УДК 519.85



Член-корреспондент НАН Украины **Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай**

# Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника

*Для аналітичного опису відносин включення, перетинання і торкання кулі та неорієнтованого багатогранника, який допускає афінні перетворення трансляції та повороту, будується Ф-функція, вільна від радикалів. Вона може бути використана для математичного моделювання задач оптимального розміщення куль та неорієнтованих багатогранників.*

В последнее время интенсивно развиваются научные исследования по математическому моделированию оптимизационного размещения трехмерных геометрических объектов [1, 2]. Большой интерес к данной научной проблеме обусловлен чрезвычайной сложностью этих задач и необходимостью широкого применения результатов в научных исследованиях и в практике проектирования в различных отраслях промышленности. Поэтому разработка фундаментальных основ, конструктивных средств математического и компьютерного моделирования для решения новых классов оптимизационных задач геометрического проектирования является актуальной научной проблемой.

Для математического и компьютерного моделирования оптимизационных задач размещения шаров и неориентированных многогранников требуется аналитическое описание отношений их включения, пересечения и касания [3]. В работе [4] отмечается, что среди современных средств математического моделирования взаимоотношений геометрических объектов наиболее эффективным является метод Ф-функций [5], который позволяет применить для решения оптимизационных задач размещения современные методы локальной и глобальной оптимизации. В [6] показано, как использование Ф-функций и математического программирования позволяет улучшить результаты решения задач оптимального размещения геометрических объектов.

На сегодняшний день построен полный класс Ф-функций для базовых двумерных объектов [7]. Построению Ф-функций для ориентированных трехмерных объектов посвящены работы [8–10]. В [8] построены Ф-функции для базовых ориентированных трехмерных объектов, границы которых имеют форму шара, параллелепипеда, конуса и цилиндра. Работа [9] посвящена построению Ф-функции для двух выпуклых ориентированных многогранников. Математическое моделирование взаимоотношений двух сфероцилиндров представлено в [10]. Актуальной является проблема построения Ф-функций для расширенного класса неориентированных трехмерных объектов, которые допускают аффинные преобразования не только трансляции, но и непрерывного поворота. Поскольку применение Ф-функций с радикалами приводит к сложным вычислительным процедурам при решении оптимизационных задач размещения геометрических объектов [10, 11], то в данной работе строится свободная от радикалов Ф-функция для шара и неориентированного многогранника.

Пусть задан шар $S = \{(x, y, z) \in R^3\colon (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 - r^2 \leqslant 0\}$, где $u_s = (x_s, y_s, z_s)$ — координаты центра $S$, а также задан выпулый многогранник $P$ с вершинами $V_j = (e_j, f_j, h_j)$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$, заданные относительно собственной системы координат $Ox'y'z'$ многогранника $P$. Положение системы координат $Ox'y'z'$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ определяется вектором $v_p = (x_p, y_p, z_p)$. Полагаем, что нормальные уравнения плоскостей, проходящих через грани $F_i$, $i \in I$, многогранника $P$ имеют вид

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \qquad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Для прямой $L_k$, проходящей через ребро $E_k$, определим направляющие косинусы

$$\xi_k = (\cos\alpha_k, \cos\beta_k, \cos\gamma_k) = \left(\frac{e_{k_s} - e_{k_e}}{g_k}, \frac{f_{k_s} - f_{k_e}}{g_k}, \frac{h_{k_s} - h_{k_e}}{g_k}\right), \tag{1}$$

где $g_k = \sqrt{(e_{k_s} - e_{k_e})^2 + (f_{k_s} - f_{k_e})^2 + (h_{k_s} - h_{k_e})^2}$, $(e_{k_s}, f_{k_s}, h_{k_s})$, $(e_{k_e}, f_{k_e}, h_{k_e})$ — координаты вершин ребра $E_k$, $k \in K = (1, 2, \ldots, q = n + m - 2)$.

Многогранник $P$ может быть повернут на углы $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ вокруг осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$, соответственно. Матрица преобразования поворота, которая переводит точку, заданную относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, в точку, заданную относительно системы координат $Ox'y'z'$, имеет вид

$$R' = \begin{pmatrix} \cos\beta'\cos\gamma' & \sin\gamma'\cos\alpha' + \cos\gamma'\sin\beta'\sin\alpha' & \sin\gamma'\sin\alpha' - \cos\gamma'\sin\beta'\cos\alpha' \\ -\sin\gamma'\cos\beta' & \cos\gamma'\cos\alpha' - \sin\gamma'\sin\beta'\sin\alpha' & \sin\alpha'\cos\gamma' + \sin\gamma'\sin\beta'\cos\alpha' \\ \sin\beta' & -\cos\beta'\sin\alpha' & \cos\alpha'\cos\beta' \end{pmatrix}.$$

Вектор движения $P$ обозначим через $u_p = (v_p, \vartheta_p) \in R^6$, где $\vartheta_p = (\alpha', \beta', \gamma')$. Многогранник $P$, сдвинутый на вектор $u_p$, обозначим через $P(u_p)$. Шар $S$, транслированный на вектор $u_s$, обозначим через $S(u_s)$.

Для построения Ф-функции для $S(u_s)$ и $P(u_p)$ необходимо учесть следующие виды касаний:

1) шар $S(u_s)$касается грани $P_i$ многогранника $P(u_p)$;

2) шар $S(u_s)$ касается ребра $E_k$ многогранника $P(u_p)$;

3) шар $S(u_s)$ касается вершины $V_j$ многогранника $P(u_p)$.

Рассмотрим подробно каждый вид касания при $u_p = 0$. Для моделирования первого вида касания введем плоскости, которые определяются следующими уравнениями:

$$\Psi_{1i}(u_s) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i - r = 0, \qquad i \in I.$$

Построим функцию

$$\Psi_1(u_s) = \max\{\Psi_{1i}(u_s), i \in I\}. \tag{2}$$

Очевидно, что если $\Psi_1(u_s) > 0$, то $\operatorname{int} P(0) \bigcap \operatorname{int} S(u_s) = \varnothing$, где $\operatorname{int} D$ — внутренность $D$ [12].

Для второго вида касания поверхность 0-уровня Ф-функции состоит из частей поверхностей цилиндров $C_j$ радиусом $r$, оси которых проходят через ребра $E_k$, $k \in K$. Для того чтобы определить необходимые части поверхностей этих цилиндров, выполним следующие построения.

Используя направляющие косинусы (1), определим углы

$$\begin{aligned} &\sin\theta_k = \frac{\cos\beta_k}{\sqrt{\cos^2\alpha_k + \cos^2\beta_k}}, \qquad \cos\theta_k = \frac{\cos\alpha_k}{\sqrt{\cos^2\alpha_k + \cos^2\beta_k}}, \\ &\sin\gamma_k = \sqrt{1 - \cos^2\gamma_k}, \qquad k \in K. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя углы (3) и уравнение $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ цилиндра $C$, построим уравнения цилиндров $C_k$, полученных в результате поворота цилиндра $C$ на угол $\gamma_k$ вокруг оси $Oy$ и угол $\theta_k$ вокруг оси $Oz$: $x''^2 + y''^2 - r^2 = 0$, где $x''$ и $y''$ — компоненты вектора $X'' = (x'', y'', z'')^{\mathrm{T}}$, $X'' = R_{\gamma\theta k}X$,

$$R_{\gamma\theta k} = \begin{pmatrix} \cos\gamma_k\cos\theta_k & \cos\gamma_k\sin\theta_k & -\sin\gamma_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k & 0 \\ \sin\gamma_k\cos\theta_k & \sin\gamma_k\sin\theta_k & \cos\gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^x_{\gamma\theta k} \\ R^y_{\gamma\theta k} \\ R^z_{\gamma\theta k} \end{pmatrix}$$

или $(R^x_{\gamma\theta k}X)^2 + (R^y_{\gamma\theta k}X)^2 - r^2 = 0$, $k \in K$.

Тогда уравнения цилиндров $C_k$, транслированных на векторы $V_{k_s} = (e_{k_s}, f_{k_s}, h_{k_s})$ (вершина ребра $k$), будут иметь вид:

$$\Gamma_{1k}(u_s) = (R^x_{\gamma\theta k}(X - V_{k_s}))^2 + (R^y_{\gamma\theta k}(X - V_{k_s}))^2 - r^2 = 0, \qquad k \in K.$$

В каждой вершине $V_j = (e_j, f_j, h_j)$, $j \in J$, построим точки

$$\begin{aligned} &T^0_{jk_t} = (\eta^0_{jk_t}, \chi^0_{jk_t}, \xi^0_{jk_t}) = (rA_{k_t}, rB_{k_t}, rC_{k_t}), \\ &T^0_{jk_l} = (\eta^0_{jk_l}, \chi^0_{jk_l}, \xi^0_{jk_l}) = (rA_{k_l}, rB_{k_l}, rC_{k_l}), \\ &T_{jk_t} = (\eta_{jk_t}, \chi_{jk_t}, \xi_{jk_t}) = V_j + T^0_{jk_t}, \qquad T_{jk_l} = (\eta_{jk_l}, \chi_{jk_l}, \xi_{jk_l}) = V_j + T^0_{jk_l}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $k_t$ и $k_l$ — индексы граней многогранника, пересечением которых является ребро $E_k$, $k \in K$.

Тогда уравнения плоскостей, проходящих через тройки точек $\{T_{j_{k_s}k_t}, T_{j_{k_s}k_l}, T_{j_{k_e}k_l}\}$, имеют вид

$$\Gamma_{2k}(u_s) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ e_{j_{k_s}} + rA_{k_t} & f_{j_{k_s}} + rB_{k_t} & h_{j_{k_s}} + rC_{k_t} & 1 \\ e_{j_{k_s}} + rA_{k_l} & f_{j_{k_s}} + rB_{k_l} & h_{j_{k_s}} + rC_{k_l} & 1 \\ e_{j_{k_e}} + rA_{k_l} & f_{j_{k_e}} + rB_{k_l} & h_{j_{k_e}} + rC_{k_l} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $j_{k_s}$, $j_{k_e}$ — индексы вершин ребра $E_k$, $k \in K$.

На основании функций $\Gamma_{1k}(u_s)$ и $\Gamma_{2k}(u_s)$, $k \in K$, построим функцию

$$\Psi_{2k}(u_s) = \min\{\Gamma_{1k}(u_s), \Gamma_{2k}(u_s)\}, \qquad k \in K.$$

Если, по крайней мере, одно неравенство $\Psi_{2k}(u_s) > 0$ выполняется, то $P(0) \bigcap S(u_s) = \varnothing$. Это позволяет построить функцию

$$\Psi_2(u_s) = \max\{\Psi_{2k}(u_s), k \in K\}. \tag{5}$$

Очевидно, что если $\Psi_2(u_s) > 0$, то $P(0) \bigcap S(u_s) = \varnothing$.

В случае третьего вида касания поверхность 0-уровня Ф-функции состоит из частей поверхностей сфер $S_j$, которые определяются уравнениями

$$W_{1j}(u_s) = (x - e_j)^2 + (y - f_j)^2 + (z - h_j)^2 - r^2 = 0, \qquad j \in J. \tag{6}$$

Для того чтобы выделить необходимые части поверхностей сфер (6), выполним следующие построения. В каждой вершине $V_j$ введем точки

$$V_{jk}^1 = V_j + V_{jk}^0, \qquad j \in J, \qquad k \in \Omega_j,$$

где $V_{jk}^0 = \pm(r\cos\alpha_k, r\cos\beta_k, r\cos\gamma_k)$ (знак "+" берется, если направляющие косинусы определяются вершиной $V_j$ (1), а знак "−" — в противном случае); $\Omega_j$ — множество индексов ребер многогранника, пересечением которых является вершина $V_j$.

Легко проверить, что $V_{jk}^1$ являются точками пересечения прямых $L_k$, проходящих через ребра $E_k$, и сфер $S_j$, $j \in J$, $k \in \Omega_j$.

Пусть $E_k$ — ребро с вершинами $V_j$ и $V_p$. Для вершины $V_j$ возьмем смежные пары точек $\{T_{jk_t}^0 = (\eta_{jk_t}^0, \chi_{jk_t}^0, \xi_{jk_t}^0), T_{jk_l}^0 = (\eta_{jk_l}^0, \chi_{jk_l}^0, \xi_{jk_l}^0)\}$ (4). Повернем $T_{jk_t}^0$, $T_{jk_l}^0$, $V_j$ и $V_p$ на угол $-\theta_k$ вокруг оси $Oz$ и на угол $-\gamma_k$ вокруг оси $Oy$. В результате получим следующие точки:

$$T_{jk_t}^0(-\theta_k, -\gamma_k) = (\widetilde{\eta}_{jk_t}, \widetilde{\chi}_{jk_t}, \widetilde{\xi}_{jk_t}) = (R_{\gamma\theta k} T_{jk_t}^0)^T,$$

$$T_{jk_l}^0(-\theta_k, -\gamma_k) = (\widetilde{\eta}_{jk_l}, \widetilde{\chi}_{jk_l}, \widetilde{\xi}_{jk_l}) = (R_{\gamma\theta k} T_{jk_l}^0)^T,$$

$$V_j(-\theta_k, -\gamma_k) = (\widetilde{x}_{jk}, \widetilde{y}_{jk}, \widetilde{z}_{jk}) = (R_{\gamma\theta k} V_j)^T,$$

$$V_p(-\theta_k, -\gamma_k) = (\widetilde{x}_{pk}, \widetilde{y}_{pk}, \widetilde{z}_{pk}) = (R_{\gamma\theta k} V_p)^T, \qquad k \in \Omega_j,$$

где $\cos\gamma_k$ — направляющий косинус прямой $L_k$, проходящей через ребро $E_k$.

Очевидно, что после поворота ребро $E_k(-\theta_k, -\gamma_k)$, $k \in \Omega_j$, станет паралельно оси $Oz$.

Углы $\varphi_{jk}$ между прямыми $S_{jk}$, проходящими через пары точек $T_{jk_t}^0(-\theta_k, -\gamma_k)$ и $T_{jk_l}^0(-\theta_k, -\gamma_k)$, $k \in K$, и осью $Ox$ равны

$$\sin\varphi_{jk} = \frac{A_{jk}}{C_{jk}}, \qquad \cos\varphi_{jk} = \frac{B_{jk}}{C_{jk}}, \qquad j \in J, \qquad k \in \Omega_j,$$

где $A_{jk} = \widetilde{\chi}_{jk_l} - \widetilde{\chi}_{jk_t}$, $B_{jk} = \widetilde{\eta}_{jk_t} - \widetilde{\eta}_{jk_l}$, $C_{jk} = \sqrt{(A_{jk})^2 + (C_{jk})^2}$.

Рассмотрим эллиптический цилиндр $\Lambda$, заданный уравнением $2x^2+y^2-r^2 = 0$. Построим уравнения цилиндров $\Lambda(\pi/4)$ и $\Lambda(-\pi/4)$, полученных в результате поворота цилиндра $\Lambda$ на углы $\pi/4$ и $-\pi/4$ вокруг оси $Oy$:

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = \{X \in R^3, (x-z)^2 + y^2 - r^2 = 0\},$$

$$\Lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \{X \in R^3, (x+z)^2 + y^2 - r^2 = 0\}.$$

Уравнения цилиндров $\Lambda_{jk}(\varphi_k, \gamma_k, \theta_k)$, полученных в результате поворота цилиндров $\Lambda(\pi/4)$ или $\Lambda(-\pi/4)$ на углы $\varphi_k$ вокруг оси $Oz$, на углы $\gamma_k$ вокруг оси $Oy$ и на углы $\theta_k$ вокруг оси $Oz$, будут иметь следующий вид:

$$W_{2jk}(u_s) = (R_{\varphi\gamma\theta k}^x X)^2 + (R_{\varphi\gamma\theta k}^y X - (-1)^\eta R_{\varphi\gamma\theta k}^z X)^2 - r^2 = 0,$$

где

$$R_{\varphi\gamma\theta k} = \begin{pmatrix} R_{\varphi\gamma\theta k}^x \\ R_{\varphi\gamma\theta k}^y \\ R_{\varphi\gamma\theta k}^z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi_k \cos\gamma_k \cos\theta_k + \sin\varphi_k \sin\theta_k & \cos\varphi_k \cos\gamma_k \sin\theta_k - \sin\varphi_k \cos\theta_k & -\cos\varphi_k \sin\gamma_k \\ \sin\varphi_k \cos\gamma_k \cos\theta_k - \cos\varphi_k \sin\theta_k & \sin\varphi_k \cos\gamma_k \sin\theta_k + \cos\varphi_k \cos\theta_k & -\sin\varphi_k \sin\gamma_k \\ \sin\gamma_k \cos\theta_k & \sin\gamma_k \sin\theta_k & \cos\gamma_k \end{pmatrix},$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \widetilde{z}_{jk} > \widetilde{z}_{pk} \\ 1, & \text{если} \quad \widetilde{z}_{jk} < \widetilde{z}_{pk} \end{cases}, \qquad j, p \in J, \qquad k \in \Omega_j.$$

В результате трансляции цилиндров $\Lambda_{jk}(\varphi_{jk}, \gamma_k, \theta_k)$ на векторы $V_j$ получим

$$W_{2jk}(u_s) = (R^x_{\varphi\gamma\theta k}(X - V_j))^2 + (R^y_{\varphi\gamma\theta k}(X - V_j) - (-1)^\eta R^z_{\varphi\gamma\theta k}(X - V_j))^2 - r^2 = 0, \qquad j, p \in J, \qquad k \in \Omega_j. \tag{7}$$

Построим уравнения плоскостей, проходящих через тройки точек $V^1_{jk}$, $T_{jk_t}$, $T_{jk_l}$, в следующем виде:

$$W_{3jk}(u_s) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ e_j + r\cos\alpha_k & f_j + r\cos\beta_k & h_j + r\cos\gamma_k & 1 \\ e_j + rA_{k_t} & f_j + rB_{k_t} & h_j + rC_{k_t} & 1 \\ e_j + rA_{k_l} & f_j + rB_{k_l} & h_j + rC_{k_l} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad j \in J, \qquad k \in \Omega_j. \tag{8}$$

Используя функции $W_{1j}(u_s)$, $W_{2jk}(u_s)$, $W_{3jk}(u_s)$, $j \in J$, $k \in \Omega_j$ (6)–(8), построим для каждой $j$-й вершины следующие функции:

$$\Psi_{3j}(u_s) = \min\{W_{1j}(u_s), W_{2jk}(u_s), W_{3jk}(u_s), k \in \Omega_j\}, \qquad j \in J.$$

Очевидно, что если хотя бы одно из неравенств $\Psi_{3j}(u_s) > 0$, $j \in J$, выполняется, то $\operatorname{int} P(0) \bigcap \operatorname{int} S(u_s) = \varnothing$. Это свойство позволяет построить функцию

$$\Psi_3(u_s) = \max\{\Psi_{3j}(u_s), j \in J\}. \tag{9}$$

На основании функций $\Psi_i(u_s)$, $i = 1, 2, 3$, (2), (5) и (9) построим функцию

$$\widetilde{\Phi}(u_s) = \max\{\Psi_i(u_s), i = 1, 2, 3\}, \tag{10}$$

которая обладает следующим свойством: $\widetilde{\Phi}(u_s) \geqslant 0$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $\Psi_1(u_s) \geqslant 0$, $\Psi_2(u_s) \geqslant 0$, $\Psi_3(u_s) \geqslant 0$.

Таким образом, $\widetilde{\Phi}(u_s)$ является Φ-функцией для $S(u_s)$ и $P(0)$.

Исходя из функции (10), Φ-функция для шара $S(u_s)$ и неориентированного выпуклого многогранника $P(u_p)$ будет иметь вид

$$\Phi(u_s, u_p) = \widetilde{\Phi}(R'(u_s - v_p)). \tag{11}$$

На основе построенной Φ-функции (11) легко может быть получена Φ-функция для шара и неориентированного невыпуклого многогранника. Для построения такой Φ-функции необходимо воспользоваться методом построения Φ-функции для сложных геометрических объектов [13].

Представленная в работе Φ-функция позволяет строить математические модели оптимизационных задач размещения шаров и неориентированных многогранников, в которых область допустимых решений оптимизационной задачи может быть представлена в виде объединения подобластей. При этом каждая такая подобласть описывается системой неравенств, левые части которых являются непрерывными бесконечно дифференцируемыми функциями. Это свойство дает возможность применять для решения прикладных оптимизационных задач упаковки неориентированных многогранников и шаров современные методы локальной и глобальной оптимизации.

Отсутствие радикалов в построенной Ф-функции позволит значительно уменьшить вычислительные затраты при использовании градиентных методов оптимизации для поиска локальных экстремумов задач размещения трехмерных геометрических объектов.


1. *Torquato S., Stillinger F. H.* Jammed hard-particle packings: from Kepler to Bernal and beyond // Reviews of modern physics. – 2010. – **82**, No 3. – P. 2633–2672.
2. *Egeblad J., Nielsen B. K., Brazil M.* Translational packing of arbitrary polytopes // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2009. – **42**, No 4. – P. 269–288.
3. *Wäscher G., Haußner H., Schumann H.* An improved typology of cutting and packing problems // Europ. J. of Operational Research. – 2007. – **183**, No 3. – P. 1109–1130.
4. *Bennell J., Oliveira J.* The geometry of nesting problems: A tutorial // Ibid. – 2008. – No 184. – P. 397–415.
5. *Stoyan Yu. G.* Ф-function and its basic properties // Доп. НАН України. – 2001. – No 8. – С. 112–117.
6. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – **43**, No 5. – P. 535–553.
7. *Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Чернов Н. И., Панкратов А. В.* Полный класс Ф-функций для базовых $\varphi$-объектов // Доп. НАН України. – 2010. – № 12. – С. 25–30.
8. *Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Шайтхауэр Г.* Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // Кибернетика и системн. анализ. – 2005. – № 3. – С. 19–31.
9. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G. et al.* Construction of a Phi-function for two convex polytopes. Applicationes Mathematicae. – 2002. – **29**, No 2. – P. 199–218.
10. *Стоян Ю. Г., Чугай А. М.* Математическая модель и метод решения задачи размещения сфероцилиндров и цилиндров с учетом специальных ограничений // Электрон. моделирование. – 2008. – **30**, № 5. – С. 3–21.
11. *Stoyan Y. G., Chugay A. M.* Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region // Europ. J. of Operat. Research. – **197**, No 2. – P. 446–455.
12. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. – Москва: Мир, 1966. – 594 с.
13. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T.* Ф-function for complex 2*D* objects // 4OR Quarterly J. of Operat. Research. – 2004. – **2**, No 1. – P. 69–84.


*Институт проблем машиностроения*
*им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 31.05.2011*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **Yu. G. Stoyan, A. M. Chugay**

## Construction of a Ф-function free of radicals for a ball and a non-oriented polytope

*For the analytical description of the relations of inclusion, intersection, and contact for a sphere and a non-oriented polytope, which allows affine translation and rotation transformations, a* Ф*-function free of radicals is constructed. The* Ф*-function can be used for the mathematical modeling of problems of optimal packing of balls and non-oriented polytopes.*