УДК 517.581

Н. О. Вірченко, О. В. Рум'янцева

Про узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування

(Представлено академіком НАН України І. І. Ляшком)

The τ, β-generalized Gauss hypergeometric function is considered, and the basic properties of this function are investigated. Some applications of this function, in particular, to the solution of a Fredholm integral equation of the first kind are given.

Інтерес до спеціальних функцій різної природи та складності за останнє півстоліття різко зріс у зв'язку з широкими потребами практичного застосування диференціальних та інтегральних рівнянь, з розвитком обчислювальної математики тощо [1–3 та ін.]. Із великої низки спеціальних функцій гіпергеометричні функції відіграють особливо важливу роль як у теорії, так і в застосуванні при розв'язанні різноманітних задач у багатьох галузях прикладної математики, фізики та ін.

Гаусс, Ріман, Куммер, Якобі першими досліджували гіпергеометричне рівняння

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0, \tag{1}$$

де a, b, c не залежать від z, можуть бути довільними комплексними числами. Відзначимо, що рівняння (1) — це рівняння фуксового класу рівнянь з трьома особливими точками. Гіпергеометричне рівняння (1) — приклад лінійного диференціального рівняння, яке не інтегрується елементарними методами.

Спираючись на праці Ейлера, Вейєрштрасса, Шварц створює новий напрям у вивченні гіпергеометричних функцій, розв'язує питання про алгебраїчність інтегралів гіпергеометричного рівняння. У XX ст. значно посилюється вивчення, дослідження, узагальнення гіпергеометричних функцій, а саме: гіпергеометричні функції узагальнюють на випадок двох та багатьох змінних, запроваджуються p і q параметри, розглядаються різні випадки вироджених (конфлюентних) гіпергеометричних функцій та ін. За останні десятиріччя розширилось вивчення та використання узагальнених гіпергеометричних функцій за Райтом [4], досліджено окремі випадки, які мають не тільки теоретичне, але і практичне значення, зокрема, у теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії кодування, квантовій механіці, астрофізиці, теорії моделювання, біомедицині та ін.

У даній роботі розглянуто (τ, β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса, досліджено її основні властивості, подано застосування, зокрема, до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма I роду.

1. Запровадимо узагальнену (за Райтом) (τ, β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса у вигляді

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a,1),(c,\tau) \\ (c,\beta) \end{array} \middle| zt^{\tau} \right] dt, \tag{2}$$

де $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, b > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta \leqslant 1$, $\Gamma(a)$ — класична гамма-функція [1], ${}_1\Psi_1$-функція Фокса–Райта [5]. Якщо $\beta = \tau$ у (2), то одержимо функцію ${}_2R_1^{\tau}(z)$ [6]; при $\tau = \beta = 1$ маємо класичну гіпергеометричну функцію Гаусса [1].

Вивчимо основні властивості функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(z)$.

Формулу (2) можна розглядати як аналог формули Ейлера для ${}_2F_1(a,b;c;z)$ [1]. Щоб довести (2) при $|z| < 1$ досить скористатись зображенням функції ${}_1\Psi_1$ у вигляді ряду, а далі — можливістю перестановки операцій інтегрування та підсумовування, з використанням бета-інтеграла.

Лема 1. *При умовах існування функції* ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ *справедливі такі співвідношення:*

$$(c - a\beta - 1){}_2F_1^{\tau,\beta} = (c-1){}_2F_1^{\tau,\beta}(c-1) - a\beta{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1), \tag{3}$$

$$(b - a\tau){}_2F_1^{\tau,\beta} = b{}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1) - a\tau{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1), \tag{4}$$

$$\Gamma(b)\Gamma(c+\beta){}_2F_1^{\tau,\beta} = \Gamma(b)\Gamma(c+\beta){}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1) - z\Gamma(c)\Gamma(b+\tau){}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1, b+\tau; c+\beta; z), \tag{5}$$

де

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = {}_2F_1^{\tau,\beta},$$

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c;z) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1),$$

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b+1;c;z) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(b+1).$$

Доведення співвідношень (3)–(5) здійснюємо безпосередньо за допомогою використання зображення (τ, β)-узагальненої гіпергеометричної функції у вигляді ряду

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^n}{n!}. \tag{6}$$

Доведемо, наприклад, співвідношення (5):

$$\Gamma(b)\Gamma(c+\beta){}_2F_1^{\tau,\beta} = \Gamma(c)\Gamma(c+\beta)\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)a\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)\Gamma(c)}{a\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} (a+n) \frac{z^n}{n!},$$

$$z\Gamma(c)\Gamma(b+\tau){}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1, b+\tau; c+\beta; z) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} n \frac{z^n}{n!}.$$

Порівнюючи ці дві рівності, одержуємо (5).

Зауважимо, що аналогічним способом можна отримати низку узагальнених співвідношень вигляду (28)–(45) із [1, 2.9].

Лема 2. *Для (τ, β)-узагальненої гіпергеометричної функції Гаусса справедливі такі диференціальні формули:*

$$\frac{d}{dz}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = a\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(c+\beta)}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1, b+\tau; c+\beta; z), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dz}[z^a{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] = az^{a-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c;z), \tag{8}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+\beta n)}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+n,b+\tau n;c+\beta n;z), \tag{9}$$

$$a{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c;z) = \left(z\frac{d}{dz}+a\right){}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z), \tag{10}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{a+n-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}z^{n-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+n,b;c;z). \tag{11}$$

Доведення формул (7)–(11) здійснюється безпосередньою перевіркою. Доведемо, наприклад, (10). Маємо:

$$a[{}_2F_1^{\tau,\beta}(a+1,b;c;z) - {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)] =$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a\Gamma(a+1+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(a+1)\Gamma(c+\beta n)} - \frac{a\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+\beta n)}\right]\frac{z^n}{n!} =$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}[(a+n)\Gamma(a+n) - a\Gamma(a+n)]\frac{z^n}{n!} =$$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}\frac{nz^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}\frac{z^n}{(n-1)!} =$$
$$= z\frac{d}{dz}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z).$$

Зауважимо, що формули (9), (11) доводяться за допомогою методу математичної індукції з використанням відповідних рядів.

Примітка. Для функції ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)$ не виконується співвідношення

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = {}_2F_1^{\tau,\beta}(b,a;c;z). \tag{12}$$

Теорема 1 (узагальнення інтегральної формули Г. Бейтмена [1, 2.4 (2)]. *При умовах* $\operatorname{Re} c > 0$, $z \neq 1$, $\arg(1-z) < \pi$; $\{\tau,\beta\} \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re}\delta > 0$ *справедлива формула*

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c+\delta;z) = \frac{\Gamma(c+\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma(c)}\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{\delta-1}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;zt^\beta)\,dt. \tag{13}$$

Доведення. Розгорнемо функцію ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;zt^\beta)$ у ряд, почленно проінтегруємо та використаємо формули для B-функції. Одержимо

$$\int_0^1 \frac{t^{c-1}(1-t)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)\Gamma(c)}{}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;zt^\beta)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{c-1}(1-t)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)\Gamma(c)}\left(\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(a+n)\frac{\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}\frac{z^n t^{\beta n}}{n!}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\delta)\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) \frac{\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^n}{n!} \int\limits_0^1 t^{c+\beta n-1}(1-t)^{\delta-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c+\delta)} {}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c+\delta; z).$$

2. (τ, β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z)$ можна використати для обчислення невласних інтегралів, наприклад, вигляду (5)–(15) [1, 2.12] та ін.

Подамо застосування ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ для нових узагальнень Γ-функції. У [7] було подано узагальнення Γ-функції у вигляді

$$D \begin{pmatrix} a, b; c; p \\ u, \upsilon \end{pmatrix} = \upsilon^{-a} \int\limits_0^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} {}_2F_1 \left(a; b; c; -\frac{t}{\upsilon}\right) dt, \tag{14}$$

де a, b, c — комплексні параметри, $c \neq 0$, $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, u > 0$. При $p = 1$, $b = c$, $a = m$ (14) зводиться до функції [8]

$$\Gamma_m(u, \upsilon) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{u-1}}{(t+\upsilon)^m} dt, \tag{15}$$

де $\mathrm{Re}\, u > 0$, $|\arg \upsilon| < \pi$.

Запровадимо нове узагальнення Γ-функції (15).

Означення. Нехай a, b, c, p — комплексні параметри, $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\mathrm{Re}\, u > 0$, $\mathrm{Re}\, p > 0$, $|\arg \upsilon| < \pi$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, тоді вираз

$$\Gamma \begin{pmatrix} a, b; c; & \\ u, \upsilon, & p, \tau, \beta \end{pmatrix} = \widetilde{\Gamma} = \upsilon^{-a} \int\limits_0^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} {}_2F_1^{\tau,\beta} \left(a, b; c; -\frac{t}{\upsilon}\right) dt \tag{16}$$

є узагальненою гамма-функцією. Тут ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ — функція, визначена формулою (2).

Зауважимо, що при $\beta = \tau = 1$ (16) зводиться до гамма-функції, визначеної (14). А функція (15) — частинний випадок функції (16) при $p = 1$, $\beta = \tau = 1$, $b = c$, $a = m$.

Лема 3. *Частинні похідні функції* $\Gamma \begin{pmatrix} a, b; c; & \\ u, \upsilon, & p, \tau, \beta \end{pmatrix}$ *мають вигляд*

$$\frac{\partial^n \Gamma}{\partial u^n} \begin{pmatrix} a, b; c; & \\ u, \upsilon, & p, \tau, \beta \end{pmatrix} = \upsilon^{-a} \int\limits_0^{\infty} t^{u-1} e^{-pt} (\ln t)^n - 2F_1^{\tau,\beta} \left(a, b; c; -\frac{t}{\upsilon}\right) dt, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^n \Gamma}{\partial \upsilon^n} \begin{pmatrix} a, b; c; & \\ u, \upsilon, & p, \tau, \beta \end{pmatrix} = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \Gamma \begin{pmatrix} a+n, b; c; & \\ u, \upsilon, & p, \tau, \beta \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Доведення виконується безпосередньою перевіркою з урахуванням формули (16), властивостей Γ-функції.

Лема 4. *Якщо a, b, c, p — комплексні параметри, $c \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset R$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, то виконується співвідношення*

$$\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) = pu^{-1}\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u+1, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) +$$

$$+ au^{-1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\Gamma\left(\begin{matrix} a+1, b+\tau; c+\beta; \\ u+1, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right). \tag{19}$$

Доведення. Використавши формулу (7), інтегрування частинами до інтегрального зображення $\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u+1, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right)$, одержимо (19). Справді,

$$\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) - au^{-1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\Gamma\left(\begin{matrix} a+1, b+\tau; c+\beta; \\ u+1, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) =$$

$$= \upsilon^{-a}\int\limits_0^\infty t^{u-1}e^{-pt}{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b, c, -\frac{t}{\upsilon}\right)dt - au^{-1}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)}\upsilon^{-a-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty t^{u}e^{-pt}{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a+1, b+\tau, c+\beta, -\frac{t}{\upsilon}\right)dt,$$

далі — після простих перетворень матимемо (19).

Використовуючи співвідношення (3)–(5) та інші подібні співвідношення між ${}_2F_1^{\tau,\beta}(a, b; c; z)$ і суміжними функціями, можна отримати багато нових співвідношень для $\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u+1, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right)$. Наприклад, формула (4) дає

$$(b - a\tau)\Gamma\left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) = b\Gamma\left(\begin{matrix} a, b+1; c; \\ u, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right) - a\tau\upsilon\Gamma\left(\begin{matrix} a+1, b; c; \\ u, \upsilon, \end{matrix}\ p, \tau, \beta\right). \tag{20}$$

3. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма I роду з досліджуваною узагальненою гіпергеометричною функцією Гаусса, зокрема, рівняння вигляду

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_2F_1^{\tau}\left(a, b; c; -\frac{t^\tau}{x}\right)\varphi(t)\,dt = \psi(x), \tag{21}$$

де $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, a, b, c можуть бути і комплексними, $\operatorname{Re} c > 0$, $\psi(x)$ — задана функція, $\varphi(x)$ — шукана функція, причому $\varphi(x) \in C^\infty(M)$, $M = [0, \infty)$.

Для розв'язання інтегрального рівняння (21)доведемо такі леми.

Лема 5. *Якщо a, b, c, r — комплексні параметри,* $0 < \operatorname{Re} c < \operatorname{Re} r$, $x > 0$, $t > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, *то справедлива рівність*

$$\int\limits_0^\infty \frac{(t-\omega)^{r-c-1}\omega^{c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(r-c)}{}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; c; -\frac{\omega^\beta}{x}\right)d\omega = \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)}\ {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; r; -\frac{t^\beta}{x}\right). \tag{22}$$

Доведення. Виконаємо низку перетворень над лівою частиною формули (22). Поклавши $-x = z$, причому $|z| > t$, матимемо

$$\int_0^t \frac{(t-\omega)^{r-c-1}\omega^{c-1}}{\Gamma(c)\Gamma(r-c)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+\beta n)} \left(\frac{\omega^\beta}{z}\right)^n \frac{1}{n!} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^{-n}}{n!} \int_0^t (t-\omega)^{r-c-1} \omega^{c+\beta n-1} d\omega = |\omega = t\xi| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^{-n}}{n!} t^{r+\beta n-1} \int_0^t \xi^{c+\beta n-1}(1-\xi)^{r-c-1} d\xi =$$

$$= \frac{t^{r-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(r-c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \frac{z^{-n}t^{\beta n}}{n!} \frac{\Gamma(c+\beta n)\Gamma(r-c)}{\Gamma(r+\beta n)} =$$

$$= \frac{t^{r-1}\Gamma(r)}{\Gamma(r)\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \left(\frac{t^\beta}{z}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; r; -\frac{t^\beta}{x}\right).$$

Лема 6. *При умовах a, b, c, r — комплексні параметри,* $\operatorname{Re} a > 0, 0 < \operatorname{Re} c < \operatorname{Re} r$, $x > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\varphi \in C^\infty(M)$, $M = [0, \infty)$ *справедлива формула*

$$\int_0^\infty \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; r; -\frac{t^\beta}{x}\right) \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(a, b; c; -\frac{t^\beta}{x}\right) J^{r-c}\varphi(t)\, dt, \tag{23}$$

де J^{r-c} — дробовий інтеграл Вейля [9]:

$$J^\alpha f(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt \qquad (\operatorname{Re} \alpha > 0). \tag{24}$$

Доведення леми випливає із формул (22), (24).

Лема 7. *Якщо a, b, c — комплексні параметри такі, що* $\operatorname{Re} a$, $\operatorname{Re} c > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, *то справедлива формула*

$$\int_0^\infty \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1^{\tau}\left(a, b; c; -\frac{t^\tau}{x}\right) \varphi(t)\, dt = \frac{x^a}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{t^{b-1}}{(x+t^\tau)^a} J^{c-b}\varphi(t)\, dt. \tag{25}$$

Доведення. Застосуємо формулу (23) (при $\beta = \tau$) до $J^{c-r}\varphi$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} {}_2F_1^{\tau}\left(a, b; r; -\frac{t^\tau}{x}\right) J^{c-r}\varphi(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1^{\tau}\left(a, b; c; -\frac{t^\tau}{x}\right) J^{c-r}(J^{r-c}\varphi(t))\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1^{\tau}\left(a, b; c; -\frac{t^\tau}{x}\right) \varphi(t)\, dt;$$

після заміни c на b у (23), а потім — φ на $J^{c-r}\varphi$ одержимо

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} {}_2F_1^\tau\left(a,b;r;-\frac{t^\tau}{x}\right)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{b-1}}{\Gamma(b)} {}_2F_1^\tau\left(a,b;b;-\frac{t^\tau}{x}\right)J^{r-b}\varphi(t)\,dt;$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} {}_2F_1^\tau\left(a,b;r;-\frac{t^\tau}{x}\right)J^{c-r}\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{t^{b-1}}{\Gamma(b)} {}_2F_1^\tau\left(a,b;b;-\frac{t^\tau}{x}\right)J^{c-b}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{x^a}{\Gamma(b)}\int\limits_0^\infty t^{b-1}\frac{1}{(x+t^\tau)^a}J^{c-b}\varphi(t)\,dt.$$

Повернемося до рівняння (21). Справедлива

Теорема 2. *При умовах* $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Re} a > 0$ *і* $x^{-a}\psi(x) \in M$ *рівняння* (21) *має розв'язок*

$$\varphi(x^{1/\tau}) = \Phi(x) = \tau\Gamma(a)\Gamma(b)J^{b-c}x^{-\frac{b}{\tau}+1}I^{a-1}\lim_{n\to\infty}L_n[x^{-a}\psi(x)], \tag{26}$$

де

$$L_n[f(x)] = \frac{(-x)^{n-1}}{n!(n-2)!}\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\{x^n f(x)\}, \tag{27}$$

I^{a-1} — *дробовий інтеграл Рімана–Ліувіля [9]:*

$$I^\mu f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}f(t)\,dt \tag{28}$$

(μ — комплексне, $\operatorname{Re}\mu > 0$*). Оператор* J^{b-c} *визначений формулою* (24).

Доведення. Врахувавши (25), виконавши заміну $t^\tau = z$ та скориставшись рівністю

$$\int\limits_0^\infty \frac{I^{1-\mu}}{x+t}dt = \int\limits_0^\infty \frac{\Gamma(\mu)}{(x+t)^\mu}f(t)\,dt \qquad (0 < \operatorname{Re}(1-\mu) < 1), \tag{29}$$

яка легко перевіряється, перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$\frac{x^a}{\tau\Gamma(a)\Gamma(b)}\int\limits_0^\infty \frac{I^{1-a}t^{\frac{b}{\tau}-1}J^{c-b}\Phi(t)}{x+t}dt = \psi(x), \tag{30}$$

де $\Phi(t) = \varphi(t^{1/\tau})$.

Використавши формулу обернення узагальненого інтегрального перетворення Стільтьєса [10], отримаємо розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма I роду (21) у вигляді (26).

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.; Т. 2. – 296 с.; Т. 3. – 300 с.

2. *Aomoto K.* Hypergeometric functions: the past, today and ... (from the complex analytic point of view) // Sugaku Expositions. – 1996. – **9**. – P. 99–116.
3. *Andrews L. C., Askey R., Roy R.* Special functions. – New York: Cambridge University Press, 1999. – 664 p.
4. *Wright E. M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. – 1933. – **8**. – P. 71–79.
5. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. – London: Charman and Hall, 2004. – 390 p.
6. *Virchenko N. O.* On some generalizations of gamma functions // Доп. НАН України. – 1999. – № 10. – С. 39–44.
7. *Al-Musallam F., Kalla S. L.* Asymptotic expansions for generalized gamma and incomplete gamma functions // Appl. Anal. – 1997. – **66**. – P. 173–187.
8. *Kobayashi K.* On generalized gamma functions occurring in diffraction theory // J. Phys. Soc. Jap. – 1991. – **60**. – P. 1501–1512.
9. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
10. *Widder D. V.* The Laplace transform. – Princeton: Princeton University Press, 1946. – 276 с.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 10.10.2007*

УДК 517.9

Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов

Про розв'язність диференціально-операторних включень II порядку з некоерцитивними операторами W_{λ_0}-псевдомонотонного типу

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{В. С. Мельником}}$)

We consider the second-order differential-operator inclusions with operators of the pseudomonotone type. The existence of solutions for the Cauchy problem for such inclusions by using the singular perturbation method is justified. The important a priori estimates have been obtained. An example that illustrates the given result is presented.

Диференціально-операторні включення та еволюційні варіаційні нерівності, що зводяться до них, вивчаються досить інтенсивно багатьма дослідниками [1–5]. По аналогії з диференціально-операторними рівняннями II порядку, еволюційні включення II порядку зводяться до диференціально-операторних включень I порядку, а потім, з використанням відомих методів, для них доводиться розв'язність. При перенесенні цієї техніки на включення еволюційного типу з некоерцитивними відображеннями виникають істотні технічні складності.

У даній роботі розглядаються еволюційні включення II порядку з некоерцитивними багатозначними відображеннями. Для досить широкого класу істотно багатозначних відображень доводиться їх розв'язність та виводяться апріорні оцінки для розв'язків. Як приклад розглядається клас задач з нелінійними операторами, для якого доводиться розв'язність. Одержані результати є новими і для рівнянь також.