УДК 517.96

О. В. Мартинюк

Багатоточкова задача для одного класу диференціально-операторних рівнянь

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Встановлено коректну розв'язність m-точкової задачі для еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами, спектри яких суто дискретні, з крайовими умовами в просторах формальних рядів Фур'є.

Задачі з нелокальними багатоточковими умовами виникають у теорії фізики плазми та ядерних реакцій, математичній біології, теорії періодичних хвилеводів, теорії вологопереносу, при дослідженні коливань різних систем, поширень електромагнітних хвиль, при довгостроковому прогнозуванні погоди, демографічних дослідженнях тощо. Нелокальні задачі для диференціально-операторних рівнянь у різних аспектах вивчали О. О. Дезін, В. К. Романко, М. Юнусов, В. І. Чесалін, М. І. Юрчук, В. М. Борок та ін., виділяючи в основному випадки коректно поставлених задач. Для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними та сингулярними операторами такі задачі досліджували Б. Й. Пташник, М. І. Матійчук, Я. М. Дрінь, В. В. Городецький, Л. І. Корбут та ін.

У даній роботі розвивається теорія нелокальних задач для еволюційних рівнянь з невід'ємними самоспряженими операторами, спектри яких суто дискретні, з крайовими умовами в просторах лінійних неперервних функціоналів нескінченного порядку, що ототожнюються з формальними рядами Фур'є.

1. Простори основних та узагальнених елементів. Формальні ряди Фур'є. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k \geqslant 1\}$ — ортонормований базис в H,

$$\Phi_m = \left\{\varphi \in H : \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_{k,\varphi} e_k,\ c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\right\}, \qquad \Phi = \lim_{m\to\infty} \operatorname{ind} \Phi_m.$$

Очевидно, що Φ лежить щільно в H. Символом Φ' позначатимемо простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$H \ni \varphi \longrightarrow f_\varphi \in \Phi' : \quad \langle f_\varphi, \psi\rangle = (\varphi, \psi), \qquad \forall\, \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$. Елементи з простору Φ' називатимемо узагальненими.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k = \langle f, e_k\rangle$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k — його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f [1]. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента

$f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Звідси випливає, що Φ лежить щільно в Φ'.

Нехай G: $[0,\infty) \to [c,+\infty)$, $c > 0$, — неперервна, монотонно зростаюча функція така, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} G^{-2}(k) < +\infty$. За функцією G у просторі Φ' побудуємо оператор

$$\widehat{A}\colon \Phi' \ni f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} G(k) c_k(f) e_k = \widehat{A} f \in \Phi',$$

який є лінійним і неперервним в Φ'. Якщо A — звуження оператора $\widehat{A}$ на H, то A — невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $\Phi \subset \subset \mathcal{D}(A)$. Спектр оператора A суто дискретний з єдиною граничною точкою у нескінченності: $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \geqslant 1\}$, де $\lambda_k := G(k)$, $k \in \mathbb{N}$ (див. [1]).

Введемо деякі класи нескінченно диференційовних елементів оператора A [1]. Для цього розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка має властивості:

1) $\forall \gamma > 0\ \exists c_\gamma > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geqslant c_\gamma \cdot \gamma^n$;

2) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leqslant M h^n m_n$. Позначимо $H_\infty(A) = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{pr} H_\alpha(A)$, $H_\alpha(A) = \mathcal{D}(A^\alpha)$,

$$(\varphi,\psi)_{H_\alpha} = (\varphi,\psi) + (A^\alpha \varphi, A^\alpha \psi), \qquad \forall \{\varphi,\psi\} \subset \mathcal{D}(A^\alpha),$$

$$H_\alpha\langle m_n\rangle := \{\varphi \in H_\infty(A) \mid \exists c > 0\colon \|A^n \varphi\| \leqslant c\alpha^n m_n\}, \qquad \alpha > 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Простір $H_\alpha\langle m_n\rangle \supset \Phi$ є банаховим відносно норми $\|\varphi\|_{H_\alpha\langle m_n\rangle} = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} (\|A^n\varphi\|/(\alpha^n m_n))$. Покладемо $H_\infty\langle m_n\rangle\colon = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{ind} H_\alpha\langle m_n\rangle$. Тоді $\Phi \subset H_\infty\langle m_n\rangle \subset H_\infty(A) \subset H$, причому всі вкладення є щільними і неперервними. Якщо через $H'_\infty(A)$, $H'_\alpha\langle m_n\rangle$ позначити простори антилінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю над $H_\infty(A)$, $H_\alpha\langle m_n\rangle$ відповідно, то, згідно з [1], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень $H \subset H'_\infty(A) \subset H'_\infty\langle m_n\rangle \subset \Phi'$; при цьому $H'_\infty\langle m_n\rangle = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{pr} H'_\alpha\langle m_n\rangle$.

Простори $G_{\{\beta\}}(A) := H_\infty\langle n^{n\beta}\rangle$, $\beta > 0$, називаються просторами Жевре порядку β, породженими оператором A; $G_{\{1\}}(A)$ збігається з множиною аналітичних векторів оператора A [1].

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H_\infty\langle m_n\rangle$ та $H'_\infty\langle m_n\rangle$ описуються так [1]:

$$(f \in H_\infty\langle m_n\rangle) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\ \exists c > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\colon |c_k(f)| \leqslant c\rho^{-1}(\mu\lambda_k)); \tag{A}$$

$$(f \in H'_\infty\langle m_n\rangle) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\colon |c_k(f)| \leqslant c\rho(\mu\lambda_k)); \tag{B}$$

тут $\lambda_k = G(k)$, $\rho(\lambda) = 1$, якщо $\lambda \in [0,1)$ і $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} (\lambda^n/m_n)$, якщо $\lambda \in [1,\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає [1], що функція ρ неперервна на $[0,+\infty)$ і монотонно зростає (швидше, ніж λ^n, $\forall n \in \mathbb{N}$) на $[1,+\infty)$.

Якщо $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp\{\lambda^{1/\beta}\}$, $\lambda \in [1, +\infty)$, тобто в цьому випадку для $f \in \Phi'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists\, \mu > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}\colon |c_k(f)| \leqslant c \exp\{-\mu\lambda_k^{1/\beta}\});$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall\, \mu > 0\ \exists\, c = c(\mu) > 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}\colon |c_k(f)| \leqslant c \exp\{\mu\lambda_k^{1/\beta}\}).$$

Припустимо, що послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє ще одну умову:
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n}/n = 0$, тобто [2]

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, \lambda\colon \quad \lambda \geqslant \max\{1, \delta\} \Rightarrow \rho(\lambda) > e^{\varepsilon\lambda}.$$

У праці [3] доведено, що в цьому випадку функція ρ є диференційовною на $[0, +\infty)$, а функція $\ln\rho$ — опуклою на $[1, +\infty)$, тобто

$$\forall\, \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset [1, +\infty)\colon\ \ln\rho(\lambda_1) + \ln\rho(\lambda_2) \leqslant \ln\rho(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Якщо $m_n = n^{n\beta}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де $\beta \in (0, 1)$, то, очевидно, послідовність $\{n^{n\beta}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову 3. В [3] встановлено, що послідовність $\{n!\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\rho_n = \inf\limits_{\lambda\geqslant 1}(\rho(\lambda)/\lambda^n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, також задовольняє умови 1–3. Зауважимо, що якщо $\rho(\lambda) \sim \exp\{\lambda^{1/(1-\beta)}\}$, $\beta \in (0, 1)$, то $\rho_n \sim n^{-n(1-\beta)}$, а $m_n = n!\rho_n \sim n^{n\beta}$.

2. Згортка в просторі Φ'. Невід'ємні самоспряжені оператори як оператори згортки. Нехай

$$\{f_1, f_2\} \subset \Phi', \qquad f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)e_k, \qquad f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_2)e_k.$$

У просторі Φ' визначимо операцію "$*$" за правилом

$$f_1 * f_2 := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)c_k(f_2)e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2)e_k,$$

тобто $f_1 * f_2$ — узагальнений елемент з простору Φ', коефіцієнти Фур'є якого пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених елементів f_1, f_2 співвідношенням $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1) \cdot c_k(f_2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо $\{f_1, f_2\} \subset H'_\infty\langle m_n\rangle$, то $f_1 * f_2 \in H'_\infty\langle m_n\rangle$. Для доведення цієї властивості досить переконатися в тому, що коефіцієнти Фур'є $c_k(f_1 * f_2)$ задовольняють умову В.

Лема 1. *Якщо $f \in H'_\infty\langle m_n\rangle$, то $f * \varphi \in H_\infty\langle m_n\rangle$ тоді й лише тоді, коли $\varphi \in H_\infty\langle m_n\rangle$.*

Нехай $F(t, \lambda) = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i(t)F_i(\lambda)$, $t \in (0, T]$, $0 < T < \infty$, де $F_i(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)}\lambda^n$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, — невід'ємна, нескінченно диференційовна, монотонно зростаюча на $[0, \infty)$ функція така, що $\widetilde{F}_i := \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_i(G(k))e_k \in H'_\infty\langle m_n\rangle$, $i \in \{1, \ldots, s\}$; $\alpha_i\colon (0, T] \to (0, \infty)$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, — неперервна функція, інтегровна на $(0, T]$. За функцією F та оператором A побудуємо оператор $F(t, A)$ вигляду

$$F(t, A) := \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(t)F_i(A) \equiv \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(t) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(i)}A^n;$$

при цьому вважаємо, що оператор $F(t,A)$ задано в просторі $H_\infty\langle m_n\rangle$, якщо при фіксованому $t\in(0,T]$ для довільного елемента $\varphi\in H_\infty\langle m_n\rangle$ сума

$$F(t,A)\varphi=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(t)F_i(A)\varphi\equiv\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(t)\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{(i)}A^n\varphi$$

зображає деякий елемент з простору $H_\infty\langle m_n\rangle$.

Теорема 1. *Якщо функції F_i, α_i, $i\in\{1,\ldots,s\}$, задовольняють сформульовані умови, то при кожному $t\in(0,T]$ в просторі $H_\infty\langle m_n\rangle$ визначений і є неперервним оператор $F(t,A)$.*

Зауваження 1. Нехай $\widetilde{F}(t):=\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i(t)\widetilde{F}_i$, $t\in(0,T]$. Тоді $\widetilde{F}(t)\in H'_\infty\langle m_n\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$ і $F(t,A)\varphi=\widetilde{F}(t)*\varphi$, $\forall\,\varphi\in H_\infty\langle m_n\rangle$. Отже, при кожному $t\in(0,T]$ оператор $F(t,A)$ можна розуміти як оператор згортки вказаного вигляду.

Зауваження 2. Умова $\widetilde{F}_i\in H'_\infty\langle m_n\rangle$, $i\in\{1,\ldots,s\}$, еквівалентна такій умові на функцію F_i:

$$\forall\,\mu>0\quad\exists\,c=c(\mu)>0\colon\quad 0<F_i(\lambda)\leqslant c\rho(\mu\lambda),\qquad\lambda\in[0,\infty).$$

3. $\boldsymbol{m}$-точкова задача ($m\geqslant 1$). Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u'(t)+F(t,A)u(t)=0,\qquad t\in(0,T],\qquad 0<T<\infty,\tag{1}$$

де $F(t,A)=\sum\limits_{i=1}^{s}\alpha_i(t)F_i(A)$ — оператор, побудований у п. 2, який є лінійним і неперервним у просторі $H_\infty\langle m_n\rangle$ (при кожному $t\in(0,T]$). Надалі вважаємо також, що функції F_i, $i\in\in\{1,\ldots,s\}$, задовольняють умову

$$\exists\,\mu_0>0\quad\exists\,c_0>0\colon\quad F_i(\lambda)\geqslant c_0\ln\rho(\mu_0\lambda),\qquad\lambda\in[\mu^*,+\infty),$$

$$\mu^*=\max\left\{\frac{1}{\mu_0},\frac{1}{\lambda_1}\right\},\qquad\lambda_1=G(1),\qquad i\in\{1,\ldots,s\}.$$

Під розв'язком рівняння (1) *розуміємо функцію u: $(0,T]\to H_\infty\langle m_n\rangle$, сильно диференційовну в H, яка задовольняє рівняння* (1).

Для (1) розглянемо багатоточкову задачу

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t)-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\lim_{t\to t_n}u(t)=f,\qquad f\in H'_\infty\langle m_n\rangle,\tag{2}$$

де границі розглядаються в просторі $H'_\infty\langle m_n\rangle$; $m\in\mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\}\subset(0,\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\}\subset\subset(0,T]$, — фіксовані числа, $\mu>\sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n$, $t_1<t_2<\cdots<t_m$.

При дослідженні задачі (1), (2) важливу роль відіграє функція

$$\widetilde{G}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)e_k,\qquad t\in(0,T],$$

де

$$Q_1(t,\lambda_k) := \exp\{-q(t,\lambda_k)\},$$

$$q(t,\lambda_k) = \sum_{i=1}^{s} b_i(t)F_i(\lambda_k), \qquad b_i(t) = \int_0^t \alpha_i(\tau)\,d\tau, \qquad i\in\{1,\dots,s\},$$

$$Q_2(\lambda_k) \equiv Q_2(t_1,\dots,t_m;\lambda_k) := \left(\mu - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \exp\{-q(t_n,\lambda_k)\}\right)^{-1}.$$

Основні властивості функції $\widetilde{G}(t)$ сформульовано в нижченаведених твердженнях.

Лема 2. *Функція* $\widetilde{G}(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle$ *при кожному* $t\in(0,T]$. *Функція* $\widetilde{G}(t)$, $t\in(0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $H_\infty\langle m_n\rangle$, *диференційовна за* t.

Наслідок 1. *Нехай* $\omega(t) = \widetilde{G}(t) * f$, $f\in H'_\infty\langle m_n\rangle$, $t\in(0,T]$. *Тоді* $\omega(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle$ *при кожному* $t\in(0,T]$. *Функція* $\omega(t)$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $H_\infty\langle m_n\rangle$, *диференційовна за* t.

Наслідок 2. *Функція* $\omega(t) = \widetilde{G}(t) * f$, $f\in H'_\infty\langle m_n\rangle$, $t\in(0,T]$, *сильно диференційовна, при цьому* $\omega'(t) = \widetilde{G}'(t) * f$, $t\in(0,T]$.

Теорема 2. *Функція* $\omega(t) = \widetilde{G}(t) * f$, $f\in H'_\infty\langle m_n\rangle$, $t\in(0,T]$, *є розв'язком рівняння* (1) *і в просторі* $H'_\infty\langle m_n\rangle$ *задовольняє граничне співвідношення* (2).

Зауваження 3. Нехай $f\equiv\widetilde{\delta} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k \in H'_\infty\langle m_n\rangle$. Тоді $\omega(t) = \widetilde{G}(t) * \widetilde{\delta} = \widetilde{G}(t)$, $t\in(0,T]$. Отже, з теореми 2 випливає, що функція $\widetilde{G}(t)$ у просторі $H'_\infty\langle m_n\rangle$ задовольняє граничне співвідношення $\mu \lim\limits_{t\to+0}\widetilde{G}(t) - \sum\limits_{n=1}^{m}\mu_n \lim\limits_{t\to t_n}\widetilde{G}(t) = \widetilde{\delta}$.

Підсумовуючи вищесказане, сформулюємо основне твердження.

Теорема 3. m*-точкова задача* (1), (2) *є коректно розв'язною, її розв'язок зображається формулою* $u(t) = \widetilde{G}(t) * f$, $t\in(0,T]$.

Як приклад оператора A розглянемо гармонічний осцилятор, тобто невід'ємний самоспряжений оператор, породжений в $L_2(\mathbb{R})$ диференціальним виразом $-d^2/dx^2 + x^2$. Власними функціями оператора A є функції Ерміта

$$h_k(x) = (-1)^k\pi^{-1/4}(2^k k!)^{-1/2}e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(k)}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+, \qquad x\in\mathbb{R},$$

які утворюють ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$. Формальні ряди Фур'є у даній ситуації збігаються з формальними рядами Фур'є–Ерміта $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$. Власними числами оператора A є числа $\lambda_k = 2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, тобто в даному випадку $G(x) = 2x+1$, $x\in[0,\infty)$. При цьому [1] клас Жевре $G_{\{\beta\}}(A)$, $\beta\geqslant 1$, збігається з простором $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, який належить до просторів типу S, введених І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [4].

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Бабенко К. И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций // Тр. Москов. мат. об-ва. – 1956. – **5**. – С. 523–542.
3. *Городецький В. В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.

4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 20.12.2010

O. V. Martynyuk

The multipoint problem for one class of differential-operational equations

The correct solvability of the m-point problem for evolution equations with integral self-adjoint operators, whose spectra are purely discrete, with boundary conditions in the space of formal Fourier series is established.