

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМ МНОГОМЕРНЫМ ПРОЦЕССОМ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ

Ключевые слова: *инновация, система Лотке–Вольтерра, метод расщепления, принцип максимума, система квазилинейных уравнений, параболический тип, априорные оценки, оптимальное управление, численный алгоритм.*

ВВЕДЕНИЕ

В основу моделирования жизненного цикла конкурирующих инноваций и взаимодействия субъектов рынка положены нелинейные динамические модели Лотке–Вольтерра [1–3] из популяционной экологии. Моделирование поведения конкурирующих инноваций проводится с помощью моделей начально-краевых задач для квазилинейных систем уравнений параболического типа, описывающих процессы диффузионного типа [2–4]. Изучение аналитических свойств решений данного класса задач проводится на основе методов математической физики [5–6] с использованием теорем принципа максимума и вывода априорных оценок для обобщенных решений квазилинейных систем уравнений. Исследования аналитических свойств моделей диффузии инноваций позволяют разрабатывать эффективные методы моделирования данного типа процессов и формулировать задачи оптимального управления для некоторых сценариев поведения отдельных инноваций на рынке. Методы исследования существования решений задач оптимального управления для уравнений в частных производных приведены в [7–9] с использованием [10]. Разработка методов компьютерной реализации результатов теоретического исследования задач оптимального управления процессами многомерной диффузии инноваций основывается на применении теории разностных схем [11], теорем принципа максимума для линейных и квазилинейных уравнений параболического типа [12–14], методов дискретной оптимизации [15].

В настоящей работе рассмотрена классическая модель динамики инновации для уравнения Бернулли. Методом расщепления общей инновации на две конкурирующие инновации построена система уравнений динамики для двух инноваций типа Лотке–Вольтерра. Получены аналитические решения для этой системы и исследованы их асимптотики при $t \rightarrow \infty$. На базе данной модели двух конкурирующих инноваций построена неоднородная модель диффузии инноваций с помощью начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений параболического типа. Для решения системы при некоторых ограничениях на ее параметры доказан принцип максимума и получены априорные оценки в норме пространства непрерывных функций. Для системы квазилинейных уравнений параболического типа сформулирована задача оптимального управления поведением инноваций с помощью инвестиций и начальных распределений инноваций и доказаны достаточные условия существования оптимального управления. На основе исследованных свойств решения системы квазипараболического типа разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управления многомерной диффузией и получены численные результаты для одного из сценариев диффузии трех конкурирующих инноваций.

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ИННОВАЦИИ БЕЗ ДИФФУЗИИ И ИНВЕСТИЦИЙ

Для построения общей модели многомерной диффузии инноваций рассмотрим сначала классическую модель динамики инновации для однородной системы уравнений без диффузии. Предположим, что в замкнутой системе в единицу времени существует постоянное количество $\alpha_0 > 0$ реципиентов некоторого инновационного продукта, выпускаемого в объеме $Y(t)$ в единицу времени. Рассмотрим нелинейную модель динамики инновации для уравнения Бернулли

$$Y_t = (\alpha_0 - Y)Y, \quad t \in [0, T], \quad Y(0) = Y_0. \quad (1)$$

Решение задачи (1) имеет вид

$$Y(t) = \frac{Y_0 \alpha_0}{Y_0 (1 - \exp(-\alpha_0 t)) + \alpha_0 \exp(-\alpha_0 t)}. \quad (2)$$

Из (1), (2) следует, что $Y = 0$ — особая точка уравнения (1) и в окрестности особой точки при начальном значении $Y_0 \geq 0$ решение (2) остается ограниченным за любой ограниченный промежуток времени $t \in [0, T]$. Асимптотически $Y(t) \rightarrow \alpha_0$ при $t \rightarrow \infty$ (полное удовлетворение реципиентов инновационным продуктом за бесконечный промежуток времени). Пусть на рынке существует две конкурирующие инновации одного продукта $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, так что $Y(t) = \sum_{k=1}^2 y^{(k)}$. Подставим данное разложение в (1) и введем дополнительный

член, моделирующий процесс конкурентной борьбы:

$$(y^{(1)} + y^{(2)})_t = (\alpha_0 - (y^{(1)} + y^{(2)}))(y^{(1)} + y^{(2)}) \pm \gamma_{12} y^{(1)} y^{(2)}.$$

Расщепим полученное уравнение на два уравнения, исходя из принципа симметрии, с использованием модели Лотке–Вольтерра для конкурирующих систем:

$$y_t^{(1)} = (\alpha_0 - Y(t))y^{(1)} + \gamma_{12} y^{(1)} y^{(2)}, \quad (3)$$

$$y_t^{(2)} = (\alpha_0 - Y(t))y^{(2)} - \gamma_{21} y^{(2)} y^{(1)}, \quad (4)$$

$$y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \quad y^{(2)}(0) = y_0^{(2)}. \quad (5)$$

Здесь $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ — коэффициент межинновационной конкуренции ($\gamma_{12} \in (-1; 1)$, $\gamma_{12} \neq 0$), $y_0^{(k)} > 0$ — начальные значения инновационных продуктов (положительные для однородной модели), причем $0 \leq Y(0) = y_0^{(1)} + y_0^{(2)} < \alpha_0$. Уравнения (3), (4) можно получить другим способом — на основе классической модели (1) с учетом динамики уменьшения количества потенциальных потребителей (реципиентов) общего инновационного продукта $(\alpha_0 - Y(t))$. С учетом (2) система (3)–(5) имеет вид

$$y_t^{(1)} = \alpha_0 \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right) y^{(1)} - \gamma y^{(1)2}, \quad (6)$$

$$y_t^{(2)} = \alpha_0 \left(1 - \frac{(\gamma + 1)}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right) y^{(2)} + \gamma y^{(2)2}, \quad (7)$$

$$y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \quad y^{(2)}(0) = y_0^{(2)}, \quad (8)$$

где константы $\nu = \alpha_0 / (y_0^{(1)} + y_0^{(2)}) - 1 > 0$, $\gamma = \gamma_{12} = \gamma_{21}$. Теперь решения уравнений Бернулли (6), (7) можно получить явно:

$$y^{(1)} = \frac{y_0^{(1)}(y_0^{(1)} + y_0^{(2)}) \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right)^{1-\gamma}}{y_0^{(2)} \exp(-\alpha_0 \gamma t) + y_0^{(1)} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right)^{-\gamma}}, \quad (9)$$

$$y^{(2)} = \frac{y_0^{(2)}(y_0^{(1)} + y_0^{(2)}) \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right)^{1+\gamma}}{y_0^{(1)} \exp(\alpha_0 \gamma t) + y_0^{(2)} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu \exp(-\alpha_0 t)} \right)^\gamma}. \quad (10)$$

При положительных начальных условиях (8) решения (9), (10) остаются положительными всюду при $t > 0$. Из аналитического вида решений (9), (10) следует также, что тип их асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ определяется только знаком коэффициента γ и имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y^{(1)}(t) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{при } \gamma > 0, \\ 0 & \text{при } \gamma < 0, \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y^{(2)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma > 0, \\ \alpha_0 & \text{при } \gamma < 0, \end{cases}$$

что соответствует асимптотике решения (2) и согласуется с качественными свойствами поведения конкурирующих инноваций. Отсюда следует также ограниченность решений системы (3)–(5) при сделанных ограничениях на начальные данные и коэффициенты системы всюду при $t > 0$.

Таким образом, использование процедуры расщепления для уравнения динамики общей инновации (1) позволило получить систему Лотке–Вольтерра (3)–(5) для отдельных конкурирующих инноваций и провести редукцию данной системы к совокупности независимых уравнений Бернулли. Решение уравнений Бернулли позволило также получить в явном виде решение системы (3)–(5) и выявить достаточные условия существования и единственности ее устойчивого, ограниченного решения.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ МОДЕЛИ ДИФFUЗИИ ИННОВАЦИЙ С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИЙ

Для объемов выпуска инновационного продукта в единицу времени $Y(x, t)$ в области $Q_T = [0, 1] \times (0, T)$ с границей Γ_T рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного уравнения параболического типа

$$Y_t = (\alpha_0 - Y)Y + aY_{xx} + F, \quad (11)$$

$$Y_x \Big|_{x=0} = -\psi_1, \quad Y_x \Big|_{x=1} = \psi_2, \quad Y \Big|_{t=0} = \psi_3, \quad (12)$$

где $\alpha_0(t)$ — количество реципиентов данного инновационного продукта, $F(x, t)$ — инвестиции в единицу времени в инновационную продукцию, $a = \text{const} > 0$ — коэффициент диффузии инновации, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — заданные потоки на границе области, $0 \leq \psi_3(x) < \alpha_0(0)$ — начальное распределение инновации по ареалу $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим принцип максимума для задач (11), (12) и (13), (14) по аналогии с [5].

Теорема 1. Пусть $Y(x, t)$ — классическое решение задачи (11), (12) в области Q_T , коэффициенты $\alpha_0(t) > 0$, $F(x, t) \geq 0$, $\psi_s(t) \geq 0$ ($s = \overline{1, 3}$) — непрерывные, ограниченные на множестве Q_T функции. Тогда для $Y(x, t)$ справедлива оценка

$$0 \leq Y(x, t) \leq 1,25 \max \left\{ 0; \max_{\Gamma_T} (\exp(\lambda(T-t))\psi); \max_{Q_T} \frac{\exp(\lambda(T-t))F}{(\lambda - \alpha_0 - 2a)} \right\}, \quad (13)$$

где константа $\lambda > \left(\max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t) + 2a \right) > 0$, а ограниченная непрерывная

функция ψ совпадает на границе области Γ_T с функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

Доказательство. Перейдем в уравнении (11) к новой функции $V(x, t) = Y(x, t) \exp(-\lambda t) ((x-0,5)^2 + 1)^{-1}$, где $\lambda > 0$ — неопределенная пока константа. Функция $V(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} V_t + (\lambda - \alpha_0 - 2a) ((x-0,5)^2 + 1)^{-1} V + ((x-0,5)^2 + 1) \exp(\lambda t) V^2 - \\ - 2a(2x-1) ((x-0,5)^2 + 1)^{-1} V_x - aV_{xx} = \\ = ((x-0,5)^2 + 1)^{-1} \exp(-\lambda t) F, \end{aligned} \quad (14)$$

$$(1.25V_x - V) \Big|_{x=0} = -\exp(-\lambda t) \psi_1, \quad (1.25V_x + V) \Big|_{x=1} = \exp(-\lambda t) \psi_2,$$

$$V|_{t=0} = ((x-0,5)^2 + 1)^{-1} \psi_3.$$

Для получения оценки (13) рассмотрим максимум функции V в некоторой точке (x_0, t_0) . Возможны три варианта.

1. Максимум $V(x_0, t_0) \leq 0$, тогда справедлива оценка (13).
2. Неотрицательный максимум $V(x_0, t_0)$ достигается на границе области Q_T .
Если $x_0 = 0$, то $V_x(x_0, t_0) \leq 0$ и $0 \leq V(x_0, t_0) \leq \exp(-\lambda t_0) \psi_1(t_0)$.
Если $x_0 = 1$, то $V_x(x_0, t_0) \geq 0$ и $0 \leq V(x_0, t_0) \leq \exp(-\lambda t_0) \psi_2(t_0)$.
Если $t_0 = 0$, то $0 \leq V(x_0, t_0) \leq \exp(-\lambda t_0) \psi_3(x_0)$.
3. Неотрицательный максимум достигается во внутренней точке области Q_T .

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} V_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad V_x(x_0, t_0) = 0, \quad (-aV_{xx}) \geq 0, \\ ((x_0 - 0,5)^2 + 1) \exp(\lambda t_0) V^2(x_0, t_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Из (14) следует оценка

$$0 \leq V(x_0, t_0) \leq \frac{\exp(-\lambda t) F(x_0, t_0)}{(\lambda - \alpha_0 - 2a)},$$

где константа $\lambda > \left(\max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t) + 2a \right) > 0$.

Рассмотрим минимум $V(x_0, t_0)$. Возможны три варианта.

1. Минимум $V(x_0, t_0) \geq 0$, тогда справедлива оценка (13).
2. Неположительный минимум $V(x_0, t_0)$ достигается на границе области Q_T .

Если $x_0 = 0$, то $V_x(x_0, t_0) \geq 0$ и $V(x_0, t_0) \geq \exp(-\lambda t_0)\psi_1(t_0)$. Однако это противоречит условию отрицательного минимума и единственный корректный вариант в данном случае: $V_x(x_0, t_0) = V(x_0, t_0) = \exp(-\lambda t_0)\psi_1(t_0) = 0$.

Если $x_0 = 1$, то $V_x(x_0, t_0) \leq 0$ и $V(x_0, t_0) \geq \exp(-\lambda t_0)\psi_2(t_0)$. Минимум не может быть отрицательным, $V_x(x_0, t_0) = V(x_0, t_0) = \exp(-\lambda t_0)\psi_1(t_0) = 0$.

Если $t_0 = 0$, то минимум также не может быть отрицательным и единственный корректный вариант: $V(x_0, t_0) = \exp(-\lambda t_0)\psi_2(x_0) = 0$.

3. Неположительный минимум $V(x_0, t_0)$ достигается во внутренней точке области Q_T . Тогда справедливы неравенства

$$V_t(x_0, t_0) \leq 0, \quad V_x(x_0, t_0) = 0, \quad (-aV_{xx}) \leq 0.$$

Из (14) также следует неравенство

$$\begin{aligned} & (\lambda - \alpha_0 - 2a((x_0 - 0,5)^2 + 1)^{-1})V(x_0, t_0) + \\ & + ((x_0 - 0,5)^2 + 1)\exp(\lambda t_0)V^2(x_0, t_0) \geq \exp(-\lambda t)F(x_0, t_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает необходимое условие существования отрицательного минимума

$$\begin{aligned} V(x_0, t_0) & \leq -\exp(-\lambda t_0)(\lambda - \alpha_0 - 2a((x_0 - 0,5)^2 + 1)^{-1})((x_0 - 0,5)^2 + 1)^{-1} \leq \\ & \leq -0,8\exp(-\lambda T)(\lambda - \alpha_0 - 2a) < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим параметрическое семейство таких минимумов, зависящих от $T: V(x_0, t_0, T)$. При $T \rightarrow 0$ и соответственно при $t_0 \rightarrow 0$ минимальное значение функции $V(x_0, t_0, T)$ увеличивается, поскольку $V(x, t)$ — непрерывная функция (классическое решение задачи (14)), принимающая неотрицательные значения в начальный момент времени: $V(x, 0) = ((x - 0,5)^2 + 1)^{-1}\psi_3(x) \geq 0$. Однако условие (15) при $T \rightarrow 0$ приводит к условию скачка функции при переходе к начальному значению. Возникает противоречие. Единственный корректный вариант для точки минимума: $V(x_0, t_0) = ((x_0 - 0,5)^2 + 1)^{-1}\psi_3(x_0) = 0$.

Таким образом, с одной стороны, $V(x, t)$ не может принимать отрицательного минимального значения в Q_T , с другой — для ее положительного максимума справедлива оценка

$$0 \leq V(x, t) \leq \max \left\{ 0; \max_{\Gamma_t} (\exp(-\lambda t)\psi); \max_{Q_t} \frac{\exp(-\lambda t)F}{(\lambda - \alpha_0 - 2a)} \right\},$$

где константа $\lambda > (\max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t) + 2a) > 0$, ограниченная непрерывная функция ψ совпадает на границе области Γ_T с функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Переходя к функции $Y(x, t) = V(x, t)\exp(\lambda t)((x - 0,5)^2 + 1)$, получаем оценку (13).

Теорема доказана.

Замечание 1. Оценка (13) гарантирует ограниченность классического решения задачи (11), (12) на любом ограниченном отрезке времени $[0, T]$. Однако в каждой точке $(x, t) \in Q_T$ суммарная инновация не превышает количества рецептов: $Y(t) \leq \alpha_0(t)$. Если $Y(t)$ достигает максимального значения за счет внутренних инвестиций или внешних потоков, моделирование процесса останавливается.

Рассмотрим в области $x \in [0, 1]$ две конкурирующие инновации $\{y^{(k)}\}$ ($k = \overline{1, 2}$), расположенные в граничных точках $x = 0, x = 1$ с локализованными начальными распределениями типа $y_0^{(1)}(x, 0) = A_1 \exp(-B_1 x^2)$, $y_0^{(2)}(x, 0) = A_2 \exp(-B_2 (x-1)^2)$, $A_k > 0, B_k > 0$. Расщепим задачу (11), (12) на две задачи для $\{y^{(k)}\}$ по аналогии с системой (3)–(5) и получим систему Лотке-Вольтерра

$$y_t^{(k)} = (\alpha_0 - Y)y^{(k)} - (-1)^k \gamma y^{(k)} y^{(m)} + a y_{xx}^{(k)} + f^{(k)}, \quad (16)$$

$$y_x^{(k)} \Big|_{x=0} = -\psi_1^{(k)}, \quad y_x^{(k)} \Big|_{x=1} = \psi_2^{(k)}, \quad y^{(k)} \Big|_{t=0} = \psi_3^{(k)}. \quad (17)$$

Здесь γ — коэффициент межинновационной конкуренции, $m = \overline{1, 2}$, $m \neq k$, $Y(x, t) = \sum_{k=1}^2 y^{(k)}(x, t)$, $\psi_s = \sum_{k=1}^2 \psi_s^{(k)}$ ($s = \overline{1, 3}$), причем $0 \leq \psi_3 = \sum_{k=1}^2 \psi_3^{(k)} < \alpha_0(0)$, $F(x, t) = \sum_{k=1}^2 f^{(k)}(x, t)$, $f^{(k)}(x, t)$ — инвестиции в k -инновацию. Сум-

ма уравнений (16) приводит к уравнению (11). Поскольку задача (11), (12) не зависит от решения системы (16), (17), ее решение служит опорной функцией для редукции системы Лотке-Вольтерра (16), (17) к совокупности независимых уравнений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, функции $y^{(1)}(x, t)$, $y^{(2)}(x, t)$ — классическое решение системы (16), (17) в области Q_T , коэффициенты системы (16) $\gamma \in (-1, 1)$, $\psi_1^{(k)}(t) \geq 0$, $\psi_2^{(k)}(t) \geq 0$, $0 \leq \psi_3 = \sum_{k=1}^2 \psi_3^{(k)} < \alpha_0(0)$, $f^{(k)}(x, t) \geq 0$ — непрерывные, ограниченные на множестве Q_T функции. Тогда для $y^{(k)}(x, t)$ ($k = \overline{1, 2}$) справедливы оценки

$$0 \leq y^{(k)}(x, t) \leq \leq 1,25 \max \left\{ 0; \max_{\Gamma_t} \exp(\lambda(T-t))\psi^{(k)}; \max_{Q_t} \frac{\exp(\lambda(T-t))f^{(k)}}{(\lambda - \alpha_0 - 2a)} \right\}, \quad (18)$$

где константа $\lambda > (\max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t) + 2a) > 0$, а ограниченные непрерывные функции $\psi^{(k)}$ для каждого фиксированного k совпадают на границе области Γ_T с функциями $\psi_1^{(k)}$, $\psi_2^{(k)}$, $\psi_3^{(k)}$.

Доказательство. Подставим в систему (16), (17) $y^{(2)} = Y - y^{(1)}$. Для $y^{(1)}$ получаем уравнение

$$y_t^{(1)} - (\alpha_0 + (\gamma - 1)Y)y^{(1)} + \gamma y^{(1)^2} - a y_{xx}^{(1)} = f^{(1)}. \quad (19)$$

Перейдем в уравнении (19) к новой функции $V^{(1)}(x, t) = y^{(1)}(x, t) \exp(-\lambda^{(1)}t)(x - 0,5)^2 + 1$, где $\lambda^{(1)} > 0$ — неопределенная пока константа. Функция $V^{(1)}(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
& V_t^{(1)} + (\lambda^{(1)} - \alpha_0 + (1 - \gamma)Y - 2a((x - 0,5)^2 + 1)^{-1})V^{(1)} + \\
& + \gamma((x - 0,5)^2 + 1)\exp(\lambda^{(1)}t)V^{(1)2} - 2a(2x - 1)((x - 0,5)^2 + 1)^{-1}V_x^{(1)} - \\
& - aV_{xx}^{(1)} = ((x - 0,5)^2 + 1)^{-1}\exp(-\lambda^{(1)}t)f^{(1)}, \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.25V_x^{(1)} - V^{(1)}) \Big|_{x=0} &= -\exp(-\lambda t)\psi_1^{(1)}, \\
(1.25V_x^{(1)} + V^{(1)}) \Big|_{x=1} &= \exp(-\lambda t)\psi_2^{(1)}, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$V^{(1)} \Big|_{t=0} = ((x - 0,5)^2 + 1)^{-1}\psi_3^{(1)} \tag{22}$$

Повторяя для задачи (20)–(22) рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, получаем, что, с одной стороны, $V^{(1)}(x, t)$ не может принимать отрицательного минимального значения в \bar{Q}_T , с другой — из неравенства $(1 - \gamma)Y(x, t) \geq 0$ следует, что для ее положительного максимума справедлива оценка

$$0 \leq V^{(1)}(x, t) \leq \max \left\{ 0; \max_{\Gamma_t} (\exp(-\lambda t)\psi^{(1)}); \max_{Q_T} \frac{\exp(-\lambda t)f^{(1)}}{(\lambda - \alpha_0 - 2a)} \right\},$$

где константа $\lambda > (\max_{t \in [0, T]} \alpha_0(t) + 2a) > 0$, ограниченная непрерывная функция $\psi^{(1)}$ совпадает на границе области Γ_T с функциями $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \psi_3^{(1)}$. Переходя к функции $y^{(1)}(x, t) = V^{(1)}(x, t)\exp(\lambda t)((x - 0,5)^2 + 1)$, получаем оценку (18).

Поскольку уравнение системы (16), (17) для функции $y^{(2)}$ отличается от уравнения для $y^{(1)}$ только знаком при коэффициенте γ и коэффициентами $\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \psi_3^{(2)}, f^{(2)}$, для решения $y^{(2)}$ получаем аналогичные оценки (18).

Теорема доказана.

Замечание 2. Оценки (18) гарантируют ограниченность классического решения задачи (16), (17) на любом ограниченном отрезке времени $[0, T]$. Однако в каждой точке $(x, t) \in Q_T$ суммарная инновация не превышает количества реципиентов:

$$0 \leq \sum_{k=1}^2 y^{(k)}(x, t) \leq \alpha_0(t). \text{ Если максимальное значение } \sum_{k=1}^2 y^{(k)}(x, t) \text{ достигает в}$$

некоторый момент времени T^* числа реципиентов инновации $\alpha_0(T^*)$ за счет внутренних инвестиций или внешних потоков, то T^* является конечным моментом моделирования процесса диффузии инноваций.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ИННОВАЦИЙ

Рассмотрим задачу оптимального управления инновацией $y^{(1)}$ с помощью инвестиций и ее начальных распределений для системы двух конкурирующих инноваций

$$y_t^{(1)} = (\alpha_0 - Y)y^{(1)} - \gamma y^{(1)}y^{(2)} + ay_{xx}^{(1)} + f^{(1)}(x, t, u), \quad (23)$$

$$y_t^{(2)} = (\alpha_0 - Y)y^{(2)} + \gamma y^{(2)}y^{(1)} + ay_{xx}^{(2)} + f^{(2)}(x, t), \quad (24)$$

$$y_x^{(k)} \Big|_{x=0} = -\psi_1^{(k)}, \quad y_x^{(k)} \Big|_{x=1} = \psi_2^{(k)},$$

$$y^{(1)} \Big|_{t=0} = \psi_3^{(1)}(x, u), \quad y^{(2)} \Big|_{t=0} = \psi_3^{(2)}(x), \quad (25)$$

где $Y(x, t)$ — решение задачи (11), (12), $u(x, t) \in U$ — функция управления из множества управлений U . В задаче (23)–(25) принята гипотеза о том, что инвестору первой инновации известна инвестиционная стратегия инвестора второй инновации $f^{(2)}(x, t)$. На пространстве $\Sigma_J = \{C_2^1(Q_T) \times C_2^1(Q_T) \times U\}$ введем критерий качества управления — функционал $J(y^{(1)}, y^{(2)}, u)$ (целевая функция инвестора первой инновации). Задача оптимального управления для системы (11), (12), (23)–(25) с ограничениями имеет вид

$$u^*(x, t) = \arg \inf_{u \in U} J(y^{(1)}, y^{(2)}, u), \quad (26)$$

$$0 \leq \sum_{k=1}^2 y^{(k)}(x, t) \leq \alpha_0(t). \quad (27)$$

Рассмотрим достаточные условия существования оптимального управления для задачи (11), (12), (23)–(25) по аналогии с [8, 9].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теорем 1 и 2, множества функций $F^{(1)} = \{f^{(1)}(x, t, u) : u \in U\}$, $\Psi^{(1)} = \{\psi_3^{(1)}(x, u) : u \in U\}$ компактны в $C(Q_T)$, $C([0, 1])$ соответственно. Функционал $J(y^{(1)}, y^{(2)}, u) = J(y^{(1)}, y^{(2)})$ полунепрерывный снизу на пространстве Σ_J . Тогда существует по крайней мере одно оптимальное управление $u(x, t) \in U$ задачи (11), (12), (23)–(25).

Доказательство. Из начальных условий $0 \leq \psi_3 = \sum_{k=1}^2 \psi_s^{(k)} < \alpha_0(0)$ следует,

что ограничение (27) не противоречит существованию минимизирующей последовательности для (26) $\{u_l\}$. В силу компактности множеств $F^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$ из последовательностей $f_l^{(1)}(x, t) = f^{(1)}(x, t, u_l)$, $\psi_{3l}^{(1)}(x) = \psi_3^{(1)}(x, u_l)$ можно выделить сходящиеся в $C(Q_T)$, $C([0, 1])$ подпоследовательности $f_{l_p}^{(1)}(x, t) \rightarrow \hat{f}^{(1)}(x, t)$, $\psi_{3l_p}^{(1)}(x) \rightarrow \hat{\psi}^{(1)}(x)$. Из компактности $F^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$ следует существование оптимального управления $\hat{u} \in U$, для которого $\hat{f}^{(1)}(x, t) = f(x, t, \hat{u})$, $\hat{\psi}^{(1)}(x) = \psi_3^{(1)}(x, \hat{u})$. В силу существования классического решения системы (11), (12), (23)–(25) и его непрерывной зависимости от начальной функции и правой части (в силу теорем 1 и 2), для $f_{l_p}^{(1)}(x, t)$, $\psi_{3l_p}^{(1)}(x)$ существуют сходящиеся последовательности функций $y_{l_p}^{(1)}(x, t) \rightarrow \hat{y}^{(1)}(x, t)$, $y_{l_p}^{(2)}(x, t) \rightarrow \hat{y}^{(2)}(x, t)$, где $\hat{y}^{(1)}(x, t)$, $\hat{y}^{(2)}(x, t)$ — решение задачи (11), (12), (23)–(25) при $f^{(1)}(x, t, \hat{u}) = \hat{f}^{(1)}(x, t)$, $\psi_3^{(1)}(x, \hat{u}) = \hat{\psi}^{(1)}(x)$.

Из полунепрерывности функционала $J(y^{(1)}, y^{(2)})$ снизу следует справедли-

$$\lim_{l_p \rightarrow \infty} J(y_{l_p}^{(1)}, y_{l_p}^{(2)}, u_{l_p}) \geq J(\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \hat{u}).$$

Поскольку u_{l_p} — минимизирующая последовательность, имеем

$$\lim_{l_p \rightarrow \infty} J(y_{l_p}^{(1)}, y_{l_p}^{(2)}, u_{l_p}) = \inf_u J(y^{(1)}, y^{(2)}).$$

Из данных соотношений следует, что $\hat{u} \in U$ — оптимальное управление задачи (11), (12), (23)–(25).

Теорема доказана.

Замечание 3. Для практического использования результатов теоремы 3 условия компактности множеств $F^{(1)}, \Psi^{(1)}$ можно заменить условиями для U : если функции $f^{(1)}(x, t, u), \psi_3^{(1)}(x, u)$ непрерывно зависят от управления $u(x, t)$ и множество $u \in U$ является компактным в $C(Q_T)$, то теорема 3 справедлива. Это следует из теорем о непрерывных отображениях компактных пространств [10].

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИИ

Методы численного моделирования позволяют исследовать системы конкурирующих инноваций для большего количества участников ($n > 2$). Для объемов выпуска инновационного продукта в единицу времени $Y(x, t)$ рассмотрим задачу (11), (12) в многомерной области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = \{x | 0 \leq x_s \leq 1, s = \overline{1, n-1}\}$. Пусть в Ω существует n конкурирующих инноваций $\{y^{(k)}\} (k = \overline{1, N})$. Согласно концепции диффузии инновации центры инновационных продуктов должны располагаться в Ω на равноудаленных расстояниях. Поэтому для n конкурирующих инноваций размерность области Ω должна быть $(n-1)$. Расцепим задачу (11), (12) на n задач для $\{y^{(k)}\}$ по аналогии с системой (13), (14) и получим систему Лотке–Вольтерра

$$y_t^{(k)} = (\alpha_0 - Y)y^{(k)} + y^{(k)} \left(\sum_{\substack{s=1 \\ (k>1)}}^{k-1} \gamma_{ks} y^{(s)} - \sum_{\substack{s=k+1 \\ (k<n)}}^n \gamma_{ks} y^{(s)} \right) + a \sum_{s=1}^{n-1} y_{x_s x_s}^{(k)} + f^{(k)}, \quad (28)$$

$$y_{x_m}^{(k)} \Big|_{x_m=0} = -\psi_{1m}^{(k)}, \quad y_{x_m}^{(k)} \Big|_{x_m=1} = \psi_{2m}^{(k)}$$

$$(m = \overline{1, n-1}), \quad y^{(k)} \Big|_{t=0} = \psi_3^{(k)}, \quad (29)$$

где $Y(x, t) = \sum_{k=1}^n y^{(k)}(x, t), \quad \psi_s = \sum_{k=1}^n \psi_s^{(k)} \quad (s = \overline{1, 3}), \quad F(x, t) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(x, t).$

Сумма уравнений (28) приводит к уравнению (11). Условие упорядоченности конкуренции инноваций приводит к упорядоченности уравнений системы (28) по коэффициентам γ_{ks} . Инновация $y^{(k)}$ доминирует над инновацией $y^{(s)}$: $y^{(k)} \succ y^{(s)}$, если $0 \leq \gamma_{ks} < 1$. Будем предполагать в системе (28) $y^{(1)} \succ y^{(2)} \succ \dots \succ y^{(n)}$. При нарушении данного условия происходит заикливание доминирования одних инноваций над другими, что недопустимо в экономических системах.

Будем предполагать существование в системе (28) управления s -инновацией с помощью инвестиций $f^{(s)} = f^{(s)}(x, t, u^{(s)})$ и начального распределения $\psi_3^{(s)} = \psi_3^{(s)}(x, u^{(s)})$. На пространстве $\Sigma_J = \{C_2^1(Q_T) \times \dots \times C_2^1(Q_T) \times U\}$ введем критерий качества управления — функционал $J(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, u^{(s)})$ (целевая функция инвестора s -инновации). Задача оптимального управления для системы (11), (12), (23)–(25) имеет вид

$$u^*(x, t) = \arg \inf_{u^{(s)} \in U} J(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, u^{(s)}).$$

При численном исследовании системы (28), (29) будем предполагать выполнение условий теорем 1, 2, 3:

1) коэффициенты задачи (11), (12) $\alpha_0(t) > 0$, $F(x, t) \geq 0$, $\psi_1(t) \geq 0$, $\psi_2(t) \geq 0$, $\psi_3(x) \geq 0$ — непрерывные, ограниченные на множестве Q_T функции;

2) функции $y^{(k)}(x, t)$ ($k = \overline{1, n}$) — классическое решение системы (28), (29) в области Q_T , коэффициенты ($0 \leq \gamma_{ks} < 1$), $f^{(k)}(x, t) \geq 0$, $\psi_1^{(k)}(t) \geq 0$, $\psi_2^{(k)}(t) \geq 0$, $\psi_3^{(k)}(x) \geq 0$ — непрерывные, ограниченные на множестве Q_T функции;

3) множества функций $F^{(s)} = \{f^{(s)}(x, t, u) : u \in U\}$, $\Psi^{(s)} = \{\psi_3^{(s)}(x, u) : u \in U\}$ компактны в $C(Q_T)$, $C([0, 1])$ соответственно; функционал $J(y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, u^{(s)})$ — полунепрерывный снизу на пространстве Σ_J .

Поскольку система (28), (29) является многомерной, для ее численного решения методами конечных разностей применяют два подхода. Первый связан с использованием неявных двухслойных монотонных разностных схем и применением специальных алгоритмов расщепления (факторизации) [11, 12], второй — с использованием явных трехслойных монотонных разностных схем [14].

Неявные схемы, как правило, экономичны, поскольку не накладывают жестких ограничений на параметры разностной сетки (шаги по времени и координате), но применение методов факторизации вносит дополнительные погрешности в решение задачи в окрестности границы области, что может существенно влиять на конечный результат. Кроме того, при большой размерности систем возрастает количество локально-одномерных уравнений и значительно увеличивается число выполняемых операций, что может свести к минимуму преимущества неявных схем по трудоемкости алгоритма. Следует отметить также, что алгоритм факторизации достаточно затруднителен для квазилинейных параболических операторов.

Явные трехслойные разностные схемы для квазипараболических уравнений часто накладывают намного более жесткие ограничения на шаг по времени, что приводит к большим объемам вычислений. Однако с ростом размерности системы количество операций, затрачиваемых на одном шаге по времени, не приводит к существенному росту трудоемкости алгоритма, поскольку число решаемых уравнений в системе не увеличивается. Пример использования подобных схем для систем квазилинейных уравнений гидротермодинамики приводится в [14].

Введем в рассматриваемой области равномерную разностную сетку $\bar{\omega}_{h_1 \dots h_n \tau} = \{x_{1_i}, \dots, x_{n-1_{i_{n-1}}}, t_j \mid x_{k_{i_k}} = i_k h_k, t_j = j\tau, 0 \leq i_k \leq I_k, 0 \leq j \leq M\}$. Обозначим $\bar{y}^{(k)}$, $y^{(k)}$, $\hat{y}^{(k)}$ значения функций $y^{(k)}$ в моменты времени t_{j-1} , t_j , t_{j+1} соответственно. Сделаем замену функции в первом уравнении системы (28) на $y^{(1)}(x, t) = V^{(1)}(x, t) \exp(\lambda t)$ ($\lambda > 0$ — неопределенная пока константа) и подста-

вим значение $Y(x, t) = \sum_{k=1}^n y^{(k)}(x, t)$. Для полученного уравнения рассмотрим

условно-монотонную явную неконсервативную трехслойную схему второго порядка точности с использованием сглаживающего оператора из схемы Дюфорта и Франкела [11]

$$\begin{aligned} (\hat{V}_{i_k}^{(1)} - \tilde{V}_{i_k}^{(1)}) / (2\tau) = & -(\lambda - \alpha_0) V_{i_k}^{(1)} - V_{i_k}^{(1)2} \exp(\lambda t) + V_{i_k}^{(1)} \sum_{s=2}^n (\gamma_{1s} - 1) y_{i_k}^{(s)} \\ & + a \sum_{s=1}^{n-1} \left(V_{i_s+1}^{(1)} - 2V_{i_s}^{(1)} + V_{i_s-1}^{(1)} \right) / (h_s^2) + \\ & + w_{i_k}^{(k)} \left(\hat{V}_{i_k}^{(1)} - 2V_{i_k}^{(1)} + \tilde{V}_{i_k}^{(1)} \right) + f_{i_k}^{(1)} \exp(-\lambda t), \end{aligned} \quad (30)$$

где w_{i_k} — сеточная функция, определяемая из условия получения разностной схемы типа «ромб»:

$$w_{i_k} = -0,5 \left(\lambda - \alpha_0 + y_{i_k}^{(1)} - \sum_{s=2}^n (\gamma_{1s} - 1) y_{i_k}^{(s)} \right) - a \left(\sum_{s=1}^{n-1} h_s^{-2} \right). \quad (31)$$

Тогда $\Omega y^{(k)} = w_{i_k}^{(k)} (\hat{y}_{i_k}^{(k)} - 2y_{i_k}^{(k)} + \tilde{y}_{i_k}^{(k)})$ — сглаживающий оператор, имеющий порядок малости $O(\tau^2 \sum_{s=1}^n h_s^{-2})$. Схема (30) обладает условной аппроксимацией и имеет погрешность

$$\eta = O \left(\tau^2 \sum_{s=1}^{n-1} h_s^{-2} + \sum_{s=1}^{n-1} h_s^2 + \tau^2 \right) = O \left(\sum_{s=1}^{n-1} h_s^2 \right) \text{ при } \tau = O \left(\sum_{s=1}^{n-1} h_s^2 \right).$$

С учетом (31) схема (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{V}_{i_k}^{(1)} = & \frac{(1 + 2\tau w_{i_k})}{(1 - 2\tau w_{i_k})} \tilde{V}_{i_k}^{(1)} + \\ & + \frac{2\tau a}{(1 - 2\tau w_{i_k})} \sum_{s=1}^{n-1} (V_{i_s+1}^{(1)} + V_{i_s-1}^{(1)}) / (h_s^2) + \frac{2\tau \exp(-\lambda t_j)}{(1 - 2\tau w_{i_k})} f_{i_k}^{(1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Поскольку начальные значения функций $y_{i_s}^{(k)} \geq 0$ ($k > 1$), для того чтобы схема (32) формально удовлетворяла разностной теореме принципа максимума из [11], достаточно наложить следующие ограничения на параметры λ, τ :

$$\lambda > \max_t \alpha_0(t) > \max_t \alpha_0(t) + \sum_{s=2}^n (\gamma_{1s} - 1) \max_{x,t} y^{(s)}, \quad (33)$$

$$\tau < \left(\lambda - \alpha_0 - \sum_{s=2}^n (\gamma_{1s} - 1) y_{i_k}^{(s)} + y_{i_k}^{(1)} + 2a \sum_{s=1}^{n-1} h_s^{-2} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Условия (33), (34) гарантируют неотрицательность и ограниченность сверху решения $\hat{V}_{i_k}^{(1)}$, т.е. решение остается ограниченным в течение любого ограничен-

ного промежутка времени. Однако выбор λ и τ по (33), (34) возможен только численно, с помощью итерационных процедур, поскольку теорема 2 доказана лишь для системы двух инноваций. Но оценку для суммарного объема инноваций $Y(x, t)$ из (13) можно использовать в качестве грубого начального приближения для λ и τ , поскольку теорема 1 остается справедливой для пространства любой конечной размерности. Граничные и начальные условия (29) аппроксимируем стандартными разностными операторами из [11] с порядком $O(h_{i_k}^2)$. Для трехслойных разностных схем необходимо также задать дополнительное условие в начальный момент времени. Для рассматриваемого класса систем корректным дополнительным условием будет

$$y_t^{(k)}|_{t=0} = 0. \quad (35)$$

После определения $\hat{V}_{i_k}^{(1)}$ переходим к функции $\hat{y}_{i_k}^{(1)} = \hat{V}_{i_k}^{(1)} \exp(\lambda t_{j+1})$ и рассматриваем аналогично второе и последующие уравнения системы (28). Оценка (33) для λ остается справедливой для всех последующих уравнений на всех последующих временных слоях. Заметим, что теоремы принципа максимума из [11, 13], используемые для нелинейных разностных схем, гарантируют ограниченность и неотрицательность разностного решения, но не сходимости данного решения к решению дифференциальной системы уравнений. В данной работе проведем численные исследования поведения разностного решения на примере системы для трех конкурирующих инноваций.

Рассмотрим систему оптимального управления для задачи (28), (29), (35) с параметрами, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

n	y_{12}	y_{13}	y_{23}	a	α_0	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_2^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$
3	0.1	0.3	0.2	100	10 000	0	0	1	0	0.5	0.866

Параметры $x_i^{(k)}$ в табл. 1 — координаты равноудаленных центров инноваций в области $\Omega = \{x | 0 \leq x_s \leq 1, s = \overline{1, 2}\}$. Начальные и граничные условия: $\psi_1^{(k)}(t) = 0, \psi_2^{(k)}(t) = 0, \psi_3^{(k)}(x) = 0$. Рассмотрим сценарий управления самой недоминирующей инновацией $y^{(3)}$ с помощью внутренних инвестиций:

$$f^{(1)} = 0, 1 \exp(-20((x_1 - x_1^{(1)})^2 + (x_2 - x_2^{(1)})^2)),$$

$$f^{(2)} = 0, 05 \exp(-20((x_1 - x_1^{(2)})^2 + (x_2 - x_2^{(2)})^2)),$$

$$f^{(3)} = u(t) \exp(-20((x_1 - x_1^{(3)})^2 + (x_2 - x_2^{(3)})^2)).$$

Задача оптимального управления — вывести недоминирующую инновацию $y^{(3)}$ на уровень 50% реципиентов за минимально короткий промежуток времени при доминирующей инвестиции $f^{(3)} > f^{(1)}, f^{(3)} > f^{(2)}$:

$$U^* = \arg \inf_U (y^{(3)}(x, t, u) - 0,5 \alpha_0)^2 \quad (36)$$

при ограничениях $(y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)}) \leq \alpha_0$. Единственное решение задачи (36) определяется как управление с минимальной нормой на множестве

управлений (36):

$$u^* = \arg \inf_{U^*} \|u\|_{L_2(Q_T)}. \quad (37)$$

Согласно замечанию к теореме 3 решение задачи (36) можно искать на классе кусочно-постоянных ограниченных функций (компакте) вида

$$u(t) = \sum_{j=1}^m u_j \chi(t - t_{j-1}) \chi(t_j - t), \quad (38)$$

где $\{u_j\}$ — набор ограниченных коэффициентов ($0 \leq u_j \leq u^0(t)$, $u^0(t) = 0,3 + 0,005t$) на интервалах $[t_{j-1}, t_j]$, $\chi(t)$ — функция Хевисайда. Результаты решения задачи оптимального управления (37), (38) для системы (28), (29) с помощью разностной схемы (31)–(34) для параметров из табл. 1 приведены на рис. 1, 2.

Тестовые расчеты показали, что в трехмерном случае решения системы (28), (29) являются неотрицательными и ограниченными по аналогии с двухмерной системой. Сценарий вывода самой недоминирующей инновации на средний уровень потребления, 50% доли рынка (рис. 1), возможен при значительном доминировании инвестиционных ресурсов по сравнению с другими инновациями. При этом функция управления (рис. 2) принимает максимальные граничные значения $u_j = u^0(t_j)$. Поведение сеточной функции — суммарной инновации $Y(x_{1i_1}, x_{2i_2}, t_j)$ согласуется с оценками для аналитического решения задачи (11), (12). Использование явной трехслойной разностной схемы (31)–(34) позволяет в режиме реального времени моделировать достаточно сложные многомерные процессы диффузии инноваций.

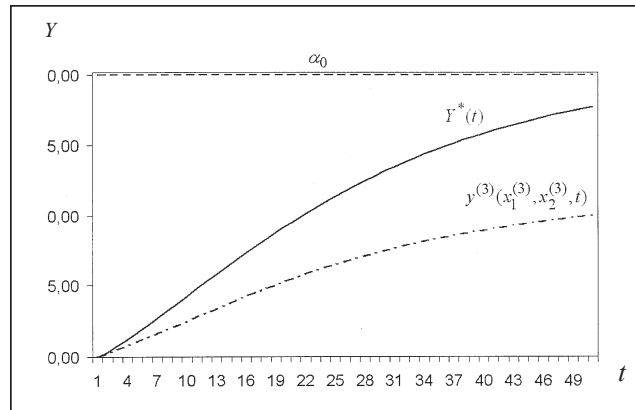


Рис. 1. График поведения максимального значения суммарной инновации $Y^*(t) = \max_{x_1, x_2} (Y(x_1, x_2, t))$ и управляемой инновации $y^{(3)}(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, t)$

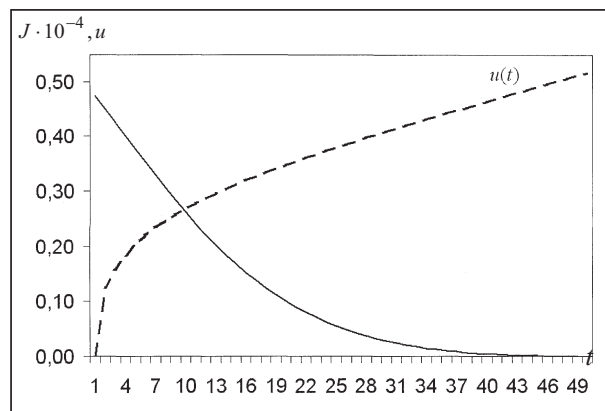


Рис. 2. Значения функционала $J(t) \cdot 10^{-4}$ и функции управления $u(t)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко В.О., Шматько В.Г. Инновационный менеджмент. — К.: ЦУЛ, Фенікс, 2003. — 440 с.

2. Московкин В. Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес-информ. — 1998. — № 17–18. — С. 41–48.
3. Шумпетер И. Теория экономического развития. — М.: Наука и техника, 1982. — 293 с.
4. Акіменко В.В., Сугоняк І.І. Динамічні моделі життєвого циклу інновацій в умовах невизначеності // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2007. — № 3. — С. 35–46.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1983. — 424 с.
7. Menaldi J.L., Rofman E., Sulem A. Optimal control and partial differential equations // Innovations & Applications. — Amsterdam: IOS Press, 2001. — 600 p.
8. Kunisch K., Leugering G., Sprekels J., Troltzsch F. Control of coupled partial differential equations // Intern. Ser. of Numer. Math. — Springer: Birkhauser, 2007. — 155, N 6. — 382 p.
9. Акіменко В.В., Наконечный А.Г. Модели оптимального управления процессами межрегиональной миграции в условиях рисков // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 3. — С. 107–122.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
12. Акіменко В.В. Моделирование двумерных процессов переноса при помощи нелинейных монотонных схем второго порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 6. — С. 75–93.
13. Акіменко В.В. Принцип максимума и нелинейные монотонные схемы для уравнений параболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1999. — 39, № 4. — С. 618–629.
14. Акіменко В.В., Черемных О.К. Моделирование вихревых течений на фоне двумерного процесса конвективного теплообмена // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. — С. 64–80.
15. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка. — 2003. — 263 с.

Поступила 10.09.2007