ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ

В.М. КОЛОДЯЖНЫЙ, В.А. РВАЧЕВ

УДК 517.95.4+530.1

АТОМАРНЫЕ РАДИАЛЬНО БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ В ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Ключевые слова: *атомарная функция, функционально-дифференциальное уравнение, гармоническая функция, радиально базисные функции, погрешность аппроксимации.*

ВВЕДЕНИЕ

Атомарные функции, возникающие как решения с компактным носителем функционально-дифференциальных уравнений специального вида [1–5], вполне естественно могут рассматриваться как представители класса радиально базисных функций [6] с компактными носителями в схеме построения численных алгоритмов решения краевых задач. Радиально базисные функции широко используются при построении так называемых бессеточных и вычислительно эффективных алгоритмов, альтернативных методам типа конечных элементов при решении уравнений с частными производными. Варианты построения радиально базисных функций с компактным носителем изложены в [6–8]. По сравнению с известными радиально базисными функциями с компактными носителями рассматриваемые в данной работе атомарные функции обладают рядом специфических свойств, позволяющих разрабатывать для них уникальные алгоритмы решения краевых задач математической физики. Прежде всего это касается таких особенностей математических моделей, в которых проявляются локальность исследуемых процессов и гладкость при их описании. При практических реализациях указанных ограничений атомарные бесконечно дифференцируемые финитные функции многих переменных являются наиболее простыми и естественными.

В работах [4, 5] введена атомарная функция двух независимых переменных $\mathrm{Plop}\,(x_1, x_2)$ и предложен на основе ее использования численный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В данной работе доказывается сходимость этого численного метода.

ПРИМЕНЕНИЕ АТОМАРНОЙ ФУНКЦИИ $\mathrm{Plop}\,(x_1, x_2)$ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Атомарная функция двух независимых переменных $\mathrm{Plop}\,(x_1, x_2)$ — это финитное (с компактным носителем) бесконечно дифференцируемое решение функционально-дифференциального уравнения

$$\Delta \mathrm{Plop}\,(x_1, x_2) = \lambda \int\limits_{\partial S} \mathrm{Plop}\,[3\,(x_1 - \xi_1), 3\,(x_2 - \xi_2)]\, ds + \mu\, \mathrm{Plop}\,(3x_1, 3x_2)\,,$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4/9$, $\mu = -4\pi\lambda / 3$, $\lambda = 3^5 / (4\pi)$.

Функция $\mathrm{Plop}(x_1, x_2)$ нормирована условием $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Plop}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$,

бесконечно дифференцируема с компактным носителем в виде круга единичного радиуса и инвариантна относительно вращения $\mathrm{Plop}(x_1, x_2) = f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. Двойное преобразование Фурье функции $\mathrm{Plop}(x_1, x_2)$ приводит к представлению вида $\mathrm{Pl\tilde{o}\tilde{p}}(x_1, x_2) = \prod\limits_{h=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{[-(t_1^2 + t_2^2)]^k}{3^{2k(h+1)}[(k+1)!]^2}$ и является быстро убывающей, при $t_1^2 + t_2^2 \to \infty$, функцией экспоненциального типа 1. В квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ функция $\mathrm{Plop}(x_1, x_2)$ представляется рядом Фурье

$$\mathrm{Plop}(x_1, x_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{rq} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2),$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_{00} = 1/4;\ \ a_{p0} = \mathrm{Pl\tilde{o}\tilde{p}}(p\pi, 0)/2;\ \ a_{0q} = \mathrm{Pl\tilde{o}\tilde{p}}(0, q\pi)/2;$$

$$a_{pq} = \mathrm{Pl\tilde{o}\tilde{p}}(p\pi, q\pi) =$$

$$= \prod_{h=0}^{\infty} \{1 - J_0 [2 \cdot 3^{-h-1} \sqrt{(p\pi)^2 + (q\pi)^2}\} / [3^{-h-1} \sqrt{(p\pi)^2 + (q\pi)^2}]^2,\ \ p, q = 1, 2, \ldots$$

В дальнейшем удобно использовать функцию $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2) = \mathrm{Plop}(x_1 / r, x_2 / r)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathrm{Pl}_r(x_1, x_2) = \frac{\lambda}{r^2} \int\limits_{\partial S} \mathrm{Pl}_r[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2)]\, ds + \mu\, \mathrm{Pl}_r(3x_1, 3x_2) \qquad (1)$$

при ∂S: $\xi_1^2 + \xi_2^2 = R^2$, $R = 2r/3$, и имеет носитель в виде круга радиуса r.

Рассмотрим ограниченную односвязную область $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ достаточно произвольной конфигурации, в которой необходимо отыскать решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in \Omega; \qquad (2)$$

$$u(x_1, x_2)|_{\partial\Omega} = \varphi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \partial\Omega\ . \qquad (3)$$

Пусть $D = (x_1, x_2): a \le x_1 \le b; c \le x_2 \le d$ — прямоугольник на плоскости $x_1 0 x_2$. Построим в D задаваемую точками сеть

$$D_h = \{(x_1^i, x_2^j): x_1^i = x_1^0 + ih, i = 0,1,2, \ldots, n;\ x_2^j = x_2^o + jh,\ j = 0,1,2, \ldots, m;$$

$$a = x_1^0 < \ldots < x_1^0 + kh < \ldots < x_1^0 + nh = b, k = 1,2, \ldots, n-1;$$

$$c = x_2^0 < \ldots < x_2^0 + lh < \ldots < x_2^0 + mh = d, l = 1,2, \ldots, m-1\}.$$

Поместим исходную область Ω в прямоугольник D. Определим в D вспомогательную область $\chi \subset \Omega$, граница $\partial\chi$ которой формируется в виде замкнутой непрерывной ломаной, проходящей через M узловых точек сети D_h. Эти узловые точки должны быть расположенны не ближе, чем на расстоянии $r/3$ до точек границы $\partial\Omega$ области Ω и располагаться не далее, чем на расстоянии $2r/3$. Данное множество узловых точек, расположенных на границе $\partial\chi$, будем обозначать $Q_{\partial\chi}$. Ломанная $\partial\chi$ ограничивает множество из N узловых точек множества D_h, которые обозначаем Q_χ: $Q_\chi = \chi \cap D_h$. Пусть Q_Ω — множество узловых точек множества D_h, которые являются внутренними точками области Ω. Искомое решение задачи (2), (3) отыскиваем в виде линейной комбинации сдвигов функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1, x_2)$, т.е.

$$u_r\,(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M+N} c_i\ \mathrm{Pl}_r\,(x_1 - x_1^i, x_2 - x_2^i), \tag{4}$$

где $(x_1^i, x_2^i) \in Q_\chi,\ i = 1,2,\ldots, N;\ (x_1^i, x_2^i) \in Q_{\partial\chi},\ i = N+1, N+2, \ldots, N+M$.

Применим к функции $u_r\,(x_1, x_2)$ оператор Лапласа, учитывая равенство (1):

$$\Delta u_r\,(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M+N} c_i \times \tag{5}$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda}{r^2} \int\limits_{\partial S} \mathrm{Pl}_r[3\,(x_1 - x_1^i - \xi_1), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2)]ds + \mu\ \mathrm{Pl}_r\ [3(x_1 - x_1^i), 3\,(x_2 - x_{2^i}\ \ )] \right\}.$$

В полученном равенстве вместо интеграла по окружности выпишем приближенное его представление

$$\Delta u_r\,(x_1, x_2)\ \approx\ \sum_{i=1}^{M+N} c_i \left\{ \frac{\lambda}{r^2} \sum_{s=1}^{S} a_s\ \mathrm{Pl}_r[3\,(x_1 - x_1^i - \xi_1^s), 3\,(x_2 - x_2^i - \xi_2^s)] \right.$$

$$\left. + \mu\ \mathrm{Pl}_r\ [3\,(x_1 - x_1^i), 3\,(x_2 - x_2^i)] \right\},$$

где a_s — весовые коэффициенты, а (ξ_1^s, ξ_2^s) — координаты узлов соответствующей квадратурной формулы. Отметим, что наилучшей квадратурной формулой для класса 2π-периодических непрерывных функций является формула прямоугольников $\dfrac{2\pi}{S} \displaystyle\sum_{k=0}^{S-1} f\left(\frac{2\pi}{S} k\right)$ [9–11]. В рассматриваемом случае (5) ∂S: $\xi_1^2 + \xi_2^2 = R^2$, $R = 2r/3$, r — радиус носителя функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1, x_2)$; $\xi_1^k = R\cos\dfrac{2\pi}{S}k$, $\xi_2^k = R\sin\dfrac{2\pi}{S}k$, $k = 0,1,2,\ldots, S-1$, $a_s = 2\pi R/S$.

Введем функцию

$$v\,(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M+N} c_i \left\{ \frac{\lambda}{r^2} \sum_{k=0}^{S-1} a_s\ \mathrm{Pl}_r\ [3\,(x_1 - x_1^i - \xi_1^k), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2^k)] + \right.$$

$$\left. + \mu\ \mathrm{Pl}_r\ [3\,(x_1 - x\ _1^i), 3\,(x_2 - x\ _{2_i}\ \ )] \right\}. \tag{6}$$

Множество индексов k тех функций $\mathrm{Pl}_r\ [3(x_1 - x_1^i - \xi_1^k), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2^k)]$, для которых $\Omega \cap \mathbf{supp}\,\mathrm{Pl}_r\ [3(x_1 - x_1^i - \xi_1^k), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2^k)] \neq \varnothing$, обозначим S'_i.

Тогда согласно (2) $v\,(x_1^l, x_2^l) = 0$, $l = 1,2,\ldots, N$, или

$$\sum_{i=1}^{M+N} c_i \left\{ \frac{\lambda}{r^2} \frac{2\pi R^2}{S} \sum_{k \in S'} \mathrm{Pl}_r\ [3(x_1^l - x_1^i - \xi_1^k), 3(x_2^l - x_2^i - \xi_2^k)] + \right.$$

$$+\, \mu \,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1^l - x_1^i), 3(x_2^l - x_{2^i})]\Big\} = 0 \ \text{для} \ l = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

Уравнения вида (7) задают первые N условий для определения $N + M$ постоянных c_i. Остальные M уравнений получаются благодаря необходимости удовлетворения граничным условиям (3) краевой задачи (2),(3), что может быть реализовано приближенно, например, следующим образом.

Определим M точек на границе $\partial\Omega$, которые обозначим $(\ddot{x}_1^k, \ddot{x}_2^k) \in \partial\Omega$, $k = 1, 2, \ldots, M$. Для этой совокупности из M точек на границе $\partial\Omega$ положим

$$u_r(\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j) = \varphi(\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j), \ (\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j) \in \partial\Omega, \ j = 1, 2, \ldots, M,$$

или

$$\sum_{i=1}^{N+M} c_i \,\mathrm{Pl}_r\,(\ddot{x}_1^j - x_1^i, \ddot{x}_2^j - x_2^i) = \varphi(\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j), \ (\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j) \in \partial\Omega,$$
$$j = 1, 2, \ldots, M.$$

Таким образом, искомая система линейных уравнений, из которой определяются коэффициенты c_i, может быть выписана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{M+N} c_i \{\lambda \frac{1}{h} \sum_{k \in S'} \mathrm{Pl}_r[3(x_1^l - x_1^i - \xi_1^k), 3(x_2^l - x_2^i - \xi_2^k)] + \\ &\qquad + \mu \,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1^l - x_1^i), 3(x_2^l - x_2^i)]\} = 0, \ l = 1, 2, \ldots, N, (x_1^l, x_2^l) \in \chi; \\ &\sum_{i=1}^{N+M} c_i \mathrm{Pl}_r(\ddot{x}_1^j - x_1^i, \ddot{x}_2^j - x_2^i) = \varphi(\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j), \ j = 1, 2, \ldots, M, (\ddot{x}_1^j, \ddot{x}_2^j) \in \partial\Omega. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Матрица системы уравнений (8) при достаточно малых величинах радиуса r носителя атомарной функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1, x_2)$ будет иметь разреженную структуру с элементами, заполненными вдоль диагонали:

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & a_{1,p+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,t} \\
 & & & & a_{1,t+1} & \ldots & a_{1,t+v} & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & a_{1,N+1} & \ldots & a_{1,N+w} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & a_{2,p+1} & a_{2,p+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & a_{2,t+1} & \ldots & a_{2,t+v} & a_{2,t+v+1} & \ldots & \\
 & & & 0 & \ldots & a_{2,N+w} & a_{2,N+w+1} & a_{2,N+w+2} & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & 0 & a_{N,p+1} & a_{N,p+2} & a_{N,p+3} & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{2,N+w+2} & \ldots & a_{N,N+M} \\
a_{N+1,1} & a_{N+1,2} & \ldots & a_{N+1,p} & a_{N+1,p+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_{N+2,2} & \ldots & a_{N+2,p} & a_{N+2,p+1} & a_{N+2,p+2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{N+M,1} & a_{N+M,2} & \ldots & a_{N+M,p} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
 & & & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N+M,N+M}
\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N + M$, — числа, не равные нулю для соответствующих значений i и j; величины индексов p, t, v, w зависят от величины радиуса r носителя функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1, x_2)$.

Привлекательными особенностями предлагаемого метода являются, с одной стороны, использование финитных функций (свойство локальности), что приводит к разреженным линейным системам вида (9), а с другой стороны, то, что получаемые решения исходной краевой задачи бесконечно дифференцируемы.

СХОДИМОСТЬ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Прежде чем перейти к исследованию сходимости данного метода, отметим, что качество приближенного решения определяется способностью обеспечить оптимальные значения величинам N, M и S, при которых будут иметь место минимальные погрешности следующих аппроксимаций. Во-первых, при определении результата действия оператора Лапласа в случае рассмотрения ограниченного количества точек (точек множества Q_χ) — параметр N, во-вторых, при приближенном представлении интеграла по контуру конечной суммой — параметр S, и, наконец, в-третьих, при проведении процедуры интерполяции граничного условия — параметр M.

Точки множества D_h могут задаваться не только узлами равномерной сети, которая покрывает область χ , но и сетью, построенной с учетом геометрических или иных особенностей области Ω и краевой задачи.

Рассмотрим показатели, которые влияют на ошибку приближенного решения краевой задачи. Данное приближенное решение краевой задачи будем отыскивать на структурированной (равномерной) сети в виде линейной комбинации сдвигов функции $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2)$ (4), при этом функция $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2) \in C^\infty$.

Лемма 1.Каждая точка области Ω, в которой решается исходная краевая задача (2),(3), покрывается не более чем C_1 / h^2 носителями функции $\mathrm{Pl}_r(3x_1, 3x_2)$.

Доказательство. Рассмотрим круг $x_1^2 + x_2^2 \le R^2$ и обозначим $K(R^2)$ число целых точек на нем. Результат леммы легко устанавливается благодаря задаче об оценке сверху числа $K(R^2)$ целых точек в круге при $R \to \infty$. Данная задача имеет отношение к известной проблема Гаусса о числе целых точек в круге [12]. В рассматриваемом случае требование $R \to \infty$ обеспечивается условием $h \to 0$.

Лемма 2. Погрешность замены интеграла по окружности квадратурной формулой в выражении (5) имеет порядок $O(\widetilde{h}^{\,m})$, где $m = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Выше отмечалось, что наилучшей квадратурной формулой для класса 2π-периодических непрерывных функций является формула прямоугольников. Из результатов работы [9] для класса 2π-периодических функций, которые имеют на всей оси абсолютно непрерывную $(m-1)$-ю производную и почти всюду ограниченную по модулю числом $M > 0$ m-ю производную, вытекает оценка

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{2\pi}{S} \sum_{k=0}^{S-1} f(2\pi k / S) \le \frac{2\pi K_m M}{S^m},$$

где числовая последовательность $\{K_m\}$, $m = 1,2,\ldots$, ограничена: $1 \le K_m \le \le \pi / 2$ [13], $S = 2\pi R / \widetilde{h}$, $\widetilde{h}$ — расстояние между центрами носителей функции $\mathrm{Pl}_r(3x_1, 3x_2) \in C^\infty$, расположенных вдоль окружности радиуса R. Справедливость леммы следует из свойства бесконечной дифференцируемости функции $f(x)$, в роли которой выступает $\mathrm{Pl}_r(3x_1, 3x_2)$.

Свойства атомарной функции $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2)$ существенно учитываются при замене оператора Лапласа представлением (5). Согласно рассмотренной схеме решения краевой задачи (2), (3), приближенное представление оператора Лапласа записывается в виде

$$\Delta u_r\ (x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M+N} c_i \left\{ \lambda \sum_{s=1}^{S} a_s \operatorname{Pl}_r[3\,(x_1 - x_1^i - \xi_1^s), 3\,(x_2 - x_2^i - \xi_2^s)\,] + \right.$$

$$\left. + \mu \operatorname{Pl}_r\,[3\,(x_1 - x_{1^i}), 3\,(x_2 - x_2^i)] \right\},$$

где интеграл по контуру ∂S представляем в виде линейной комбинации сдвигов функции $\operatorname{Pl}_r\,(3x_1, 3x_2)$.

Центры носителей функций $\operatorname{Pl}_r[3\,(x_1 - \xi_1^k), 3\,(x_2 - \xi_2^k)]$, $k = 1, \ldots, S$, квадратурной формулы, в основном, не совпадают с узлами сети D_h. Выделим определенный узел квадратурной формулы (5) $(\xi_1^k, \xi_2^k) \in R_k$, где ячейка R_k сети D_h определяется множеством точек $R_k = \{(x_1, x_2) \mid kh \le x_1 \le \ \le (k+1)\,h,$ $lh \le x_2 \le (l+1)\,h,\ k = k\,(\xi_1^k),\ l = l\,(\xi_2^k)\}$.

Каждую функцию $\operatorname{Pl}_r[3(x_1 - \xi_1^k), 3(x_2 - \xi_2^k)]$ заменяем линейной комбинацией из $(2\tau - 1)^2$ функций $\operatorname{Pl}_r[3(x_1 - \xi_1^k), 3(x_2 - \xi_2^k)]$, центры носителей которых расположены в узлах сети D_h. Величина ошибка при такой замене устанавливается леммой 3.

Лемма 3. Атомарная функция $\operatorname{Pl}_r[3(x_1 - \xi_1^k), 3(x_2 - \xi_2^k)]$ представляется в виде линейной комбинации сдвигов ее самой:

$$\sum_{p=-\tau+1}^{\tau-1} \sum_{q=-\tau+1}^{\tau-1} c_{pq}\,(\xi_1^k, \xi_2^k) \operatorname{Pl}_k[3\,(x_1 - kh - qh), 3\,(x_2 - lh - ph)]$$

с ошибкой порядка $O\,(h^{2\tau - 1})$.

Доказательство. Для определенности пусть рассматривается узел (x_1^{is}, x_2^{is}) квадратурной формулы, принадлежащий ячейке R_k сети D_h. Процедуру разложения функции $\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^i - \xi_1^s), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2^s)]$ будем выполнять в два этапа. Вначале при фиксированной координате x_1^{is}, выполним разложение по целочисленным сдвигам функции $\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - x_2^{is})]$ вдоль ординаты точки (x_1^{is}, x_2^{is}), при этом ординаты координат осей симметрии сдвигаемых функций совпадают с ординатами координат узлов сети D_h. Затем зафиксируем координату $x_2 - lh$ и рассмотрим разложение по целочисленным сдвигам функции $\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - x_2^{is})]$ вдоль абсциссы точки $(x_1^{is}, x_2 - lh)$, совпадающих с ординатами координат узлов сети D_h.

Будем считать, что

$$\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^i - \xi_1^s), 3(x_2 - x_2^i - \xi_2^s)] = \operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \xi_1^s), 3(x_2 - lh - \xi_2^s)]\,.$$

На первом этапе искомое разложение получает вид

$$\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh - \xi_2^s)] = \sum_{p=-\tau+1}^{\tau-1} c_p \operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3\,(x_2 - lh - ph)]\,. \quad (10)$$

Для установления погрешности данного представления выпишем для атомарных функций $\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh - \xi_2^s)]$ и $\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}),$ $3\,(x_2 - lh - ph)]$ разложение по формуле Тейлора по переменной x_2:

$$\operatorname{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh - \xi_2^s)] =$$

$$= \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3\xi_2^s)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \frac{(-3\xi_2^s)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + R_{x_2}.$$

Здесь R_{x_2} — остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{x_2} = \frac{(-3\xi_2^s)^{2\tau}}{(2\tau)!} \frac{\partial^{2\tau}}{\partial x_2^{2\tau}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh - \vartheta\,\xi_2^s)],\ 0 < \vartheta < 1;$$

$$\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh - ph)] =$$

$$= \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3ph)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} \mathrm{Pl}_r[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \frac{(-3ph)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + R_{x_2}^p,$$

$$p = -\tau + 1, \ldots, -1, 1, \ldots, \tau - 1,$$

где $R_{x_2}^p$ — остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_{x_2}^p = \frac{(-3ph)^{2\tau}\,\tau}{(2\tau)!} \frac{\partial^{2\tau}}{\partial x_2^{2\tau}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - x_2^i - \vartheta\,ph)],\ 0 < \vartheta < 1.$$

Подставим выражения разложений по формуле Тейлора выписанных выше функций в равенство (10):

$$\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3\xi_2^s)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \frac{(-3\xi_2^s)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + R_{x_2} =$$

$$= \sum_{p=-\tau+1}^{\tau-1} c_p \Bigg\{ \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3ph)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\tau-1} c_p \Bigg\{ \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + \tag{11}$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3ph)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial x_2^j} \mathrm{Pl}_r[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \frac{(-3ph)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + R_{x_2}^p \Bigg\}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях равенства, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_p, $p = -\tau + 1, \ldots, \tau - 1$:

$$
\begin{cases}
1 = c_{-\tau+1} + \ldots + c_{-2} + c_{-1} + c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{\tau-1}; \\
-\xi_2^s = (\tau-1)\, hc_{-\tau+1} + \ldots + 2hc_{-2} + hc_{-1} - hc_1 - 2hc_2 - \\
\qquad\qquad - \ldots - (\tau-1)\, hc_{\tau-1}; \\
\dfrac{(\xi_2^s)^2}{2!} = \dfrac{[(\tau-1)\,h]^2}{2!} c_{-\tau+1} + \ldots + \dfrac{(2h)^2}{2!} c_{-2} + \dfrac{h^2}{2!} c_{-1} + \\
\qquad\qquad + \dfrac{h^2}{2!} c_1 + \dfrac{(2h)^2}{2!} c_2 + \ldots + \dfrac{[(\tau-1)\,h]^2}{2!} c_{\tau-1}; \\
\dfrac{(-\xi_2^s)^3}{3!} = \dfrac{[(\tau-1)\,h]^3}{3!} c_{-\tau+1} + \ldots + \dfrac{(2h)^3}{3!} c_{-2} + \dfrac{h^3}{3!} c_{-1} - \\
\qquad\qquad - \dfrac{h^3}{3!} c_1 - \dfrac{(2h)^3}{3!} c_2 - \ldots - \dfrac{[(\tau-1)h]^3}{3!} c_{\tau-1}; \\
\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{(\xi_2^s)^{2\tau-3}}{(\tau-3)!} = \\
\qquad = \dfrac{[(\tau-1)\,h]^{2\tau-3}}{(\tau-3)!} c_{-\tau+1} + \ldots + \dfrac{(2h)^{2\tau-3}}{(2\tau-3)!} c_{-2} + \dfrac{h^{2\tau-3}}{(2\tau-3)!} c_{-1} - \\
\qquad\qquad - \dfrac{h^{2\tau-3}}{(2\tau-3)!} c_1 - \dfrac{(2h)^{2\tau-3}}{(2\tau-3)!} c_2 - \ldots - \dfrac{[(\tau-1)\,h]^{2\tau-3}}{(2\tau-3)!} c_{\tau-1}; \\
\dfrac{(-\xi_2^s)^{2\tau-2}}{(2\tau-2)!} = \\
\qquad = \dfrac{[(\tau-1)\,h]^{2\tau-2}}{(2\tau-1)!} c_{-\tau+1} + \ldots + \dfrac{(2h)^{2\tau-2}}{(2\tau-1)!} c_{-2} + \dfrac{h^{2\tau-2}}{(2\tau-2)!} c_{-1} + \\
\qquad\qquad + \dfrac{h^{2\tau-2}}{(2\tau-2)!} c_1 + \dfrac{(2h)^{2\tau-2}}{(2\tau-2)!} c_2 + \ldots + \dfrac{[(\tau-1)\,h]^{2\tau-2}}{(2\tau-2)!} c_{\tau-1}.
\end{cases}
$$

Положим

$$
d_0 = c_0; \quad \begin{cases} d_1 = c_{-1} + c_1; \\ g_1 = c_{-1} - c_1; \end{cases} \begin{cases} d_2 = c_{-2} + c_2; \\ g_2 = c_{-2} - c_2; \end{cases} \begin{cases} d_3 = c_{-3} + c_3; \\ g_3 = c_{-3} - c_3; \end{cases} \ldots
$$

$$
\ldots \begin{cases} d_{\tau-1} = c_{-\tau+1} + c_{\tau-1}; \\ g_{\tau-1} = c_{-\tau+1} - c_{\tau-1}. \end{cases}
$$

Откуда

$$
\begin{aligned}
c_{-1} &= (d_1 + g_1)/2; & c_1 &= (d_1 - g_1)/2; \\
c_{-2} &= (d_2 + g_2)/2; & c_2 &= (d_2 - g_2)/2; \\
c_{-3} &= (d_3 + g_3)/2; & c_3 &= (d_3 - g_3)/2; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
c_{-\tau+1} &= (d_{\tau-1} + g_{\tau-1})/2; & c_{\tau-1} &= (d_{\tau-1} - g_{\tau-1})/2.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты d_0, d_i и g_i, $i = 1,2,\ldots,\tau-1$, отыскиваем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1 = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{\tau-1}; \\ -\xi_2^s = hg_1 + 2hg_2 + \ldots + (\tau-1)hg_{\tau-1}; \\ (\xi_2^s)^2 = h^2 d_1 + (2h)^2 d_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^2 d_{\tau-1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-\xi_2^s)^{2\tau-3} = h^{2\tau-3} g_1 + (2h)^{2\tau-3} g_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^{2\tau-3} g_{\tau-1}; \\ (\xi_2^s)^{2\tau-2} = h^{2\tau-2} d_1 + (2h)^{2\tau-2} d_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^{2\tau-2} d_{\tau-1}, \end{cases}$$

из которой формируем две линейные системы:

$$\begin{cases} 1 = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{\tau-1}; \\ (\xi_2^s)^2 = h^2 d_1 + (2h)^2 d_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^2 d_{\tau-1}; \\ (\xi_2^s)^4 = h^4 d_1 + (2h)^4 d_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^4 d_{\tau-1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\xi_2^s)^{2\tau-2} = h^{2\tau-2} d_1 + (2h)^{2\tau-2} d_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^{2\tau-2} d_{\tau-1}; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} -\xi_2^s = hg_1 + 2hg_2 + \ldots + (\tau-1)hg_{\tau-1}; \\ (-\xi_2^s)^3 = h^3 g_1 + (2h)^3 g_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^3 g_{\tau-1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-\xi_2^s)^{2\tau-3} = h^{2\tau-3} g_1 + (2h)^{2\tau-3} g_2 + \ldots + [(\tau-1)h]^{2\tau-3} g_{\tau-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Определители систем (12) и (13) являются определителями Вандермонда:

$$\det D = h^{\sum\limits_{k=2}^{\tau} 2k-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 2^2 & . & (\tau-1)^2 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2\tau-2} & . & (\tau-1)^{2\tau-2} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\det G = h^{\sum\limits_{k=2}^{\tau} 2k-3} \prod_{k=3}^{\tau} (k-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 2^2 & . & (\tau-1)^2 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2\tau-3} & . & (\tau-1)^{2\tau-3} \end{vmatrix} \neq 0;$$

Решения этих систем существуют и единственны, что позволяет определить коэффициенты c_0, c_{-i} и c_i, $i = 1, 2, \ldots, \tau-1$. Подставив найденные коэффициенты в равенство (11) получим

$$\frac{(-3\xi_2^s)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\, [3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + R_{x_2} =$$

$$= \sum_{\substack{p=-\tau+1 \\ p\neq 0}}^{\tau-1} \frac{(-3ph)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} c_p \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\, [3(x_1 - x_1^{is}), 3(x_2 - lh)] + \sum_{\substack{p=-\tau+1 \\ p\neq 0}}^{\tau-1} c_p R_{x_2}^{p}. \tag{14}$$

Второй этап процедуры разложения функции $\mathrm{Pl}_r\, [3(x_1 - x_1^i - \xi_1^s)$, $3(x_2 - x_2^i - \xi_2^s)]$ состоит в следующем. Полагаем $x_1^{is} = kh + \xi_1^s$. Функцию

$\dfrac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \xi_1^s), 3(x_2 - lh)]$ в правой части равенства (14) представим в виде линейной комбинации сдвигов ее самой вдоль абсциссы точки $(x_1 - kh - \xi_1^s, x_2 - lh)$, при этом абсциссы координаты осей симметрии сдвигаемых функций совпадают с абсциссами координат узлов сети D_h. Равенство (14) приобретает вид

$$(-3\xi_2^s)^{2\tau-1} \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \xi_1^s), 3\,(x_2 - lh)] + (2\tau-1)!\,R_{x_2} =$$

$$= \sum_{\substack{p=-\tau+1 \\ p\neq 0}}^{\tau-1} (-3ph)^{2\tau-1} c_p \sum_{q=-\tau+1}^{\tau-1} t_q \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - qh), 3\,(x_2 - lh)] +$$

$$+ (2\tau-1)! \sum_{\substack{p=-\tau+1 \\ p\neq 0}}^{\tau-1} c_p R_{x_2}^p. \tag{15}$$

Функции

$\dfrac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \xi_1^s), 3(x_2 - lh)]$ и $\dfrac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - qh), 3(x_2 - lh)]$, $q = -\tau+1, \ldots, -1, 1, \ldots, \tau-1$, раскладываем по формуле Тейлора по переменной x_1:

$$\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \xi_1^s), 3(x_2 - lh)] = \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3\xi_1^s)^j}{j!} \frac{\partial^{2\tau+j-1}}{\partial x_2^{2\tau-1} \partial x_1^j} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh), 3(x_2 - lh)] + R_{x_1},$$

$$R_{x_1} = \frac{(-3\xi_1^s)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{4\tau-2}}{\partial x_2^{2\tau-1} \partial x_1^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \vartheta\xi_1^s), 3(x_2 - lh)],\ 0 < \vartheta < 1;$$

$$\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - qh), 3(x_2 - lh)] = \frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh), 3(x_2 - lh)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2\tau-2} \frac{(-3qh)^j}{j!} \frac{\partial^{2\tau+j-1}}{\partial x_2^{2\tau-1} \partial x_1^j} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh), 3(x_2 - lh)] + R_{x_1}^q,$$

$$q = -\tau+1, \ldots, -1, 1, \ldots, \tau-1,$$

$$R_{x_1}^q = \frac{(-3qh)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!} \frac{\partial^{4\tau-2}}{\partial x_2^{2\tau-1} \partial x_1^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh - \vartheta qh), 3(x_2 - lh)],\ 0 < \vartheta < 1.$$

После подстановки данных разложений в равенство (14) получим

$$(-3\xi_2^s)^{2\tau-1} \left\{ \frac{{}^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}} \mathrm{Pl}_r\,[3(x_1 - kh), 3\,(x_2 - lh)] + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{2\tau-2}\frac{(-3\xi_1^{s})^{j}}{j!}\,\frac{\partial^{2\tau+j-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}\partial x_1^{j}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-kh),3(x_2-lh)]\Bigg\}+$$

$$+(-3\xi_2^{s})^{2\tau-1}R_{x_1}+(2\tau-1)!\,R_{x_2}= \tag{15}$$

$$=\sum_{\substack{p=-\tau+1\\ p\neq 0}}^{\tau-1}(-3ph)^{2\tau-1}c_p\sum_{q=-\tau+1}^{\tau-1}t_q\,\Bigg\{\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-kh),3(x_2-lh)]+$$

$$+\sum_{j=1}^{2\tau-2}\frac{(-3qh)^{j}}{j!}\,\frac{\partial^{2\tau+j-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}\partial x_1^{j}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-kh),3(x_2-lh)]\Bigg\}+$$

$$+\sum_{\substack{p=-\tau+1\\ p\neq 0}}^{\tau-1}(-3ph)^{2\tau-1}c_p\sum_{q=-\tau+1}^{\tau-1}t_q\,\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}}\,R_{x_1}^{q}+(2\tau-1)!\sum_{\substack{p=-\tau+1\\ p\neq 0}}^{\tau-1}c_pR_{x_2}^{p}. \tag{16}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях этого равенства, получаем линейную систему для определения неизвестных t_0, t_{-i} и t_i, $i=1,2,\ldots,\tau-1$. Существование единственного решения этой системы выполняется по схеме, аналогичной проведенной на предыдущем этапе. В результате после подстановки найденных коэффициентов t_0, t_{-i} и t_i, $i=1,2,\ldots,\tau-1$, в равенство (16) получаем

$$(-3\xi_2^{s})^{2\tau-1}\,\frac{(-\xi_1^{s})^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!}\,\frac{\partial^{4\tau-2}}{\partial x_2^{2\tau-1}\partial x_1^{2\tau-1}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-kh-\vartheta\,\xi_1^{s}),3(x_2-lh)]+$$

$$+\frac{(3\xi_2^{s})^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!}\,\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-x_1^{is}),3(x_2-lh-\vartheta\,\xi_2^{s})]=\sum_{\substack{p=-\tau+1\\ p\neq 0}}^{\tau-1}(-3ph)^{2\tau-1}c_p\,\times$$

$$\times\sum_{q=-\tau+1}^{\tau-1}t_q\,\frac{(-3qh)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!}\,\frac{\partial^{4\tau-2}}{\partial x_2^{2\tau-1}\partial x_1^{2\tau-1}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-kh-\vartheta qh),3(x_2-lh)]+$$

$$+\sum_{\substack{p=-\tau+1\\ p\neq 0}}^{(2\tau-1)!}c_p\,\frac{(-3ph)^{2\tau-1}}{(2\tau-1)!}\,\frac{\partial^{2\tau-1}}{\partial x_2^{2\tau-1}}\,\mathrm{Pl}_r\,[3(x_1-x_1^{is}),3(x_2-x_2^{i}-\vartheta\,ph)],\ \ 0<\vartheta<1.$$

Как видно, в обеих частях равенства содержатся члены, в которые h входит в степени, не ниже $2\tau-1$. Иначе говоря, ошибка, вносимая в приближенное решение исходной задачи (2), (3) при замене операции интегрирования по контуру в равенстве (5) операцией суммирования, приблизительно составляет $C_3\cdot h^{2\tau-1}$, C_3 — постоянная.

Теперь предстоит оценить точность приближения гармонической в ограниченной односвязной области Ω функции линейной комбинацией сдвигов атомарной функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1,x_2)$. Нахождение приближенного решения краевой задачи (2),(3) с помощью линейной комбинации сдвигов атомарной функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1,x_2)$ выполняется с погрешностью, которая определяется следующими ошибками ограничений:

1) ошибкой, связанной с покрытием каждой точки области решения краевой задачи носителями функции $\mathrm{Pl}_r\,(x_1,x_2)$;

2) ошибкой, возникающей при переходе от интегрирования по контуру к квадратурной формуле по прямоугольникам;

3) ошибкой представления оператора Лапласа, вытекающего из уравнения, определяющего атомарную функцию двух переменных $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2)$ и связанной с вычислением значений этой функции не в узлах квадратурной формулы, а в узлах равномерной сети D_h;

4) ошибкой интерполяции граничных условий краевой задачи.

Процедуры управления погрешностями пп. 1–3 рассматривались выше. В п. 4 приближенное удовлетворение граничным условиям задачи (2), (3) выполняется в результате интерполирования граничных условий в M точках границы $\partial\Omega$ линейной комбинацией функций $\mathrm{Pl}_r(x_1, x_2)$ (4). Такая аппроксимация должна обеспечивать существование граничной функции $\varphi(x_1, x_2)$ из класса $C_{m+\alpha}$. Данный класс состоит из функций, имеющих непрерывные в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ частные производные до порядка m (m — неотрицательное целое число) и удовлетворяющих условиям Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$. Предполагаем, что интерполяции таких функций осуществляются с погрешностью порядка $O(h^l)$.

Суммарная погрешность приближенного решения исходной краевой задачи устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Пусть u — решение уравнения (3), которое принадлежит классу $C_{2+\alpha}$ в гладкой области Ω с достаточно гладкой граничной функцией $\varphi(x_1, x_2)$. Тогда ошибка приближения точного решения краевой задачи (2), (3) определяется

$$\| u(x_1, x_2) - u_r(x_1, x_2) \|_{C(\overline{\Omega})} \le K \max\{h^{2\tau-3}\widetilde{h}^{\,m}, h^l\},$$

где K — постоянная.

Доказательство. Благодаря теореме о гармонических функциях, принадлежащей Келлогу, и оценкам Шаудера [14], установленных для линейных эллиптических уравнений вида $L[u(x_1, x_2)] = f(x_1, x_2)$ в ограниченной области, имеет место результат

$$\| u(x_1, x_2) \|_{2+\alpha} \le K'(\| f(x_1, x_2) \|_\alpha + \| \varphi(x_1, x_2) \|'_{2+\alpha}),$$

где граничные значения $\varphi(x_1, x_2)$ предполагаются гладкими относительно локальных параметров на границе, а норма $\| \varphi(x_1, x_2) \|'_{2+\alpha}$ определяется как максимум норм $\| \varphi(x_1, x_2) \|_{2+\alpha}$ в каждом шаре из конечного числа шаров, покрывающих границу $\partial\Omega$, K' — постоянная.

Замена оператора Лапласа в уравнении (2) его приближенным представлением (5) превращает уравнение (2) в уравнение Пуассона, правая часть которого формируется в виде суммарной ошибки, вытекающей из указанной замены.

Выше отмечалось, что каждая точка области Ω покрывается C_1 / h^2 числом носителей сдвигов атомарных функций $\mathrm{Pl}_r(3x_1, x_2)$. При этом в каждое слагаемое приближенного решения вносится погрешность, оцениваемая величиной C_1 / h^2.

Замена криволинейного интеграла по окружности на квадратурную формулу прямоугольников с числом слагаемых, определяемым, например, величиной параметра S, определяет необходимость замены каждого из $C_1 / \widetilde{h}$ слагаемых квадратурной формулы $(2\tau - 1)^2$ функцией, что согласно лемме 3 выполняется с погрешностью $O(h^{2\tau-1})$.

Таким образом, суммарная погрешность определяется величиной $O(h^{2\tau-1}\widetilde{h}^{\,m} / h^2) = O(h^{2\tau-3}\widetilde{h}^{\,m})$. Отсюда следует, что сходимость процесса аппроксимации оператора Лапласа по рассматриваемой схеме обусловлена величиной $\tau > 3/2$.

В качестве иллюстрации работоспособности предлагаемой процедуры численного решения краевых задач на основе использования атомарных радиально базисных функций двух переменных $\mathrm{Plop}(x_1, x_2)$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа, когда область Ω является квадратом: $(x_1, x_2) \in K$, $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = -1, \ldots, 1;\ x_2 = -1, \ldots, 1\}$.

Пусть граничные условия имеют вид $u = 1 - x_1^2$ при $x_2 = \pm 1$ и $u = 1 - x_2^2$ при $x_1 = \pm 1$. Искомая гармоническая функция, приближенно представляемая (см. [15, с. 66]) в виде

$$u(x_1, x_2) \approx 2/3 + 0{,}1841(x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + 0{,}8), \tag{17}$$

сравнивается в таблице с приближенным представлением, получаемым с помощью линейных комбинаций атомарной функции $\mathrm{Pl}(x_1, x_2)$ (4).

Таблица 1

(x_1^2, x_2^2)	(0, 0)	(0.25; 0.25)	(0.5; 0.5)	(0.75; 0.75)	(1;1)
Решение для функции (17)	0.813947	0.811070	0.767922	0.580945	0.077547
Решение для функции $\mathrm{Pl}_1(x_1, x_2)$	0.822361	0.818975	0.777904	0.586437	0.004939
(x_1^2, x_2^2)	(0, 0)	(0.25; 0.0)	(0.5; 0)	(0.75; 0.0)	(1;0)
Решение для функции (17)	0.813947	0.814666	0.830793	0.872197	0.998047
Решение для функции $\mathrm{Pl}_1(x_1, x_2)$	0.822361	0.823230	0.834435	0.884252	1.000486

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в статье пример краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа легко можно расширить на случай краевой задачи для уравнения Пуассона, а также на случай краевой задачи с граничными условиями Неймана [14, 15].

При задании точек множества D_h, которая покрывает область χ, можно не ограничиваться построением равномерной сети, а воспользоваться сетью, которая строится с учетом геометрических и других особенностей области Ω и краевой задачи.

Представляет интерес расширение предлагаемого численного алгоритма решения краевой задачи на случай большего числа переменных. Тогда вместо функции $\mathrm{Plop}(x_1, x_2)$ следует использовать атомарную функцию $\mathrm{Corp}_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [16]. Для практически важного трехмерного случая следует использовать атомарную функцию $\mathrm{Corp}(x_1, x_2, x_3)$, инвариантную относительно вращения, свойства которой исследованы в [17].

Построение численных алгоритмов решения первой краевой задачи, описываемых в данной статье, могут быть распространены на краевые задачи для уравнений более высоких порядков, формируемых, например, с помощью бигармонического или полигармонического операторов. Приближенные решения таких задач выписываются в виде линейной комбинации сдвигов атомарной функции $\mathrm{Blop}(x_1, y_2)$ в двумерном случае и $\mathrm{Torp}(x_1, x_2, x_3)$ — в трехмерном [18]. В [19] изложена процедура построения атомарной функции двух и трех переменных, порождаемой полигармоническим оператором.

Использование атомарных радиально базисных функций, бесконечно дифференцируемых с компактным носителем решений функционально-дифференциальных уравнений, при реализации предлагаемой схемы численного решения краевых задач позволяет описывать локальные особенности задачи [20] и является перспективным направлением математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. — Киев: Наук. думка, 1979. — 196 с.

2. Рвачев В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения УМН. — 1990. — **45**, вып. 1 (271), — С. 77–103.

3. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики / Ю Г. Стоян, В.С. Проценко, Г.П. Манько и др. — Киев: Наук. думка. 1986. — 264 с.

4. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Фінітні функці, що породжені оператором Лапласа / Доп. НАН Украни. — 2004. — № 4. — С. 17–22.

5. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Застосування атомарно функці Plop (x, y) при розв'язуванні крайових задач для рівняння Лапласа // Там же. — 2006. — № 9. — С. 16–21.

6. Buhmann M.D. Radial basis functions: theory and implementations. — Cambridge, UK: University Press, 2004. — 259 p.

7. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // Adv. Comp. Math. — 1995. — 4. — P. 389–396.

8. Wu Z. Multivariate compactly supported positive definite radial functions // Ibid. — 1995. — 4. — P. 283–292.

9. Малоземов В.Н. Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестн. Ленинград. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 1967. — Вып. 1, № 1. — С. 52-59.

10. Лигун А.А. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций // Мат. заметки. — 1978. — **24**, № 5. — С. 661–669.

11. Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. математика. — 1974. — **38**, № 3 — С. 583–614.

12. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1983. — 239 с.

13. Тимман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 333 с.

14. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. — М.; Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 708 с.

16. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Доп. НАН УкраВни. — 2005. — № 1. — С. 12–20.

17. Колодяжный В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции трех переменных, инвариантные относительно группы вращения // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 6. — С. 118–130.

18. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Фінітні функцїё, що породжені бігармонічним оператором // Доп. НАН УкраВни. — 2006. — № 2. — С. 22–30.

19. Колодяжный В.М. Финитные функции, порождаемые полигармоническим оператором // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 141–156.

20. Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments // Comput. Methods Appl. Mech. Engr. — 1996. — **139**. — P. 3–47.

Поступила 15.01.2007