{G}(\omega) = \{[g_1(\omega), \mu_1], [g_2(\omega), \mu_2], \ldots, [g_\eta(\omega), \mu_\eta]\}$. Для нормального распределения стохастических элементов $g_i(\omega)$ имеем

$$\widetilde{G}(\omega) = \{[(m_1, \sigma_1), \mu_1], [(m_2, \sigma_2), \mu_2], \ldots, [(m_\eta, \sigma_\eta), \mu_\eta]\}.$$

Действительно, при нечеткой неопределенности носитель нечеткого множества является обычным множеством детерминированных элементов. Как и в случае задания стохастического аналога обычного нуля будем считать, что для детерминированного аналога g_i стохастического элемента (m_i, σ_i) его математическое ожидание $m_i = g_i$, а среднеквадратическое отклонение является бесконечно малой величиной. При этом предел плотности нормального распределения с таким параметрами при $x=m$ имеет вид

$$\lim_{\sigma\to 0} f(x) = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right) = \infty,$$

а при произвольном фиксированном значении $x = x_0 \neq m$ определится формулой

$$\lim_{\sigma\to 0} f(x) = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right) = 0.$$

Таким образом, элемент мультимножества g_i можно считать детерминированным аналогом стохастического элемента (g_i, σ_i) с бесконечно малым среднеквадратическим отклонением.

Для стохастической неопределенности степень принадлежности элемента мультимножеству нечетких чисел $\mu_i = 1 \ \forall\, i \in J_n$ определится выражением

$$[(m_i, \sigma_i) \,|\, \mu_i] = [(m_i, \sigma_i) \,|\, 1] = (m_i, \sigma_i),$$

т.е. имеем элемент мультимножества стохастических элементов. В этом случае множество перестановок, которое объединяет в себе свойства нечеткого и стохастического множеств перестановок, назовем общим евклидовым комбинаторным множеством перестановок нечетких стохастических чисел и обозначим его $E_k(\widetilde{G}(\omega))$.

ВЫВОДЫ ИЗ ДАННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В настоящей статье впервые поставлена общая задача евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности. Введены понятия стохастического мультимножества и мультимножества нечетких чисел, стохастического евклидового комбинаторного множества, а также общего евклидового комбинаторного множества нечетких стохастических чисел, объединяющего в себе свойства обоих видов неопределенности. Рассмотрена постановка и обоснован алгоритм решения задачи упаковки прямоугольников в условиях стохастической неопределенности. Проведен анализ сложности и дана верхняя оценка сложности алгоритма решения задачи упаковки в условиях стохастической неопределенности.

Задачи евклидовой комбинаторной оптимизации в условиях стохастической неопределенности менее изучены, чем, например, задачи с параметрической или интервальной неопределенностью. Наличие среди исходных данных реальных задач недетерминированных величин, которые могут быть охарактеризованы случайными числами с известным законом распределения, подтверждает актуальность дальнейшего исследования комбинаторных задач в условиях неопределенности.

Методами стохастической евклидовой комбинаторной оптимизации можно эффективно решать экономические задачи, в которых исходные данные, необходимые для их решения (стоимость производства единицы продукции, количество запасов сырья, энергии, величина капиталовложений), изменяются во времени по известному закону распределения случайных величин.

Исследованные в настоящей статье методы и их оценки могут быть использованы для построения и анализа алгоритмов решения задач в условиях неопределенности на других евклидовых комбинаторных множествах. Перспективным представляется исследование свойств евклидовых комбинаторных задач оптимизации в условиях неопределенности различных типов, а также свойств таких задач, основанных на одновременном учете нескольких типов неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. — К.: Наук. думка, 2003. — 263 с.

2. С е р г и е н к о И . В . Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1988. — 471 с.

3. С е р г и е н к о И . В . , П а р а с ю к И . Н . , К а с п ш и ц к а я М . Ф . Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 3–15.

4. С е р г и е н к о И . В . , Л е б е д е в а Т . Т . , С е м е н о в а Н . В . О существовании решений в задачах векторной оптимизации // Там же. — 2000. — № 6. — С. 39–46.

5. С е р г и е н к о И . В . , К о з е р а ц к а я Л . Н . , Л е б е д е в а Т . Т . Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — К.: Наук. думка, 1995. — 170 с.

6. Е м е л и ч е в В . А . , К о в а л е в М . М . , К р а в ц о в М . К . Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 342 с.

7. Е м е л и ч е в В . А . , К о м л и к В . И . Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1981. — 208 с.

8. П а н и ш е в А . В . , П л е ч и с т ы й Д . Д . Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. — Житомир: ЖГТУ, 2006. — 300 с.

9. П а н і ш е в А . В . , Д а н и л ь ч е н к о О . М . , С к а ч к о в В . О . Вступ до теоріВ складності дискретних задач. — Житомир: ЖДТУ, 2004. — 326 с.

10. С т о я н Ю . Г . , Є м е ц ь О . О . Теорія і методи евклідовоВ комбінаторноВ оптимізаціВ. — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.

11. С т о я н Ю . Г . , Є м е ц ь О . О . , Є м е ц ь Є . М . Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.

12. Є м е ц ь О . О . , Р о с к л а д к а О . В . Задачі оптимізаціВ на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006. — 103 с.

13. Е м е ц О . А . , К о л е ч к и н а Л . Н . Задачи комбинаторной оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.

14. С т о я н Ю . Г . , Я к о в л е в С . В . , Є м е ц ь О . О . , В а л у й с ь к а О . О . Про цснування опуклого продовження функцій, які задані на гіперсфері // Доп. НАН УкраВни. — 1998. — № 2. — С. 128–133.

15. С т о я н Ю . Г . , Є м е ц ь О . О . , Є м е ц ь Є . М . Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізаціВ // Доп. НАН УкраВни. — 1999. — № 8. — С. 37–41.

16. Я к о в л е в С . В . , В а л у й с к а я О . А . О минимизации линейной функции на вершинах перестановочного многогранника с учетом линейных ограничений // Там же. — 1999. — № 4. — С. 103–108.

17. Є м е ц ь О . О . , Є м е ц ь Є . М . Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідовоВ комбінаторноВ оптимізаціВ // Там же. — 2000. — № 9. — С. 105–109.

18. Є м е ц ь О . О . , Б а р б о л і н а Т . М . , Ч е р н е н к о О . О . Розв’язування умовних задач з дробово-лінійною функцією цілі на множині розміщень // Там же. — 2006. — № 11. — С. 15–18.

19. Є м е ц ь О . О . Теорія і методи комбінаторноВ оптимізаціВ на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Ін-т кібернетики НАН УкраВни. — К., 1997. — 42 с.

20. Р о с к л а д к а А . А . Параметричні задачі та стійкість при моделюванні евклідовими комбінаторними задачами оптимізаці: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Дніпропетров. нац. ун-т. — Дніпропетровськ, 2000. — 18 с.

21. Е м е ц О . А . , Б а р б о л и н а Т . М . , Ч е р н е н к о О . А . Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями на размещениях // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 79–85.

22. Є м е ц ь О . О . , Р о с к л а д к а А . А . , Є м е ц ь О л - р а О . Задача евклідовоВ комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності // Зб. наук. праць Хмельницького нац. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. — 2005. — Вип. 1. — С. 40–45.

23. Є м е ц ь О . О . , К о л є ч к і н а Л . М . , Н е д о б а ч і й С . І . Дослідження областей визначення задач евклідовоВ комбінаторноВ оптимізаціВ на переставних множинах. Ч. 1. — Полтава: ЧПКП «Легат», 1999. — 64 с.

24. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М., Недобачій С.І. Дослідження областей визначення задач евклідовоВ комбінаторноВ оптимізаціВ на переставних множинах. Ч. 2. — Полтава: ЧПКП «Легат», 1999. — 32 с.

25. Емец О.А. Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и мат. методы. — 1993. — 29, вып. 2. — С. 294–304.

26. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. — К.: УМК ВО. — 1992. — 92 с.

27. Roskladka A. Stochastic settings of the problems of Euclidean combinatorial optimization // Theory of stochastic processes. — 2003. — **9(25)**, N 3–4. — P. 170–175.

28. Ємець Ол-ра О. Одна задача комбінаторноВ оптимізаціВ на переставленнях нечітких множин // Волинс. мат. вісник: Сер. Прикладна математика. — 2004. — Вип. 2(11). — С. 101–106.

29. Гребеннік І.В. Математичні моделі та методи комбінаторноВ оптимізаціВ в геометричному проектуванні. Автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного. — Харків, 2006. — 34 с.

30. Стоян Ю.Г. Расширенное пространство IS(R) центрированных интервалов. — Харьков, 1994. — 27 с. (Препр. / НАНУ. ІПМаш; 378).

31. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

32. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.

33. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Сов. радио, 1979. — 392 с.

34. Максишко Н.К., Перепелица В.А. Анализ и прогнозирование эволюции экономических систем: — Запорожье: Полиграф, 2006. — 236 с.

35. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 360 с.

36. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 222 с.

37. Поляк Б.Т., Назин С.А. Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1. — С. 103–115.

38. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.

39. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2000. — 352 с.

40. Машунин Ю.К. Теоретические основы и методы векторной оптимизации в управлении экономическими системами. — М.: Логос, 2001. — 247 с.

41. Васильев С.Н., Котлов Ю.В. Методы и алгоритмы многокритериальной оптимизации на основе нестрогих ранжировок альтернатив по частным критериям и опыт компьютерной реализации // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1. — С. 28–38.

42. Сафронов В.В., Ведерников Ю.В., Шахова О.А. Векторная оптимизация сложных технических систем при неопределенности исходных данных // Информационные технологии. — 2001. — № 2. — С. 27–32.

43. Семенов В.В. Линейный вариационный принцип для выпуклой векторной максимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 105–114.

44. Емеличев В.А., Гуревский Е.Е. Об устойчивости векторной комбинаторной задачи разбиения // Там же. — 2007. — № 3. — С. 177–181.

45. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. — 2006. — № 5. — С. 46–73.

46. Корбут А.А, Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. — М.: Наука, 1969. — 368 с.

47. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2001. — 960 с.

Поступила 02.07.2007