УДК 004.932.4

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНИХ ПАР ФІЛЬТРІВ КОДУВАННЯ І ВІДНОВЛЕННЯ, АДАПТИВНИХ ДО ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

А.О. ЛИГУН, О.О. ШУМЕЙКО, В.М. ЖУРБА

Розглянуто алгоритм побудови оптимальних пар фільтрів будь-якої складності кодування і відновлення, адаптивних до функції багатьох змінних, для довільного регулярного паркету.

ВСТУП

Одне з ключових понять в задачах обробки цифрових сигналів — поняття фільтрації. Для виявлення певних особливостей, закономірностей сигналів, а також в задачах, пов'язаних зі зменшенням фізичного об'єму даних, необхідних для відтворення сигналу, використовують різні методи фільтрації [1, 2]. Найбільш поширеними з них є методи, засновані на теорії wavelet-аналізу, дискретному перетворенні Фур'є. Однак, хоча дані методи фільтрації оптимальні для того чи іншого класу сигналів, для кожного конкретного сигналу вони не є оптимальними. Питання побудови адаптивно-оптимальних фільтрів базується на дослідженнях Н. Вінера, А.М. Колмогорова та ін.

У даній роботі розглянуто алгоритм побудови пари фільтрів кодування і відновлення, адаптивних до функції (сигналу). Також надані розв'язки задач побудови адаптивно-оптимального кодування лінійними методами при відомому методі відновлення та побудови адаптивно-оптимального лінійного методу відновлення функції по відомим значенням коду як з певними обмеженнями, так і без них. Розв'язки задач отримані в загальному вигляді для будь-якого регулярного паркету, фільтрів довільної складності та функції довільного числа змінних.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $F(X)$ — функція багатьох змінних таких, що $X = \{x_k\}_{k=1}^{n} \in Z^n$. Крім того, позначимо $I = \{i_k\}_{k=1}^{n}$ — вектор-індекс та $D = \{d_k\}_{k=1}^{n}$ — крок кодування функції $F(X)$.

Код функції $F(X)$ позначимо $\Phi = \Phi(F) = \{\varphi_I\}_{I \in Z^n}$ та задамо у вигляді лінійного функціоналу

$$\varphi_I = \sum_{\varsigma \in V} \beta_\varsigma F(ID + \varsigma), \tag{1}$$

де V — апертура, по якій будується код функції F, така, що $V = \{v_k\}$ та $\forall k : v_k \in Z^n$, тобто елементи апертури представляють собою вектор-індекси розмірністю n, що співпадає з кількістю змінних функції F.

Також нехай задано паркет Ξ. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^n$ належить елементові паркету Ξ та відповідним чином визначається D (кроком кодування функції). Побудуємо лінійний метод відновлення функції F за значеннями коду.

$$\widetilde{F}((I + \Gamma)D) = \sum_{\xi \in K(\Gamma)} \alpha_\xi(\Gamma) \varphi_{I+\xi}\,, \tag{2}$$

де $K(\Gamma)$ — множина вектор-індексів із Z^n, що визначає складність формули відновлення в точках виду $\Gamma \in \Xi$. Таким чином для $\forall \Gamma \in \Xi$ можна побудувати лінійний метод відновлення (2), складність якого визначається кількістю елементів апертури $K(\Gamma)$.

Користуючись (1) та (2), можна отримати екстремальну задачу пошуку адаптивно-оптимальної пари фільтрів кодування і відновлення функції n змінних при заданій складності формул, тобто при заданій кількості відмінних від нуля коефіцієнтів фільтрів.

$$\left\| F((I + \Gamma)D) - \widetilde{F}((I + \Gamma)D) \right\|_2 \to \min. \tag{3}$$

Дана задача є загальною постановкою задачі кодування–відновлення функції n змінних при довільному паркеті Ξ. Вираз

$$F((I + \Gamma)D) = \sum_{\xi \in K(\Gamma)} \alpha_\xi(\Gamma) \sum_{\varsigma \in V} \beta_\varsigma F((I + \xi)D + \varsigma)$$

підставимо у (3).

$$S = \sum_{I \in Z^n} \sum_{\Gamma \in \Xi} \left(F((I + \Gamma)D) - \sum_{\xi \in K(\Gamma)} \alpha_\xi(\Gamma) \left(\sum_{\varsigma \in V} \beta_\varsigma F((I + \xi)D + \varsigma) \right) \right)^2 \to \min_{\{\alpha_\xi(\Gamma)\},\{\beta_\varsigma\}}.$$

Розв'язок даної екстремальної задачі визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_\xi(\Gamma)} = 0, \quad \forall \xi \in K(\Gamma), \ \forall \Gamma \in \Xi, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta_\varsigma} = 0, \qquad \qquad \forall \varsigma \in V. \end{cases} \tag{4}$$

Запишемо вирази частинних похідних

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{\xi'}(\Gamma')} = 2\left[F((I + \Gamma)D) - \sum_{\xi \in K(\Gamma)} \alpha_\xi(\Gamma) \left(\sum_{\varsigma \in V} \beta_\varsigma F((I + \xi)D + \varsigma) \right) \right] \times$$

$$\times\left[\sum_{\varsigma\in V}\beta_{\varsigma}F\big((I+\xi')D+\varsigma\big)\right]=0,\ \ \forall\,\xi'\in K(\Gamma'),\ \ \forall\,\Gamma'\in\Xi\,.$$

$$\frac{\partial S}{\partial\beta_{\varsigma'}}=2\left[F\big((I+\Gamma)D\big)-\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_{\xi}(\Gamma)\left(\sum_{\varsigma\in V}\beta_{\varsigma}F\big((I+\xi)D+\varsigma\big)\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_{\xi}(\Gamma)F\big((I+\xi)D+\varsigma'\big)\right]=0,\ \ \forall\,\varsigma'\in V.$$

Отримана система рівнянь не є лінійною та має багато розв'язків. Точний розв'язок навіть при невеликих апертурах отримати вкрай складно, навіть при суттєвих обмеженнях [3].

Запропоновано ітераційний метод отримання адаптивно-оптимальних пар фільтрів. Аналогічно до методу головних компонент знаходимо розв'язок системи (4), по черзі фіксуючи коефіцієнти $\{\alpha_{\xi}(\Gamma)\}$ і $\{\beta_{\varsigma}\}$. Таким чином, задача розпадається на дві окремі задачі — знаходження адаптивно-оптимального методу відновлення функції за існуючими значеннями коду та знаходження адаптивного методу кодування функції таким чином, щоб середньоквадратична похибка відновлення відомим фільтром була мінімальною. Розглянемо першу задачу.

Нехай числа $\{\beta_{\varsigma}\}$ фіксовані. Тоді згідно з (1) можна вважати, що відомі значення коду φ_I. Отже, задача адаптивно-оптимального відновлення функції по відомим значенням коду буде мати вигляд

$$\sum_{I\in Z^n}\left(F\big((I+\Gamma)D\big)-\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_{\xi}(\Gamma)\varphi_{I+\xi}\right)^2\to\min_{\{\alpha_{\xi}(\Gamma)\}}.$$

Запишемо розв'язок даної задачі у вигляді матричного рівняння $\Theta\alpha=g$ при фіксованому $\Gamma\in\Xi$. Елементи матричного рівняння будуть такими:

$$\Theta_{k,l}=\left\langle\Phi\,\Phi_{\xi_k-\xi_l}\right\rangle=\sum_{I\in Z^n}\varphi_{I+\xi_k}\,\varphi_{I+\xi_l}\ ,$$

$$g_l=\left\langle F\Phi_{\xi_l}\right\rangle=\sum_{I\in Z^n}F\big((I+\Gamma)D\big)\varphi_{I+\xi_l}\ ,$$

де ξ_l — перенумеровані довільно елементи апертури $K(\Gamma)$.

Можна також отримати модифікації методу за умови симетрії базисної функції (фільтра відновлення) та точності на константах. При цьому отримаємо задачу умовної мінімізації

$$\sum_{I\in Z^n}\left(F\big((I+\Gamma)D\big)-\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\sum_{\xi^*\in\Omega(\xi)}\alpha_{\xi}(\Gamma)\varphi_{I+\xi^*}\right)^2\to\min_{\{\alpha_{\xi}(\Gamma)\}}$$

при умові

$$\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_{\xi}(\Gamma)=1\,,$$

де $\Omega(\xi)$ — множина вектор-індексів, отриманих певним симетричним перетворенням ξ. Розв'язуючи дану задачу методом невизначених коефіцієнтів Лагранжа, приходимо до екстремальної задачі

$$\sum_{I\in Z^n}\left(F((I+\Gamma)D)-\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\sum_{\xi^*\in\Omega(\xi)}\alpha_\xi(\Gamma)\varphi_{I+\xi^*}\right)^2+\lambda\left(\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_\xi(\Gamma)-1\right)\to\min_{\{\alpha_\xi(\Gamma)\}}.$$

Розв'язок цієї задачі визначається матричним рівнянням $\Theta^*\alpha=g^*$, де

$$\Theta^*=\begin{bmatrix}\Theta_{1,1} & \dots & \Theta_{1,M} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Theta_{M,1} & \dots & \Theta_{M,M} & 1\\ 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix},\quad g^*=\begin{bmatrix}g_1\\ \dots\\ g_M\\ 1\end{bmatrix};$$

M — кількість елементів апертури $K(\Gamma)$; $\alpha_{M+1}=\lambda$ та для будь-яких $k,l\le M$ $\Theta_{k,l}=\sum_{\varsigma^*\in\Omega(\varsigma)}\left\langle\Phi\Phi_{\varsigma_k^*-\varsigma_l^*}\right\rangle$, $g_l=\sum_{\varsigma^*\in\Omega(\varsigma)}\left\langle F\Phi_{\varsigma_l^*}\right\rangle$.

Якщо звільнитись від однієї з умов, що обмежує, отримаємо такі модифікації методу. За умови лише точності на константах розв'язок задачі визначається рівнянням $\Theta^*\alpha=g^*$, а елементи Θ^* та g^* для $k,l\le M$ будуть мати вигляд $\Theta_{k,l}=\left\langle\Phi\Phi_{\varsigma_k-\varsigma_l}\right\rangle$, $g_l=\left\langle F\,\Phi_{\varsigma_l}\right\rangle$. У випадку, коли необхідна лише симетрія відповідної базисної функції, розв'язок задачі визначається рівнянням $\Theta\alpha=g$. При цьому $\Theta_{k,l}=$ $=\sum_{\varsigma^*\in\Omega(\varsigma)}\langle\Phi\Phi_{\varsigma_k^*-\varsigma_l^*}\rangle$, $g_l=\sum_{\varsigma^*\in\Omega(\varsigma)}\langle F\Phi_{\varsigma_l^*}\rangle$.

Розглянемо задачу адаптивного лінійного кодування фільтром заданої складності. Розв'язок цієї задачі — це розв'язок (4) за умови, що числа $\{\alpha_\xi(\Gamma)\}$ фіксовані.

$$\left[F((I+\Gamma)D)-\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_\xi(\Gamma)\left(\sum_{\varsigma\in V}\beta_\varsigma F((I+\xi)D+\varsigma)\right)\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha_\xi(\Gamma)F((I+\xi)D+\varsigma')\right]=0,\quad\forall\varsigma'\in V.$$

Введемо позначення.

$$F_{I,\Gamma}^{\varsigma}=F((I+\Gamma)D+\varsigma),$$

$$\alpha_\xi^\Gamma=\alpha_\xi(\Gamma),$$

$$\left\langle F_\Gamma^\varsigma,F_{\Gamma'}^{\varsigma'}\right\rangle=\sum_{I\in Z^n}F_{I,\Gamma}^{\varsigma}F_{I,\Gamma'}^{\varsigma'},$$

$$\Lambda^{\Gamma}_{\xi,\xi'} = \alpha^{\Gamma}_{\xi}\alpha^{\Gamma}_{\xi'} .$$

Таким чином, користуючись запропонованими позначеннями, маємо

$$\sum_{\varsigma\in V}\beta_{\varsigma}\sum_{\Gamma\in\Xi}\sum_{\xi\in\Gamma}\sum_{\xi'\in\Gamma}\Lambda^{\Gamma}_{\xi,\xi'}\left\langle F^{\varsigma}_{\xi}, F^{\varsigma'}_{\xi'}\right\rangle = \sum_{\Gamma\in\Xi}\sum_{\xi\in K(\Gamma)}\alpha^{\Gamma}_{\xi}\left\langle F^{0}_{\Gamma}, F^{\varsigma'}_{\xi}\right\rangle, \quad \forall\varsigma'\in V .$$

Отже, якщо записати отриману систему рівнянь у матричному виді, отримаємо $\Theta\beta = g$, де

$$\Theta_{k,l} = \sum_{\Gamma\in\Xi}\sum_{k'=1}^{M(\Gamma)}\sum_{l'=1}^{M(\Gamma)}\Lambda^{\Gamma}_{\xi_{k'},\xi_{l'}}\left\langle F^{\varsigma_k}_{\xi_{k'}}, F^{\varsigma_l}_{\xi_{l'}}\right\rangle ;$$

$$g_l = \sum_{\Gamma\in\Xi}\sum_{k=1}^{M(\Gamma)}\alpha^{\Gamma}_{\xi_k}\left\langle F^{0}_{\Gamma}, F^{\varsigma_l}_{\xi_k}\right\rangle ;$$

$\{\varsigma_i\}$ — перенумеровані елементи апертури V ; $M(\Gamma)$ — кількість елементів апертури $K(\Gamma)$; $\{\xi_i\}$ — перенумеровані елементи апертури $K(\Gamma)$.

Наведемо один приклад використання адаптивної фільтрації. Як двовимірний сигнал розглянемо кадр, отриманий у результаті розгортки відеосигналу (interlace). У цьому випадку відновлення сигналу за допомогою симетричної базисної функції може бути гірше, ніж несиметричної. Як тестові приклади були використані стоп-кадри кабельної мережі телебачення, композиційний функціонал (децимація). Результат відновлення в залежності від динаміки сигналу відрізняється в межах 10%. Приклади отриманих адаптивно-оптимальних симетричної та несиметричної базисних функцій наведено на рис. 1, 2.

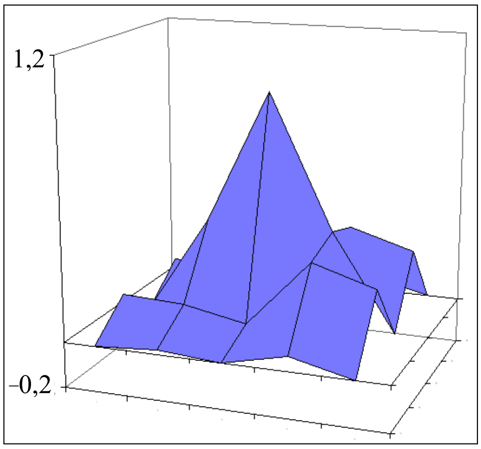

Рис. 1. Несиметрична базисна функція Interlace Frame (децимація 2×2, апертура 3×3)

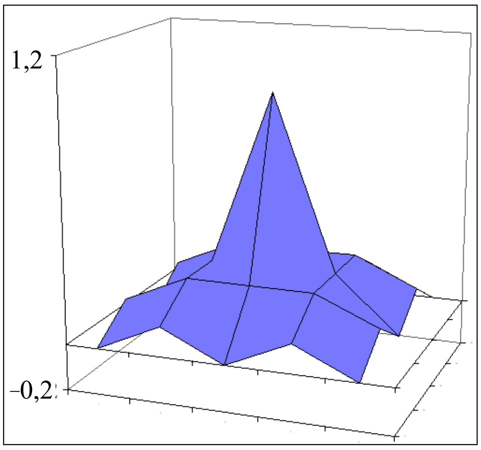

Рис. 2. Симетрична базисна функція Interlace Frame (децимація 2×2, апертура 3×3)

ВИСНОВКИ

Отриманий результат дає можливість побудови лінійних методів адаптивної до функції оптимальної фільтрації. Для будь-якого методу кодування можна запропонувати оптимальний лінійний метод відновлення, адаптований до сигналу, що дозволяє покращити декодер багатьох відомих методів кодування, пов'язаних із задачами розподілу сигналу за частотними характеристиками, компресією, масштабуванням і т. ін. Для довільних лінійних методів декодування можна реалізувати лінійний метод кодування, який забезпечить оптимальну фільтрацію, адаптивну до (функції) сигналу та методу відновлення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Адаптивные* фильтры / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта. — М.: Мир, 1988. — 392 с.
2. *Розорінов Г.М.* Адаптивне дискретне вейвлет-перетворення у системах зв'язку // Вісн. Держ. ун-ту інформаційно-коммунікаційних технологій. — 2004. — **2**, № 2. — С. 90–96.
3. *Лигун А.А., Шумейко А.А., Журба В.Н.* Об адаптивно-оптимальном восстановлении сигналов линейными методами заданной сложности // Питання прикл. математики і матем. моделювання: Зб. наук. пр. — ДНУ, 2007. — С. 67–77.

Надійшла 23.04.2008