С.В. Цюпко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕРИТОРІАЛЬНОЇ ЦІНОВОЇ РІВНОВАГИ

У даній статті обговорюються теоретичні аспекти існуючої регіональної політики цін на зерно і зернопродукти. Для цих цілей будується економічна структура, заснована на поняттях моделі територіальної цінової рівноваги.

Більш адекватним апаратом для вивчення конкурентної економіки і розгляду проблем узгодження інтересів є теорія економічної рівноваги. Ця теорія дозволяє строго визначити і проаналізувати такі поняття, як дефіцит, попит, схема раціонування, ввести представлення про стаціонарні стани (рівноваги) при негнучких цінах.

Рівноважний підхід розвивався і використовувався в роботах С.Енке, П.Самуельсона, Д.Гейла, Т.Такаями, Г.Джаджа, К.А.Багриновського, В.А.Волконського, Ю.Н.Гаврильця, А.Г.Гранберга, В.І.Данилова-Данильяна, М.Г.Завельського, В.Л.Макарова, А.Г.Рубінштейна, У.М.Полтеровича та ін. [1-8].

Одна з перших спроб дослідження економіки, що функціонує в умовах централізованого управління і нерівноважних цін була зроблена В.В.Новожиловим. Систематичне вивчення явищ, пов'язаних з дефіцитом, почалося в останні півтора десятиріччя.

При оцінці нерівноважних цін використовуються поняття моделі територіальної рівноваги. На основі цієї моделі будується економічна структура, що функціонує в конкуруючих умовах, порівнюється і протиставляється економічній структурі [9].

Тобто модель територіальної рівноваги полягає в тому, що розходження одиниць цін між територіями (областями) має дорівнювати одиниці собівартості перевезення між цими територіями (областями).

Максимальний суспільний добробут можливий тоді, коли надлишкова вартість споживача і виробника досягає максимуму. Надлишкова вартість споживача – це різниця між ціною, яку згодний заплатити споживач, і ціною, що існує на ринку і яку він вимушений платити. А надлишкова вартість виробника – це різниця між ціною, за якою виробник згодний продавати, і ціною, що існує на ринку і яку дійсно необхідно платити. Суспільний добробут дорівнює сумі надлишкової вартості споживача і виробника.

Сформулюємо постановку задачі. Припустимо, що існує економіка, яка займається виробництвом і споживанням зерна, і ця економіка складається з n областей попиту і m областей пропозиції, де $k = 1,..., m$ і $i = 1,..., n$. Крім того, припустимо, що кожна область позначена визначеною точкою попиту і визначеною точкою пропозиції, при яких відбувається обмін. Припустимо таке: $D = (D_i)$ – вектор-стовпець ненегативних ринкових цін у точках попиту n; $S = (S_k)$ – вектор-стовпець ненегативних цін у точках пропозиції m; $X = (X_{ki}) = (X_{11}, X_{12}, ..., X_{1i}, X_{21}, X_{22}, ..., X_{2i}, ..., X_{mn})$ – вектор-стовпець ненегативних потоків зерна між точкою пропозиції k і точками попиту i; $t = (tki) = (t_{11}, t_{12}, t_{1i}, t_{21}, \dots, t_{2i}, \dots, t_{mn})$ – вектор-стовпець витрат на транспортування зерна між точкою пропозиції k і точкою попиту i.

На рисунку зображено добробут споживача і виробника. У цьому положенні площа трикутника AP'B

© Цюпко С.В. – кандидат економічних наук,

показує надлишкову вартість виробника, а площа трикутника CP'B – надлишкову вартість споживача.

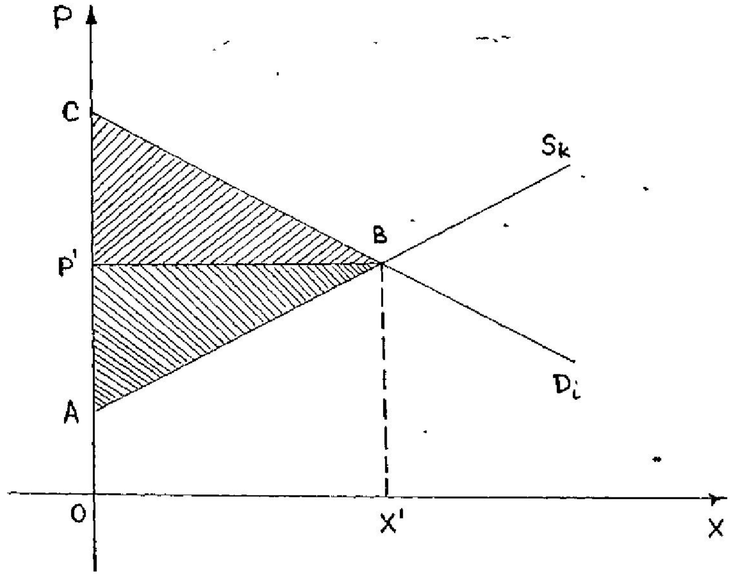

Рисунок. Добробут споживача і виробника

Трикутник ABC відображає суспільний добробут. Як видно з рисунку, площа трикутника ABC знаходиться вирахуванням площі, що лежить під прямою S_k, від площі, що лежить під прямою D_i, де S_k і D_i – ринкові ціни в точках пропозиції та попиту; X і P – кількість продукції їхньої ціни; P' – цінова рівновага; X' – рівноважний обсяг продукції.

Припустимо, що попит в області i є функцією ринкової ціни в області i та має такий вид:

$$P_i = a_i - 2b_i \cdot D_i, \quad i = 1,...,n, \qquad (1)$$

де $a_i > 0$ и $b_i > 0$ – коефіцієнти функції, в області визначення функції - задане значення $D_i \geq 0$.

Припустимою пропозицією в області k є функція ринкової ціни в області k

$$P_k = C_k + 2e_k S_k, \quad k = 1,...,m, \qquad (2)$$

де $C_k > 0$ і $e_k > 0$ – коефіцієнти функції, а область визначення функції – задана величина $S_k \geq 0$.

Припустимо, що функції (1) і (2) невпинні та диференціюються у всіх точках своєї області. При вирахуванні інтеграла функції пропозиції з інтеграла функції попиту одержимо площу трикутника ABC.

$$F = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i - \sum_{i=1}^{n} b_i D_i^2 - \sum_{k=1}^{m} C_k S_k - \sum_{k=1}^{m} e_k S_k^2 \,. \quad (3)$$

Один із найважливіших результатів – це вирішення задач, що не є лінійними. У випадку, якщо на знаки вибіркових перемінних не буде поставлено яких-небудь явних обмежень, то з класичних задач оптимізації маємо: відповідно з усіма вибірковими невідомими і множниками Лагранжа за умовою Куна-Таккера перші частки похідних цільової функції повинні дорівнювати нулю.

У роботі [7] П.Самуельсон показав, як описова динаміка цін математично може вилитися у задачу максимізації, розв'язувану ітеративним методом. Надалі Т.Такаяма і Г.Джадж [8] змінили формулювання моделі П.Самуельсона на задачу квадратичного програмування для кривих першорядного попиту та пропозиції.

Виходячи з визначення П.Самуельсона "чистої соціальної функції виграшу торгівлі", що ідентифікує стосовну до справи вартість як зростання в області кривої попиту мінус суму приростів у витратах на транспортування та області кривої пропозиції, Т.Такаяма і Г.Джадж [8] сформулювали цю описову задачу в такий спосіб.

Максимізуємо

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i - \sum_{i=1}^{n} b_i D_i^2 - \sum_{k=1}^{m} C_k S_k - \sum_{k=1}^{m} e_k S_k^2 - - \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_{ki} x_{ki} . \quad (4)$$

При обмеженнях

$$D_i - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} \le 0, \quad i = 1,...,n, \quad (5)$$

$$-S_k + \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \le 0, \quad k = 1,..., m, \quad (6)$$

$$D_i \ge 0, \quad S_k \ge 0, \quad X_{ki} \ge 0, \quad i=1,\dots,n, \quad k=1,\dots,m, \quad (7)$$

де (4) – чиста соціальна функція виграшу, є постійною величиною, обумовленою міжрегіональною торгівлею, а (5) і (6) – обмежуючі умови, які свідчать про те, що немає надлишку попиту та пропозиції.

Функція Лагранжа, що відноситься до цієї задачі, має вид

$$L = L(D_i, S_k, \gamma_i, \lambda_k) =$$

$$= H + \gamma_i (\sum_{k=1}^{m} x_{ki} - D_i) + \lambda_k (S_k - \sum_{i=1}^{n} x_{ki}) \quad (8)$$

де $\gamma_i \ge 0$ для $i = 1,...,n$ та $\lambda_k \ge 0$ для $k = 1,..., m$ є множниками Лагранжа.

Необхідні умови для D_i^*, S_k^*, X_{ki}^*, які є максимальними для розв’язання задачі, що випливають:

А) $\frac{\partial L}{\partial D_i} = a_i - 2b_i D_i - \gamma_i \ge 0, \quad D_i \ge 0$

та $D_i^* (\frac{\partial L}{\partial D_i}) = 0$ для $k = 1,...,n$, тому що $a_i - 2b_i D_i = P_i$, отримаємо, що $P_i = \gamma_i$;

Б) $\frac{\partial L}{\partial S_k} = -C_k - 2e_k S_k + \lambda_k \ge 0, \quad S_k \ge 0,$

та $S_k^* (\frac{\partial L}{\partial S_k}) = 0$ для $k = 1,..., m,$ тому що $C_k + 2e_k \cdot S_k = P_k$, отримаємо, що $p_k = \lambda_k$;

В) $\frac{\partial L}{\partial S_k} = -t_{ki} + \gamma_i - \lambda_k \ge 0, \quad X_{ki} \ge 0,$

та $X_{ki}^* (\frac{\partial L}{\partial X_{ki}}) = 0$ для $i = 1,..., n,$

тобто $\gamma_i - \lambda_k = t_{ki},$ у той же час $P_i - P_k = t_{ki}.$

Таким чином, доведено, що різниця між ціною області *i* та ціною області *k* дорівнює одиниці собівартості перевезення з області *i* до області *k*.

Коли для проблеми перевезення вищевказане буде забезпечено, цільова функція виявиться мінімальною собівартістю перевезення.

$$\min R = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t_{ki} x_{ki} \quad (9)$$

при обмеженнях

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ki} \ge D_i, \quad i = 1,..., n, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} \le S_k, \quad k = 1,..., m, \quad (11)$$

$X_{ik} \geq 0, \quad k = 1,...,m; \quad i = 1,...,n.$ (12)

Функція Лагранжа цієї задачі має вид

$$L = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} t_{ki}x_{ki} + y_i(\sum_{k=1}^{m} x_{ki} - D_i) + + M_k\left(S_k - \sum_{i-1}^{n} x_{ki}\right), \qquad (13)$$

де $y_i \geq 0$ для $i = 1,...,n$ і $M_k \geq 0$ для $k = 1,...,m$ є множниками Лагранжа.

З (13) випливає, що

$$\frac{\partial L}{\partial X_{ki}} = t_{ki} + y_i - M_k \leq 0$$

та $X_{ki}^*(\frac{\partial L}{\partial X_{ki}}) = 0$ для $k = 1,...,m;\ i = 1,...,n$,

то $t_{ki} + y_i - M_k = 0$ і $t_{ki} = M_k - y_i$

при $k = 1$ і $i = 1$ $\quad M_1 - y_1 = t_{11}$,

при $k = 2$ і $i = 2$ $\quad M_2 - y_1 = t_{21}$.

З двох рівнянь

$M_1 - M_2 = t_{11} - t_{21}$, (14)

для $k = 1$ і $i = 1$ $\rightarrow M_1 - Y_1 = t_{11}$

для $k = 2$ і $i = 2$ $\rightarrow M_1 - Y_2 = t_{12}$

З цих рівнянь

$Y_2 - Y_1 = t_{11} - t_{12}$. (15)

Рівняння (14) показує, що різниця цін між областями пропозиції дорівнює одиниці собівартості перевезення між цими областями, а рівняння (15) показує, що різниця цін між областями попиту дорівнює одиниці собівартості перевезення між цими секторами.

Література

1. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. Система моделей народнохозяйственного планирования. – М.: Мысль, 1972. – 352 с.

2. Гранберг А.Г., Суспицин С.А. Введение в системное моделирование народного хозяйства. – Новосибирск, Наука, 1988. – 304 с.
3. Математическая экономика на персональном компьютере: Пер. с японского / М.Кубонива, М.Табага, С.Табага, Ю.Хасэбе. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.
4. Enke S. Equilibrium among spatially separated markets: Solution by Electric analogue. // Econometrics. – 1951. - №19. – 40-48 p.
5. Judge G.G., Hill C.R., Griffiths, Xutcepohl and Lee T.C. Theory and practice of economics, 2nd ed., N-Y., Wiley, 1985. – 412 p.
6. Judge G.G., Wallase T.D. Estimation of spatial price equilibrium models / Journal of farm economics. – 1958. №40. – 801-820 p.
7. Samuelson P.A. Spatial price equilibrium and linear programming // American economic review. – 1952. – №42. – P. 431-438.
8. Takayama T., Judge G.G. Spatial and temporal price allocation models, North Holland Pub Com, 1971. – 300 p.
9. Точилин В.А., Шариков А.В., Гуменюк В.В. и др. Моделирование и оптимизационные расчеты. – К.: Наук. думка, 1986. – 13 с.