УДК 514.764.27

© 2011

Е. В. Петров

Гармоничность грассманова отображения подмногообразий в группе Гейзенберга

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Отримано критерій гармонічності грассманового відображення підмноговиду в групі Гейзенберга. Розглянуті приклади, що демонструють зв'язок між гармонійністю цього відображення і властивостями векторного поля середньої кривини. Введено природний клас циліндричних підмноговидів. Доведено, що гіперповерхня постійної середньої кривини з гармонічним гауссовим відображенням є циліндричною.

1. Предварительные сведения. Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$, $M \to N$ — его погружение в $(n+q)$-мерную группу Ли N с левоинвариантной метрикой. Пусть Φ — грассманово (гауссово в случае гиперповерхности) отображение подмногообразия M, определяемое переносом в T_eN (т. е. в алгебру Ли $\mathcal{N}$ группы N) касательного пространства в соответствующей точке M дифференциалом левого сдвига:

$$\Phi\colon M \to G(n,q); \qquad \Phi(p) = dL_{p^{-1}}(T_pM). \tag{1}$$

Тут $G(n,q)$ — грассманиан n-мерных векторных подпространств $(n+q)$-мерного векторного пространства, точка p отождествляется с ее образом при погружении. Через L_g здесь и далее обозначаем левый сдвиг на элемент $g \in M$, через dF — дифференциал отображения F. Это отображение является обобщением классического грассманова (гауссова) отображения подмногообразия в евклидовом пространстве.

Если (M_1, g_1), (M_2, g_2) — гладкие римановы многообразия, то для отображения $\phi \in C^\infty(M_1, M_2)$ энергией ϕ называется интеграл

$$E(\phi) = \frac{1}{2}\int\limits_{M_1} \sum_{1\leqslant i\leqslant m} g_2(d\phi(E_i), d\phi(E_i))\, dV_M,$$

где m — размерность M_1, $E_1, \ldots, E_m$ — ортонормированный базис касательного к M_1 пространства, dV_M — форма объема метрики g_1. Критические точки функционала $\phi \mapsto E(\phi)$ называются гармоническими отображениями из M_1 в M_2 (подробнее см. [1]).

В [2] было доказано, что грассманово (гауссово в случае гиперповерхности) отображение подмногообразия евклидова пространства гармонично тогда и только тогда, когда векторное поле средней кривизны подмногообразия параллельно. В [3] доказано, что гауссово отображение гиперповерхности в группе Ли с биинвариантной метрикой гармонично тогда и только тогда, когда гиперповерхность имеет постоянную среднюю кривизну. В [4] был получен критерий гармоничности грассманова отображения подмногообразия произвольной группы Ли в терминах второй фундаментальной формы подмногообразия и левоинвариантной связности на группе. В [5] были получены критерии гармоничности гауссова отображения для гиперповерхностей в нильпотентных группах Ли ступени 2. В частности, было установлено, что, в отличие от групп с биинвариантной метрикой, сохранение средней кривизны не эквивалентно гармоничности этого отображения.

Пусть N — $(2m+1)$-мерная группа Гейзенберга (см., например, [6]). Такие группы составляют простейший класс неабелевых нильпотентных групп Ли ступени 2. Группа N представляет собой пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$ с глобальными координатами $x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m, z$ и базисом левоинвариантных векторных полей

$$\begin{aligned} &K_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \ldots, \qquad K_m = \frac{\partial}{\partial x^m}, \\ &L_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \ldots, \qquad L_m = \frac{\partial}{\partial y^m} + x^m \frac{\partial}{\partial z}, \\ &Z = \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{2}$$

элементы которого связаны структурными соотношениями

$$[K_i, L_j] = \delta_{ij} Z, \qquad [K_i, K_j] = [L_i, L_j] = [K_i, Z] = [L_i, Z] = 0 \tag{3}$$

для $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Отметим, что центр $\mathcal{Z}$ данной алгебры Ли — одномерное векторное подпространство, порожденное Z. Зададим левоинвариантную метрику на N так, что базис (2) будет ортонормированным. Обозначим через $\mathcal{V}$ ортогональное дополнение к Z. Из (3) следует, что $0 \neq [\mathcal{V}, \mathcal{V}] \subset \mathcal{Z}$. Для любого $Z^* \in \mathcal{Z}$ на $\mathcal{V}$ можно определить линейный оператор $J(Z^*)$ с помощью соотношения $\langle J(Z^*)X, Y\rangle = \langle [X, Y], Z^*\rangle$. Заметим, что $J(Z)^2 = -\operatorname{Id}$.

2. Критерий гармоничности грассманова отображения. Пусть N — $(2m+1)$-мерная группа Гейзенберга. Рассмотрим погруженное в N подмногообразие M. Пусть p — некоторая точка M, $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+q}$ — ортонормированные базисы касательного пространства $T_pM \subset T_pN$ и нормального пространства $N_pM \subset T_pN$ соответственно, выбранные следующим образом:

$$\begin{aligned} &Y_a = X_a, \qquad 1 \leqslant a \leqslant n-1, \qquad n+2 \leqslant a \leqslant n+q, \\ &Y_n = X_n - |X_{n+1}| Z, \qquad Y_{n+1} = X_{n+1} + |X_n| Z, \end{aligned} \tag{4}$$

где $n + q = 2m + 1$, $X_1, \ldots, X_{n-1}$, $X_{n+2}, \ldots, X_{n+q}$ — ортонормированная система векторов в $\mathcal{V}$, $X_n \in \mathcal{V}$ и $X_{n+1} \in \mathcal{V}$ ортогональны к $X_1, \ldots, X_{n-1}$, $X_{n+2}, \ldots, X_{n+q}$, $X_{n+1} = \lambda X_n$ $(\lambda \geqslant 0)$, $|X_n|^2 + |X_{n+1}|^2 = 1$. Обозначим через Y_i, X_i, Z как векторы касательного пространства T_pN, так и соответствующие им элементы алгебры Ли $\mathcal{N}$ группы N. Через $(\cdot)^T$ и $(\cdot)^\perp$ обозначим проектирование на касательное и нормальное расслоения подмногообразия соответственно. Скалярное произведение, индуцированное метрикой N на касательных пространствах (в том числе на алгебре Ли этой группы), обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, риманову связность этой метрики и векторное поле средней кривизны погружения — через ∇ и H соответственно. Для $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $n+1 \leqslant \alpha \leqslant n+q$ обозначим через b_{ij}^α коэффициенты второй фундаментальной формы B подмногообразия M в точке p относительно введенного базиса.

Предложение 1. *Грассманово отображение гладкого вложенного подмногообразия M в группе Гейзенберга N с выбранной указанным способом левоинвариантной метри-*

кой гармонично в точке p тогда и только тогда, когда во введенных выше обозначениях

$$\langle [nH, Y_j], Y_\alpha\rangle - \left(|X_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}\right)\langle (J(Z)X_j)^T, (J(Z)X_\alpha)^T\rangle -$$
$$- |X_{n+1}|^2\langle J(Z)X_j, X_n\rangle\langle J(Z)X_\alpha, X_n\rangle + 2|X_{n+1}| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^\alpha_{in}\langle J(Z)X_i, X_j\rangle -$$
$$- |X_n| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^{n+1}_{ij}\langle J(Z)X_i, X_\alpha\rangle + |X_{n+1}| \sum_{n+1\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{nj}\langle J(Z)X_\gamma, X_\alpha\rangle = 0 \qquad (5)$$

для $1 \leqslant j \leqslant n-1$ *и* $n+2 \leqslant \alpha \leqslant n+q$;

$$\langle [nH, Y_n], Y_\alpha\rangle - \left(|X_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}\right)\langle (J(Z)X_n)^T, (J(Z)X_\alpha)^T\rangle +$$
$$+ 2|X_{n+1}| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^\alpha_{in}\langle J(Z)X_i, X_n\rangle - |X_n| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^{n+1}_{in}\langle J(Z)X_i, X_\alpha\rangle +$$
$$+ |X_{n+1}| \sum_{n+1\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{nn}\langle J(Z)X_\gamma, X_\alpha\rangle = 0 \qquad (6)$$

для $n+2 \leqslant \alpha \leqslant n+q$;

$$\langle [nH, Y_j], Y_{n+1}\rangle - \left(|X_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}\right)\langle (J(Z)X_j)^T, (J(Z)X_{n+1})^T\rangle +$$
$$+ 2|X_{n+1}| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^{n+1}_{in}\langle J(Z)X_i, X_j\rangle + |X_n| \sum_{1\leqslant i\leqslant n, n+2\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{ij}\langle J(Z)X_i, X_\gamma\rangle +$$
$$+ |X_{n+1}| \sum_{n+2\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{nj}\langle J(Z)X_\gamma, X_{n+1}\rangle = 0 \qquad (7)$$

для $1 \leqslant j \leqslant n-1$; *и*

$$\langle [nH, Y_n], Y_{n+1}\rangle - \left(|X_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}\right)\langle (J(Z)X_n)^T, (J(Z)X_{n+1})^T\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2}|X_{n+1}||X_n|\left(2|X_{n+1}|^2 - n + 1 + \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} |[X_i, X_k]|^2\right) +$$
$$+ 2|X_{n+1}| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b^{n+1}_{in}\langle J(Z)X_i, X_n\rangle + |X_n| \sum_{1\leqslant i\leqslant n, n+2\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{in}\langle J(Z)X_i, X_\gamma\rangle +$$
$$+ |X_{n+1}| \sum_{n+2\leqslant \gamma\leqslant n+q} b^\gamma_{nn}\langle J(Z)X_\gamma, X_{n+1}\rangle = 0. \qquad (8)$$

Доказательство предложения основано на применении критерия из [4] к базису (4).

Рассмотрим пример. Пусть $1 \leqslant l \leqslant k \leqslant m$, $l + k = n$, $2 \leqslant n \leqslant 2m$. Рассмотрим n-мерное горизонтальное распределение F в N, порожденное векторными полями $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$,

$\partial/\partial y^1, \ldots, \partial/\partial y^l$. Оно, очевидно, интегрируемо, т. е. порождает некоторое слоение $\mathcal{F}$. Следующее утверждение является следствием предложения 1.

Предложение 2. *Каждый лист $\mathcal{F}$ минимален. При этом существуют листы с негармоническим грассмановым отображением.*

В частности, мы получили пример подмногообразия с параллельным вектором средней кривизны (и даже минимального) в N, грассманово отображение которого не является гармоническим.

3. Цилиндрические подмногообразия. Будем называть подмногообразие M цилиндрическим, если в касательном пространстве каждой его точки присутствует значение в этой точке векторного поля Z. Интегральные траектории поля Z имеют вид $z = t$, поэтому если M полно, то $M = M_1 \times \mathbb{R}$, где M_1 — гладкое подмногообразие в подпространстве $z = 0$. Рассмотрим на этом $(2m)$-мерном подпространстве естественную евклидову метрику с ортонормированным базисом, состоящим из полей $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial y^j$ для $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Для таких подмногообразий из условий предложения 1 следует:

Предложение 3. *Пусть M — цилиндрическое. Тогда векторное поле H средней кривизны M параллельно тогда и только тогда, когда грассманово отображение M гармонично и $(J(Z)H)^{\perp} = 0$.*

Здесь под $J(Z)H$ понимается действие соответствующим оператором на вектор, представляющий поле H, в каждой точке (этот вектор нормальный, следовательно, ортогонален значению Z в точке). В частности, из параллельности H будет следовать гармоничность грассманова отображения. Как следует из предложения 2, эта импликация, вообще говоря, неверна для подмногообразий в группе Гейзенберга.

Предложение 4. *Пусть $M = M_1 \times \mathbb{R}$ — полное цилиндрическое подмногообразие. Тогда:*

1) M минимально в N тогда и только тогда, когда M_1 минимально в E^{2m};

2) векторное поле H средней кривизны M параллельно тогда и только тогда, когда векторное поле H_1 средней кривизны M_1 как подмногообразия евклидова пространства E^{2m} параллельно и выполняется условие $(J(Z)H)^{\perp} = 0$;

3) грассманово отображение M гармонично тогда и только тогда, когда H_1 параллельно.

Заметим, что из пункта *3* предложения 4 и результата работы [2] следует, что грассманово отображение M гармонично тогда и только тогда, когда грассманово отображение M_1 (как подмногообразия в E^{2m}) гармонично.

4. Случай гиперповерхности. Пусть M — гиперповерхность ($n = 2m$, $q = 1$). Поскольку $\langle J(Z)H, H\rangle = 0$ в силу определения $J(Z)$ и нормальное пространство одномерно, в этом случае в каждой точке либо $H = 0$ (и тогда $J(Z)H = 0$), либо вектор $J(Z)H$ является касательным, поэтому из предложений 3 и 4, а также из замечания в конце п. 3 следует:

Следствие 1. *Пусть M — цилиндрическая гиперповерхность. Тогда гауссово отображение M гармонично тогда и только тогда, когда M имеет постоянную среднюю кривизну.*

Следствие 2. *Пусть $M = M_1 \times \mathbb{R}$ — полная цилиндрическая гиперповерхность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) гауссово отображение M гармонично;

2) M имеет постоянную среднюю кривизну;

3) гауссово отображение M_1 как гиперповерхности в E^{2m} гармонично;

4) M_1 имеет постоянную среднюю кривизну в E^{2m}.

Справедлив также следующий результат:

Теорема 1. *Пусть M — гиперповерхность постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга, гауссово отображение которой гармонично. Тогда M является цилиндрической.*

Доказательство теоремы основано на изучении уравнений Гаусса и Кодацци гиперповерхности.

Впервые утверждение теоремы 1 было доказано для частного случая трехмерной группы Гейзенберга в [5]. Аналогичный трехмерный результат для другого определения гауссова отображения (не совпадающего с гауссовым отображением поверхности в трехмерной группе Ли) получен в [7]. Из следствия 1 и теоремы 1 следует, что для трех естественных свойств — сохранения средней кривизны гиперповерхности, гармоничности ее гауссова отображения и цилиндричности — выполнение любых двух из них влечет за собой выполнение третьего.

Из теоремы 1 и следствия 2 также следует, что полная гиперповерхность постоянной средней кривизны с гармоническим гауссовым отображением представляет собой прямое произведение гиперповерхности постоянной средней кривизны в E^{2m} на вертикальную прямую. В частности, полные поверхности постоянной средней кривизны с гармоническим гауссовым отображением в трехмерной группе Гейзенберга представляют собой вертикальные евклидовы плоскости и прямые вертикальные евклидовы цилиндры.

1. *Eells J. J., Sampson H.* Harmonic mappings of Riemannian manifolds // Amer. J. Math. – 1964. – **86**, No 1. – P. 109–160.
2. *Ruh E. A., Vilms J.* The tension field of the Gauss map // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – **149**. – P. 569–573.
3. *do Espirito-Santo N., Fornari S., Frensel K., Ripoll J.* Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric // Manuscr. Math. – 2003. – **111**. – P. 459–470.
4. *Petrov Ye. V.* Submanifolds with the harmonic Gauss map in Lie groups // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2008. – **4**, No 2. – P. 278–293.
5. *Petrov Ye. V.* The Gauss map of hypersurfaces in 2-step nilpotent Lie groups // Ibid. – 2006. – **2**, No 2. – P. 186–206.
6. *Eberlein P. B.* Geometry of 2-step nilpotent groups with a left-invariant metric // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1994. – **27**. – P. 611–660.
7. *Sanini A.* Gauss map of a surface of the Heisenberg group // Boll. Unione Mat. Ital. – 1997. – **11-B(7)**, Suppl. Fasc. 2. – P. 79–93.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 20.12.2010

E. V. Petrov

Gauss map of submanifolds in the Heisenberg group

We obtain criteria for the harmonicity of the Gauss map of a submanifold in the Heisenberg group and consider the examples demonstrating the connection between the harmonicity of this map and the properties of the mean curvature field. We introduce a natural class of cylindrical submanifolds and prove that a constant mean curvature hypersurface with harmonic Gauss map is cylindrical.