

Академік НАН України **Я. М. Григоренко, О. І. Беспалова,
Г. П. Урсова**

Динамічна стійкість оболонок обертання з гофрованою формою твірної

Пропонується підхід до визначення головної області динамічної нестійкості оболонкових систем обертання загального виду при дії стаціонарного навантаження. Підхід застосовується для дослідження особливостей динамічної стійкості оболонок обертання знакозмінної кривизни у порівнянні з оболонками циліндричної форми. Показано, що на відміну від оболонок сталої кривизни використання оболонок з гофрованою твірною дозволяє значно зменшити область небезпечних параметрів гармонічного навантаження.

Метою даної роботи є дослідження областей динамічної стійкості гофрованих оболонок обертання, що належать до класу об'єктів знакозмінної кривизни. Оболонки такого типу широко розповсюджені в інженерній практиці багатьох галузей техніки та будівництва. Це, наприклад, покриття, перехідні частини механізмів, сільфони, компенсатори різної форми та призначення тощо.

Аналізу напруженого стану, коливань та стійкості гофрованих оболонок при статичних навантаженнях присвячено багато робіт, зокрема [1–5]. Що стосується їх динамічної стійкості при дії періодичних за часом сил, то такі дослідження авторам невідомі.

У даному повідомленні на основі робіт [6, 7] пропонується підхід до визначення головної області динамічної нестійкості оболонкових систем обертання загального виду при стаціонарних навантаженнях. На відміну від традиційного зведення вихідної двовимірної задачі до алгебраїчної проблеми власних значень, в розробленому підході реалізується зведення до відповідної одновимірної задачі за координатою, що змінюється вздовж твірної. Ця особливість дозволяє враховувати характер геометричних та фізико-механічних параметрів системи в континуальному вигляді, що особливо важливо для оболонок знакозмінної кривизни.

На основі розробленого підходу досліджується вплив форми гофрованої оболонки на її головну область динамічної нестійкості.

1. Об'єктом розгляду є система з J спряжених оболонок, що обертаються навколо спільної осі z та віднесені до координат α, θ, γ . Координата α змінюється за твірною-меридіаном, θ є центральним кутом у нормальному до осі обертання перерізі, γ змінюється за товщиною оболонок і відраховується від деякої координатної поверхні $\gamma = 0$. Кожна j -та ($j = \overline{1, J}$) оболонка системи визначена в області $\alpha \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$; $\theta \in [0, 2\pi]$, на границях якої задаються певні граничні умови (при $\alpha = \alpha_0$; $\alpha = \alpha_J$) або умови спряження (при $\alpha = \alpha_j, j = \overline{1, J-1}$). За координатою γ вона може бути одношаровою або складатися з M_j шарів змінної чи сталої товщини, між якими виконуються умови ідеального контакту. Приймається, що матеріали шарів є ортотропними, значно відрізняються за своїми фізико-механічними властивостями та працюють у пружній стадії деформування. Цей клас оболонок обертання описаний в роботах авторів [8–10].

Дана оболонкова система знаходиться в полі осесиметричного стаціонарного навантаження $\overline{P}(\alpha, t) = \overline{P}_0(\alpha) + \overline{P}_t(\alpha) \cos \omega t$, де $\overline{P}_0(\alpha)$ — статична складова навантаження, ω , $\overline{P}_t(\alpha)$ — частота і амплітуда його динамічної частини. Ці складові можуть відрізнятись як за типом навантаження, так і за характером його розподілу за твірною.

Відповідно до діючого навантаження, в оболонках виникає осесиметричний стаціонарний стан вигляду $\overline{Y}^0(\alpha, t) = \overline{N}_0(\alpha) + \overline{N}_t(\alpha) \cos \omega t$, де вектор-функції $\overline{N}_0(\alpha)$ і $\overline{N}_t(\alpha)$ визначаються статичною і динамічною складовими поля, а їх компонентами і компонентами вектор-функції \overline{Y}^0 є деякі статичні і кінематичні характеристики руху. В роботі досліджується стійкість цього основного (вихідного) стану залежно від параметрів навантаження.

Визначення областей динамічної нестійкості (ОДН) основного стану традиційно [6] базується на моделюванні деякого збуреного руху у вигляді $\overline{Y}(\alpha, \theta, t) = \overline{Y}^0(\alpha, t) + \delta\overline{Y}(\alpha, \theta, t)$, що складається з вихідного осесиметричного стану $\overline{Y}^0(\alpha, t)$ і його неосесиметричного збурення $\delta\overline{Y}(\alpha, \theta, t)$.

Збурений стан оболонки описується геометрично-нелінійною теорією середнього згину на основі гіпотез класичної моделі тонких оболонок. Відповідна двовимірна нелінійна задача може бути наведена в такому матрично-векторному вигляді:

рівняння руху

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \alpha} = \mathbf{L}\overline{Y} + \overline{G}(\overline{Y}) + \mathbf{C} \frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2} + \overline{q}(\alpha, t), \quad \alpha \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \quad (j = \overline{1, J}), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (1)$$

умови спряження

$$\mathbf{S}^{j-1}\overline{Y} = \mathbf{S}^j\overline{Y} + \overline{d}_j, \quad \alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1}), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (2)$$

граничні умови

$$\mathbf{R}_j\overline{Y} = \overline{r}_j(t), \quad \alpha = \alpha_j \quad (j = 0; J), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3)$$

(за координатою θ приймаються умови періодичності).

Тут $\overline{Y} = \{y_i(\alpha, \theta, t)\} = \{T_\alpha, \widehat{S}, \widehat{Q}_\alpha, M_\alpha, u, v, w, \vartheta_\alpha\}$ ($i = \overline{1, 8}$) — невідома вектор-функція, компоненти якої мають такий зміст: $T_\alpha, \widehat{S}, \widehat{Q}_\alpha$ — поздовжнє, узагальнені зсувне і перерізує зусилля в перетині $\alpha = \text{const}$; $M_\alpha, \vartheta_\alpha$ — згинаючий момент і кут повороту нормалі в цьому ж перетині; u, v, w — переміщення точок координатної поверхні вздовж осей α, θ, γ , відповідно; \mathbf{L} — матричний лінійний диференціальний оператор четвертого порядку за змінною θ ; $\overline{G} = \{g_k\}$ ($k = \overline{1, 8}$) — нелінійна вектор-функція; \mathbf{C} — матриця розподілу густини матеріалу; \mathbf{R}_j і $\mathbf{S}^{j-1}, \mathbf{S}^j$ — матричні оператори граничних умов ($j = 0; J$) і умов спряження в перетинах $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$); $\overline{r}_j(t) = \overline{r}_{j0} + \overline{r}_{jt} \cos \omega t$, $\overline{d}_j(t) = \overline{d}_{j0} + \overline{d}_{jt} \cos \omega t$, $\overline{q}(\alpha, t) = \overline{q}_0(\alpha) + \overline{q}_t \cos \omega t$ — вектор-функції, якими задаються контурні при $\alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_J$, зосереджені в перетинах $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$) та розподілені за твірною навантаження, відповідно. Зауважимо, що оператори $\mathbf{S}^{j-1}, \mathbf{S}^j$ є одиничними матрицями, якщо твірна оболонка є гладкою кривою і її жорсткісні характеристики неперервні.

Збурення $\delta\overline{Y}(\alpha, \theta, t)$ приймаються малими відносно основного стану $\overline{Y}^0(\alpha, t)$ і це дає змогу наближено розділити задачу (1)–(3) на дві задачі: нелінійну відносно основного стану $\overline{Y}^0(\alpha, t)$ і однорідну лінеаризовану відносно збурення $\delta\overline{Y}(\alpha, \theta, t)$. При цьому в коефіцієнти лінеаризованої задачі у вигляді параметричних членів входять компоненти основного руху, що є періодичними функціями часу. Аналіз розв'язку цієї задачі $\delta\overline{Y}(\alpha, \theta, t)$ дозволяє

зробити висновок про стійкість (нестійкість) основного руху $\bar{Y}^0(\alpha, t)$. Якщо цей розв'язок є періодичною функцією, то основний стан є стійким, інакше — нестійким.

Таким чином, побудова ОДН зводиться до знаходження умов існування періодичних розв'язків лінеаризованої задачі з періодом $T = 2\pi/\omega$ і $2T$. Відомо також [6, 7], що ОДН знаходяться біля критичних частот навантаження ω_* , пов'язаних з власними частотами конструкції Ω співвідношенням $\omega_* = 2\Omega/l$ ($l = 1, 2, 3, \dots$). Номери $l = 1, 2, 3, \dots$ визначають першу (головну), другу, третю і т. д. ОДН.

Для знаходження періодичного розв'язку лінеаризованої задачі в околі критичної частоти $\omega_* = 2\Omega$ (побудова головної ОДН) наведемо його у вигляді відрізка ряду Фур'є за часом t і за тригонометричними функціями колової координати

$$\delta\bar{Y}(\alpha, \theta, t) \cong \sum_{k=0,1,2,\dots} \left[\bar{N}'_k(\alpha) \begin{Bmatrix} c \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{Bmatrix} \sin \frac{\omega t}{2} + \bar{N}''_k(\alpha) \begin{Bmatrix} c \sin k\theta \\ \cos k\theta \end{Bmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} \right] \quad (4)$$

(вирази у фігурних дужках означають, що компоненти \hat{S} і v вектор-функції $\delta\bar{Y}(\alpha, \theta, t)$ розкладені за $\sin k\theta$, а інші — за $\cos k\theta$).

Лінеаризована задача з урахуванням (4) і деяких перетворень зводиться для кожного номера колової гармоніки k до двох однорідних одновимірних задач за змінною α відносно вектор-функцій $\bar{N}'_k(\alpha)$ і $\bar{N}''_k(\alpha)$

$$\frac{d\bar{N}'_k}{d\alpha} = \left[\mathbf{L} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}^0} \left(\bar{\mathbf{N}}_0 - \frac{\bar{\mathbf{N}}_t}{2} \right) - \frac{\omega^2}{4} \mathbf{C} \right] \bar{\mathbf{N}}'_k, \quad \alpha \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \quad (\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{J}}); \quad (5)$$

$$\mathbf{S}^{j-1} \bar{\mathbf{N}}'_k = \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{N}}'_k, \quad \alpha = \alpha_j \quad (\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{J}-1}); \quad (6)$$

$$\mathbf{R}_j \bar{\mathbf{N}}'_k = \mathbf{0}, \quad \alpha = \alpha_j \quad (\mathbf{j} = \mathbf{0}; \mathbf{J}) \quad (7)$$

і

$$\frac{d\bar{N}''_k}{d\alpha} = \left[\mathbf{L} + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}^0} \left(\bar{\mathbf{N}}_0 + \frac{\bar{\mathbf{N}}_t}{2} \right) - \frac{\omega^2}{4} \mathbf{C} \right] \bar{\mathbf{N}}''_k, \quad \alpha \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \quad (\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{J}}); \quad (8)$$

$$\mathbf{S}^{j-1} \bar{\mathbf{N}}''_k = \mathbf{S}^j \bar{\mathbf{N}}''_k, \quad \alpha = \alpha_j \quad (\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{J}-1}); \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_j \bar{\mathbf{N}}''_k = \mathbf{0}, \quad \alpha = \alpha_j \quad (\mathbf{j} = \mathbf{0}; \mathbf{J}). \quad (10)$$

Область існування власних частот в задачах (5)–(7), (8)–(10) залежно від параметрів навантаження $\bar{P}_0(\alpha)$, $\bar{P}_t(\alpha)$ наближено визначає головну ОДН вихідного осесиметричного руху $\bar{Y}^0(\alpha, t)$ оболонкової системи. Для розв'язання цих задач застосовується метод послідовних наближень у варіанті оберненої ітерації [11], який зводить однорідну задачу з невідомим числовим параметром до послідовності неоднорідних крайових задач. Одержані одновимірні лінійні задачі зі змінними коефіцієнтами розв'язуються чисельно методом дискретної ортогоналізації [8–10].

2. У відповідності з метою даної роботи описаний підхід застосовується для аналізу впливу знакозмінної кривизни оболонки на її головну ОДН. Дослідження проводяться на основі порівняння результатів, одержаних для гофрованої та циліндричної оболонок.

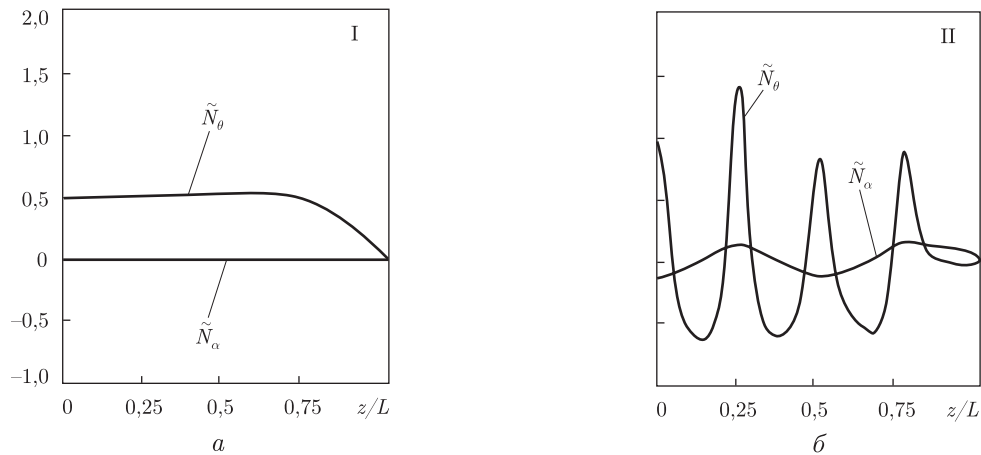


Рис. 1. Розподіл меридіональних \tilde{N}_α та колових \tilde{N}_θ зусиль за твірною циліндричної (а) та гофрованої (б) оболонки

Твірна гофрованої оболонки є плоскою синусоїдальною кривою з амплітудою a і періодом l , координатна вісь якої знаходиться на відстані R від осі обертання z . Радіус паралельного круга r і кривизна меридіана k_α як функції z задаються у вигляді

$$r(z) = R + \alpha \cos \frac{\pi z}{l}, \quad k_\alpha(z) = \frac{\frac{d^2 r}{dz^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)^3}}, \quad z \in [-L, L]$$

($2L$ — довжина оболонки вздовж осі z).

При $a = 0$ маємо циліндричну оболонку радіусом R .

Приймається, що обидві оболонки ізотропні, мають сталу товщину h , вільно оперті на торцях та знаходяться під дією гармонічного рівномірно розподіленого нормального тиску $q_n(\alpha, t) = q_0 \cos \omega t$.

Для знаходження ОДН оболонки попередньо визначаються їх напружено-деформований стан, критичні значення заданого статичного навантаження та нижчі частоти вільних коливань.

Розрахунки проводяться при таких значеннях геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик: $h/R = 0,05$; $2L/R = 2$; $a/R = 0,16$; $2L/l = 4$; $R = 500l_0$; $E = E_0$; $\nu = 0,3$; $\rho = \rho_0$ (l_0 — характерний лінійний розмір, E — модуль пружності, ν — коефіцієнт Пуассона, ρ — густина матеріалу).

Результати дослідження напруженого стану у вигляді розподілу меридіональних $\tilde{N}_\alpha = N_\alpha E_0 10^{-3}/q_0$ і колових $\tilde{N}_\theta = N_\theta E_0 10^{-3}/q_0$ зусиль вздовж твірної оболонки наведені на рис. 1. Для циліндричної оболонки (I) меридіональні зусилля відсутні, а колові розподілені практично рівномірно. Для оболонки гофрованого типу (II) спостерігається чергування зон стиску і розтягу як для колових, так і для меридіональних зусиль, при цьому колові зусилля значно перевищують меридіональні.

Інтегральні значення одержаних стискуючих N^- і розтягуючих N^+ зусиль зумовлюють критичні величини статичного навантаження $q_{кр}$ $\left(N^- = \int_{-L}^L (N_\alpha(\alpha) + N_\theta(\alpha)) d\alpha\right)$, якщо

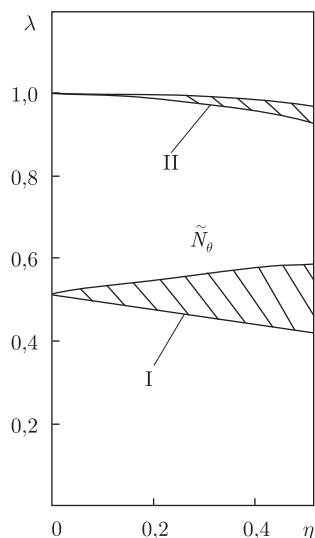


Рис. 2. Головні області динамічної нестійкості для циліндричної (I) та гофрованої (II) оболонок

$$N_{\alpha}(\alpha) < 0 \text{ і } N_{\theta}(\alpha) < 0; N^{+} = \int_{-L}^L (N_{\alpha}(\alpha) + N_{\theta}(\alpha)) d\alpha, \text{ якщо } N_{\alpha}(\alpha) > 0 \text{ і } N_{\theta}(\alpha) > 0).$$

Процентний вміст цих величин у сумарному значенні зусиль $N = N^{+} +$ і критичні значення статичних навантажень при внутрішньому ($q_0 > 0$) і зовнішньому ($q_0 < 0$) тиску наведено в табл. 1 ($d = Eh^2/2LR\sqrt{h/R}$).

У циліндричній оболонці втрата статичної стійкості має місце тільки при стискуючому навантаженні, що і підтверджується даними табл. 1. Оболонка гофрованої структури може втрачати стійкість при різних знаках навантаження, оскільки в ній мають місце зони розтягу і стиску. Значення $q_{кр}$ при внутрішньому $q_0 > 0$ і зовнішньому $q_0 < 0$ нормальному тиску практично однакові і на порядок вищі порівняно з циліндричною оболонкою при $q_0 < 0$. Зазначимо, що для циліндричної оболонки критичне значення навантаження $q_{кр}$ ($0,941d$) добре узгоджується ($0,92d$) з даними роботи [12].

Головні ОДН для циліндричної і гофрованої оболонок в осях $\lambda = \omega(\eta)/\omega_{II}(0)$ і $\eta = q_0/q_{кр} \in [0; 0,5]$ наведені на рис. 2 ($\omega_{II}(0)$ — власна частота оболонки з гофрованою поверхнею). З рисунку видно, що ОДН для оболонки синусоїдального профілю розміщена вище за частотною віссю і значно вужча, ніж для циліндричної оболонки.

Проведені дослідження дають підставу виявити особливості ОДН оболонки з гофрованою твірною у порівнянні з циліндричною оболонкою. Насамперед, напружений стан оболонки знакозмінної кривизни характеризується наявністю зон стиску та розтягу, що приводить, на відміну від циліндричної оболонки, до втрати статичної стійкості як при зовнішньому, так і при внутрішньому нормальному тиску. Синусоїдальна форма розглянутої оболонки при гармонічному навантаженні значно впливає на розмір головної ОДН.

Таблиця 1

Оболонка	$\frac{N^-}{q_0}$	$\frac{N^-}{N}, \%$	$\frac{N^+}{q_0}$	$\frac{N^+}{N}, \%$	$q_{кр}, q_0 > 0$	$q_{кр}, q_0 < 0$
I	0	0	$0,3677 \cdot 10^5$	100	нема	$0,941d$
II	$0,2082 \cdot 10^5$	52,7	$0,1858 \cdot 10^5$	47,3	$0,128 \cdot 10^2 d$	$0,138 \cdot 10^2 d$

3. Розроблено підхід до визначення головної області динамічної нестійкості оболонкових систем обертання загального виду при дії стаціонарного навантаження. Підхід застосовується для дослідження особливостей динамічної стійкості оболонок обертання знакозмінної кривизни у порівнянні з оболонками циліндричної форми. Показано, що на відміну від оболонок сталої кривизни використання оболонок з гофрованою твірною дозволяє значно зменшити область небезпечних параметрів гармонійного навантаження.

1. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Zakhariichenko L. I. Influence of geometrical parameters on the stress state of longitudinally corrugated elliptic cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No 2. – P. 187–192.
2. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders // *Ibid.* – 2010. – **46**, No 3. – P. 255–263.
3. Bepalova E. I. On free vibrations of laminate cylindrical shells of arbitrary open profile // *Prikl. Mekh.* – 1980. – **16**, No 11. – P. 972–975.
4. Semenyuk N. P., Zhukova N. B., Ostapchuk V. V. Stability of corrugated composite noncircular cylindrical shells under external pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No 12. – P. 1380–1389.
5. Бабич И. Ю., Жукова Н. Б., Семенюк Н. П., Трач В. М. Устойчивость гофрированных по окружности оболочек при гидростатическом давлении // *Прикл. механика.* – 2010. – **46**, № 9. – С. 40–49.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
7. Василенко А. Т., Черинько П. Н. Параметрические колебания оболочек вращения из композиционных материалов // *Механика композитов.* Т. 9. Динамика элементов конструкций, Киев: А. С. К, 1999. – С. 26–43.
8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости // *Методы расчета оболочек.* В 5 т. – Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
9. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
10. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
11. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – Москва: Наука, 1968. – 503 с.
12. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 14.12.2010

Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Grigorenko, E. I. Bepalova,
G. P. Urusova**

Dynamical stability of shells of revolution with corrugated generatrix

An approach is proposed to define the principal domain of dynamical instability of shell systems of revolution with general form under stationary loading. The approach is used to study features of dynamical stability of shells of revolution with alternating curvature in comparison with those of cylindrical shells. It is demonstrated that the use of shells with corrugated generatrix, unlike shells with constant thickness, makes it possible to considerably decrease the domain of unsafe parameters of a harmonic loading.