УДК 539.3

Член-корреспондент НАН Украины **Л. П. Хорошун, А. Ш. Гафуров, Т. И. Дородных**

Прогнозирование электрострикционных свойств стохастических двухкомпонентных материалов

The method of conditional moments is developed for the effective electrostriction, a nonlinearly electromechanical effect in inhomogeneous two-component materials. The explicit expressions for an isotropic composite containing spherical isotropic inclusions are given. The influence of the volume fraction of inclusions and the stiffness and electrostrictive properties of a composite material on the effective electrostrictive coefficients are illustrated numerically and discussed.

Исследование электромеханических явлений отражено в работах [1–4]. Наиболее полно представлен в различных работах пьезоэлектрический эффект, являющий собой линейную зависимость напряженности электрического поля и деформации.

Электрострикция присутствует во всех материалах (диэлектриках) и носит парный нелинейный электромеханический характер. Электрострикция представляет собой деформацию твердых, жидких и газообразных диэлектриков в электрическом поле, обусловленную их поляризацией и пропорциональная квадрату напряженности электрического поля. Квадратичная зависимость деформации от напряженности поля означает, в частности, что знак электрострикции (т. е. расширяется или сжимается вещество в электрическом поле) не зависит от направления поля. В переменном поле в результате электрострикции механические колебания происходят с частотой, вдвое большей, чем частота поля.

В настоящее время представляют интерес ферроэлектрические материалы, которые имеют сравнительно большую электрострикцию и используются в электроактивных сенсорах и возбуждающих приборах. С другой стороны, в микроэлектронике, где разрушение, вызванное электромагнитным полем, представляет определенный риск, существует потребность в материалах с эффектом нулевой электрострикции. Это обусловливает развитие теоретических подходов в исследовании нелинейных электромеханических эффектов в неоднородных материалах. Следует отметить работы Ce-Wen Nan, G. J. Weng [5], в которых определяются эффективные электрострикционные и магнитострикционные свойства композитных материалов на основе метода самосогласования, точность и применимость которого существенно зависит от структуры материала.

В настоящей работе излагаются теоретические основы прогнозирования эффективных свойств электрострикции двухкомпонентного стохастически неоднородного материала на основе метода условных моментов, строгость и применимость которого не требует ограничений на структуру материала.

1. Постановка задачи. Представим композитный материал стохастической структуры, который обладает эффектом электрострикции, как микронеоднородную среду, в произвольной точке которой имеют место уравнения состояния

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \lambda_{ijmn}\varepsilon_{mn} - p_{krij}E_kE_r,\\
&D_k = \chi_{kr}E_r + 2p_{krij}\varepsilon_{ij}E_r, \qquad (1)\\
&p_{krij} = \lambda_{krmn}e_{mnij},
\end{aligned}$$

где тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{mn}, а также вектор индукции D_k и вектор напряженности электрического поля E_k являются неизвестными случайными функциями координат, а тензоры модулей упругости λ_{ijmn}, диэлектрической проницаемости χ_{kr} и коэффициентов электростикции e_{mnij} — заданные случайные, статистически однородные функции координат. Если макрообъем такого материала находится в условиях однородного внешнего нагружения (механического и электрического), то возникающие в нем поля σ_{ij}, ε_{mn}, D_k и E_k будут статистически однородными случайными функциями координат и удовлетворяют свойству эргодичности. Тогда макроскопические напряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle$, индукции $\langle D_k\rangle$, деформации $\langle\varepsilon_{mn}\rangle$ и напряженности $\langle E_n\rangle$ совпадают с соответствующими математическими ожиданиями в некоторой точке и между ними имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ijmn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle - p^*_{krij}\langle E_k\rangle\langle E_r\rangle,\\
&\langle D_k\rangle = \chi^*_{kr}\langle E_r\rangle + 2p^*_{krij}\langle\varepsilon_{ij}\rangle\langle E_r\rangle,\\
&p^*_{ijmn} = \lambda^*_{ijpq}e^*_{pqmn},
\end{aligned} \tag{2}$$

где λ^*_{ijmn}, χ^*_{kr} и e^*_{pqmn} — тензоры эффективных упругих, диэлектрических и электрострикционных постоянных. Нахождение тензоров эффективных постоянных представляет собой сложную задачу из-за нелинейности уравнений (2) и связности полей переменных в этих уравнениях. Проводя статистическое усреднение (1) в некоторой точке макрообъема и пренебрегая флуктуациями микродеформаций и микронапряженностей электрического поля в пределах компонента, получим выражения

$$\begin{aligned}
&\langle\sigma_{ij}\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k(\lambda^k_{ijmn}\langle\varepsilon^k_{mn}\rangle - p^k_{mnij}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle),\\
&\langle D_i\rangle = \sum_{k=1}^{2} c_k(\chi^k_{ij}\langle E^k_j\rangle + 2p^k_{ijmn}\langle\varepsilon^k_{mn}\rangle\langle E^k_j\rangle),
\end{aligned} \tag{3}$$

где c_k, λ^k_{ijmn}, $p^k_{ijmn} = \lambda^k_{ijpq}e^k_{pqmn}$, χ^k_{ij} — соответственно объемная концентрация и тензоры электроупругих постоянных k-го компонента, $\langle\varepsilon^k_{mn}\rangle$, $\langle E^k_j\rangle$ — средние по k-му компоненту соответственно тензор деформации и вектор напряженности электрического поля, которые вследствие эргодичности совпадают с условными одноточечными математическими ожиданиями соответствующих параметров.

Для нахождения эффективных свойств электрострикционных материалов воспользуемся стохастическими уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0; \qquad D_{k,k} = 0 \tag{4}$$

и соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{(i,j)} + u_{(j,i)}); \qquad E_i = -\varphi_{,i}, \tag{5}$$

которые связывают деформации ε_{ij} и напряженность E_i с перемещениями u_i и потенциалом электрического поля φ. Представляя случайные поля перемещений и электрического потенциала как суммы математических ожиданий и флуктуаций

$$u_i = \langle\varepsilon_{ij}\rangle x_j + u^0_i, \qquad \phi = -\langle E_k\rangle x_k + \phi^0, \tag{6}$$

приведем уравнения равновесия (4) с учетом (1) к виду

$$\lambda^c_{ij\beta\beta}u^0_{\alpha,j\beta} + [\lambda'_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} - p_{krij}E_kE_r]_{,j} = 0;$$
$$\chi^c_{kr}\phi^0_{,kr} + [\chi'_{kr}E_r + 2p_{krij}\varepsilon_{ij}E_r]_{,k} = 0, \tag{7}$$

где $\lambda^c_{ij\alpha\beta}$, χ^c_{ij} — соответственно тензоры модулей упругости и диэлектрической проницаемости для тела сравнения, $\lambda'_{ij\alpha\beta} = \lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda^c_{ij\alpha\beta}$; $\chi'_{kr} = \chi_{kr} - \chi^c_{kr}$. При этом, поскольку размеры макрообъема значительно превосходят размеры микронеоднородностей, то его рассматривают как бесконечную среду. Поэтому граничные условия для флуктуаций на бесконечно удаленной границе s будут такими:

$$u^0_i\big|_s = 0, \qquad \phi^0\big|_s = 0. \tag{8}$$

С помощью функций Грина для бесконечной области V, удовлетворяющих уравнениям

$$\lambda^c_{ijmn}G_{mk,jn}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r) + \delta(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)\delta_{ik} = 0;$$
$$\chi^c_{ij}G_{,ij}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r) + \delta(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r) = 0, \tag{9}$$

краевую задачу (7), (8) приведем к стохастическим интегральным уравнениям относительно деформаций и напряженностей электрического поля

$$\varepsilon^{(1)}_{ij} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + K_{ijpq}(x^{(1)}_i - x^{(2)}_i)[(\lambda^{(2)}_{pq\alpha\beta} - \lambda^c_{pq\alpha\beta})\varepsilon^{(2)}_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta pq}E^{(2)}_\alpha E^{(2)}_\beta],$$
$$E^{(1)}_i = \langle E_i\rangle - N_{ij}(x^{(1)}_i - x^{(2)}_i)[(\chi^{(2)}_{jn} - \chi^c_{jn})E^{(2)}_n + 2p_{jrpq}E^{(2)}_r\varepsilon^{(2)}_{pq}]. \tag{10}$$

Здесь действие интегральных операторов определяется соотношениями

$$K_{ijpq}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)\phi^{(2)} = \int\limits_{V^{(2)}} G_{(ip,j)q}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)(\phi^{(2)} - \langle\phi\rangle)\,dV^{(2)};$$
$$N_{ij}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)\phi^{(2)} = \int\limits_{V^{(2)}} G_{,ij}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)(\phi^{(2)} - \langle\phi\rangle)\,dV^{(2)}, \tag{11}$$

причем индекс в круглых скобках вверху обозначает соответствующую точку пространства.

Для определения средних по компонентам деформаций $\langle\varepsilon^k_{ij}\rangle$ и напряженностей $\langle E^k_i\rangle$ усредним уравнения (10) по условной плотности распределения $f(\varepsilon^{(1)}_{ij}, \varepsilon^{(2)}_{ij}, E^{(1)}_i, E^{(2)}_i, \lambda^{(2)}_{ijmn}, p^{(2)}_{ijmn}, \chi^{(2)}_{ij} \mid \nu^{(1)})$ и, пренебрегая флуктуациями деформаций и напряженностей электрического поля в пределах компонента, получим в двухточечном приближении систему алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций и напряженностей электрического поля

$$\langle\varepsilon^\nu_{ij}\rangle = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + \sum_{k=1}^{2} K^{\nu k}_{ijpq}({\lambda'}^k_{pqmn}\langle\varepsilon^k_{mn}\rangle - p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle);$$
$$\langle E^\nu_i\rangle = \langle E_i\rangle + \sum_{k=1}^{2} N^{\nu k}_{ij}({\chi'}^k_{jn}\langle E^k_n\rangle + 2p^k_{jnpq}\langle E^k_n\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle) \qquad (\nu = 1, 2), \tag{12}$$

где матричные операторы $K^{\nu k}_{ijpq}$, $N^{\nu k}_{ij}$ определяются, согласно (11), выражениями

$$\begin{aligned} &K^{\nu k}_{ijpq} = K_{ijpq}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)P_{\nu k}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r);\\ &N^{\nu k}_{ij} = N_{ij}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r)P_{\nu k}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r). \end{aligned} \tag{13}$$

Вероятности перехода $P_{\nu k}(x^{(1)}_r - x^{(2)}_r) = f\left({}^{(2)}_{k} \mid {}^{(1)}_{\nu}\right)$ представляют собой вероятности перехода из ν-компонента в точке $x^{(1)}_r$ в k-компонент в точке $x^{(2)}_r$и зависят от формы структурных элементов и их ориентации. Для двухкомпонентного материала вероятности перехода имеют вид

$$P_{\nu k}(x) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\Phi_{\nu k}(x), \tag{14}$$

где $\Phi_{\nu k}$ — корреляционная функция, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 1$, $\Phi(\infty) = 0$.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (12) естественно строить методом итераций, для чего преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} &\left[I_{ijmn} - K^{11}_{ijpq}(\lambda^1_{pqmn} - \lambda^c_{pqmn}) + \frac{c_1}{c_2}K^{12}_{ijpq}(\lambda^2_{pqmn} - \lambda^c_{pqmn})\right]\langle\varepsilon^1_{mn}\rangle =\\ &\qquad = \left[I_{ijmn} + \frac{1}{c_2}K^{12}_{ijpq}(\lambda^2_{pqmn} - \lambda^c_{pqmn})\right]\langle\varepsilon_{mn}\rangle - \sum_{k=1}^{2} K^{1k}_{ijpq}p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle;\\ &\left[\delta_{in} - N^{11}_{ij}(\chi^1_{jn} - \chi^c_{jn}) + \frac{c_1}{c_2}N^{12}_{ij}(\chi^2_{jn} - \chi^c_{jn})\right]\langle E^1_n\rangle =\\ &\qquad = \left[\delta_{in} + \frac{1}{c_2}N^{12}_{ij}(\chi^2_{jn} - \chi^c_{jn})\right]\langle E_n\rangle + 2\sum_{k=1}^{2} N^{1k}_{ij}p^k_{jrpq}\langle E^k_r\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

где $I_{ij\alpha\beta}$, δ_{in} — единичные тензоры.

Выражая средние по компоненту деформации и напряженности электрического поля из уравнения (15), получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} &\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\rangle = B^1_{\alpha\beta ij}\left[\left(I_{ijmn} + \frac{1}{c_2}K^{12}_{ijpq}\lambda'_{pqmn}\right)\langle\varepsilon_{mn}\rangle - \sum_{k=1}^{2} K^{1k}_{ijpq}p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle\right];\\ &\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\rangle = B^2_{\alpha\beta ij}\left[\left(I_{ijmn} + \frac{1}{c_1}K^{21}_{ijpq}\lambda'^1_{pqmn}\right)\langle\varepsilon_{mn}\rangle - \sum_{k=1}^{2} K^{2k}_{ijpq}p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle\right];\\ &\langle E^1_m\rangle = S^1_{mi}\left[(\delta_{in} + \frac{1}{c_2}N^{12}_{ij}\chi'_{jn})\langle E_n\rangle + 2\sum_{k=1}^{2} N^{1k}_{ij}p^k_{jrpq}\langle E^k_r\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle\right];\\ &\langle E^2_m\rangle = S^2_{mi}\left[(\delta_{in} + \frac{1}{c_1}N^{21}_{ij}\chi'^1_{jn})\langle E_n\rangle + 2\sum_{k=1}^{2} N^{2k}_{ij}p^k_{jrpq}\langle E^k_r\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle\right], \end{aligned} \tag{16}$$

где матричные операторы $B^1_{\alpha\beta ij}$, $B^2_{\alpha\beta ij}$, S^1_{nq}, S^2_{nq} определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
&\left[I_{ijmn} - K^{11}_{ijpq}{\lambda'}^1_{pqmn} + \frac{c_1}{c_2}K^{12}_{ijpq}{\lambda'}^2_{pqmn}\right]B^1_{mn\alpha\beta} = I_{ij\alpha\beta};\\
&\left[I_{ijmn} - K^{22}_{ijpq}{\lambda'}^2_{pqmn} + \frac{c_2}{c_1}K^{21}_{ijpq}{\lambda'}^1_{pqmn}\right]B^2_{mn\alpha\beta} = I_{ij\alpha\beta};\\
&\left[\delta_{in} - N^{11}_{ij}{\chi'}^1_{jn} + \frac{c_1}{c_2}N^{12}_{ij}{\chi'}^2_{jn}\right]S^1_{nq} = \delta_{iq};\\
&\left[\delta_{in} - N^{22}_{ij}{\chi'}^2_{jn} + \frac{c_2}{c_1}N^{21}_{ij}{\chi'}^1_{jn}\right]S^2_{iq} = \delta_{iq}.
\end{aligned}\tag{17}$$

Представим (16) в виде

$$\begin{aligned}
&\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\rangle = A^1_{\alpha\beta mn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle - B^1_{\alpha\beta ij}\sum_{k=1}^{2}K^{1k}_{ijpq}p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle;\\
&\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\rangle = A^2_{\alpha\beta mn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle - B^2_{\alpha\beta ij}\sum_{k=1}^{2}K^{2k}_{ijpq}p^k_{mnpq}\langle E^k_m\rangle\langle E^k_n\rangle;\\
&\langle E^1_m\rangle = C^1_{mn}\langle E_n\rangle + 2S^1_{mi}\sum_{k=1}^{2}N^{1k}_{ij}p^k_{jrpq}\langle E^k_r\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle;\\
&\langle E^2_m\rangle = C^2_{mn}\langle E_n\rangle + 2S^2_{mi}\sum_{k=1}^{2}N^{2k}_{ij}p^k_{jrpq}\langle E^k_r\rangle\langle\varepsilon^k_{pq}\rangle,
\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
&A^1_{\alpha\beta mn} = B^1_{\alpha\beta ij}\left(I_{ijmn}+\frac{1}{c_2}K^{12}_{ijpq}{\lambda'}^2_{pqmn}\right); \quad A^2_{\alpha\beta mn} = B^2_{\alpha\beta ij}\left(I_{ijmn}+\frac{1}{c_1}K^{21}_{ijpq}{\lambda'}^1_{pqmn}\right);\\
&C^1_{mn} = S^1_{mi}\left(\delta_{in} + \frac{1}{c_2}N^{12}_{ij}{\chi'}^2_{jn}\right); \qquad C^2_{mn} = S^2_{mi}\left(\delta_{in} + \frac{1}{c_1}N^{21}_{ij}{\chi'}^1_{jn}\right).
\end{aligned}\tag{19}$$

Если в (19) пренебречь нелинейными слагаемыми, то получим решение в нулевом приближении с линейной зависимостью средних по компонентам параметров $\langle\varepsilon^k_{mn}\rangle$, $\langle E^k_j\rangle$ от макропараметров $\langle\varepsilon_{mn}\rangle$, $\langle E_j\rangle$. Подставляя затем его в нелинейные слагаемые, приходим к решению в первом приближении

$$\begin{aligned}
&\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\rangle = A^1_{\alpha\beta mn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle - B^1_{\alpha\beta ij}\sum_{k=1}^{2}K^{1k}_{ijpq}p^k_{mnpq}C^k_{m\delta}C^k_{n\gamma}\langle E_\delta\rangle\langle E_\gamma\rangle;\\
&\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\rangle = A^2_{\alpha\beta mn}\langle\varepsilon_{mn}\rangle - B^2_{\alpha\beta ij}\sum_{k=1}^{2}K^{2k}_{ijpq}p^k_{mnpq}C^k_{m\delta}C^k_{n\gamma}\langle E_\delta\rangle\langle E_\gamma\rangle;\\
&\langle E^1_m\rangle = C^1_{mn}\langle E_n\rangle + 2S^1_{mi}\sum_{k=1}^{2}N^{1k}_{ij}p^k_{jrpq}C^k_{r\gamma}A^k_{pq\alpha\beta}\langle E^k_\gamma\rangle\langle\varepsilon^k_{\alpha\beta}\rangle;
\end{aligned}\tag{20}$$

$$\langle E_m^2\rangle = C_{mn}^2\langle E_n\rangle + 2S_{mi}^2\sum_{k=1}^{2} N_{ij}^{2k} p_{jrpq}^k C_{r\gamma}^k A_{pq\alpha\beta}^k \langle E_\gamma^k\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle.$$

Подставляя (20) в (3) и ограничиваясь квадратичными зависимостями, получим

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_{ij}\rangle &= \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \Bigg[\lambda_{ij\alpha\beta}^\nu \Big(A_{\alpha\beta mn}^\nu\langle\varepsilon_{mn}\rangle - B_{\alpha\beta rs}^\nu \sum_{k=1}^{2} K_{rspq}^{\nu k} p_{mnpq}^k C_{m\delta}^k C_{n\gamma}^k \langle E_\gamma\rangle\langle E_\delta\rangle\Big) - \\
&\quad - p_{\alpha\beta ij}^\nu C_{\alpha\gamma}^\nu C_{\beta\delta}^\nu \langle E_\gamma\rangle\langle E_\delta\rangle\Bigg], \\
\langle D_i\rangle &= \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \Bigg[\chi_{im}^\nu \Big(C_{mj}^\nu\langle E_j\rangle + 2S_{mn}^\nu \sum_{k=1}^{2} N_{ns}^{\nu k} p_{srpq}^k C_{r\gamma}^k A_{pq\alpha\beta}^k \langle E_\gamma\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle\Big) + \\
&\quad + 2p_{impq}^\nu C_{m\gamma}^\nu A_{pq\alpha\beta}^\nu \langle E_\gamma\rangle\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle\Bigg].
\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда, сравнивая (2) и (21), находим выражения для эффективных упругих, электрострикционных и диэлектрических модулей

$$\begin{aligned}
&\lambda_{ijmn}^* = \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \lambda_{ij\alpha\beta}^\nu A_{\alpha\beta mn}^\nu, \qquad \chi_{ij}^* = \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \chi_{im}^\nu C_{mj}^\nu, \\
&p_{\gamma\delta ij}^* = \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \left(p_{\alpha\beta ij}^\nu C_{\alpha\gamma}^\nu C_{\beta\delta}^\nu + \lambda_{ij\alpha\beta}^\nu B_{\alpha\beta rs}^\nu \sum_{k=1}^{2} K_{rspq}^{\nu k} p_{mnpq}^k C_{m\gamma}^k C_{n\delta}^k\right), \\
&p_{ij\alpha\beta}^* = \sum_{\nu=1}^{2} c_\nu \left(p_{impq}^\nu C_{mj}^\nu A_{pq\alpha\beta}^\nu + \chi_{im}^\nu S_{mn}^\nu \sum_{k=1}^{2} N_{ns}^{\nu k} p_{srpq}^k C_{rj}^k A_{pq\alpha\beta}^k\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Как видим, эффективные электрострикционные постоянные определяются двумя различными формулами, которые в случае абсолютно точного решения должны приводить к одинаковым результатам. Однако, так как решение строится на некоторых упрощающих допущениях, то в общем случае результаты, полученные на основе различных формул, могут не совпадать. Формулы (22) справедливы для материала произвольного типа симметрии и произвольной формы компонентов. Отметим, что выражения (18) позволяют определить средние деформации и напряженности в компонентах, что дает возможность, используя те или иные для компонентов, прогнозировать прочностные свойства материалов.

2. Изотропные материалы. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой изотропную матрицу и изотропные квазисферические включения. В этом случае тензоры модулей упругости, электрострикции, диэлектрической проницаемости, компонентов тела сравнения, а также вероятности перехода имеют вид

$$\begin{aligned}
&\lambda_{ijmn}^k = \lambda_k\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_k I_{ijmn}; \qquad p_{ijmn}^k = p_k\delta_{mn}\delta_{ij} + 2q_k I_{ijmn}; \qquad \chi_{jn}^k = \chi_k\delta_{jn}; \\
&\lambda_{ijmn}^c = \lambda_c\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_c I_{ijmn}; \qquad \chi_{ij}^c = \chi_c\delta_{ij} \qquad (k = 1, 2), \\
&P_{\nu k}(x_r) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\exp\left(-\frac{8}{\pi^2 c_2 R}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \qquad (\nu = 1, 2),
\end{aligned} \tag{23}$$

где λ_k, μ_k, χ_k, p_k, q_k — модули упругости, диэлектрические проницаемости и постоянные электрострикции соответственно; λ^c, μ^c, χ^c — модули упругости и диэлектрические проницаемости тела сравнения; R — радиус квазисферических включений. Тогда матричные операторы K_{ijpq}, N_{ij} из (13) определяются формулами

$$K_{ijpq} = a\delta_{pq}\delta_{ij} + 2bI_{ijpq}, \qquad N_{ij} = r\delta_{ij},$$
$$a = \frac{\lambda_c + \mu_c}{15\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \qquad b = -\frac{3\lambda_c + 8\mu_c}{30\mu_c(\lambda_c + 2\mu_c)}, \qquad r = -\frac{1}{3\chi_c}. \tag{24}$$

Соотношения (19), (22), (24) определяют эффективные постоянные упругости, диэлектрической проницаемости и электрострикции двухкомпонентного композитного материала с изотропной матрицей и изотропными сферическими включениями. Тело сравнения следует взять в следующем виде:

$$\lambda_c + \frac{2}{3}\mu_c = K_c = \begin{cases} \langle K\rangle, & \text{если} \quad K_1 - K_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{\langle 1\rangle}{\langle K\rangle}, & \text{если} \quad K_1 - K_2 > 0, \end{cases}$$
$$\mu_c = \begin{cases} \langle \mu\rangle, & \text{если} \quad \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{\langle 1\rangle}{\left\langle \dfrac{1}{\mu}\right\rangle}, & \text{если} \quad \mu_1 - \mu_2 > 0, \end{cases} \tag{25}$$
$$\chi_c = \begin{cases} \langle \chi\rangle, & \text{если} \quad \chi_1 - \chi_2 \leqslant 0, \\ \langle \chi^{-1}\rangle^{-1}, & \text{если} \quad \chi_1 - \chi_2 > 0. \end{cases}$$

Здесь $K_1 = \lambda_1 + 2\mu_1/3$, μ_1, χ_1, $K_2 = \lambda_2 + 2\mu_2/3$, μ_2, χ_2 — объемные модули, модули сдвига и диэлектрические проницаемости соответственно включений и матрицы.

Представим выражения для электрострикционных модулей из (23) в виде

$$p^k_{ijmn} = p_k\delta_{ij}\delta_{mn} + 2q_kI_{ijmn} = (3p_k + 2q_k)V_{ijmn} + 2q_kD_{ijmn} = 3s_kV_{ijmn} + 2q_kD_{ijmn};$$
$$3s_k = 3p_k + 2q_k, \qquad D_{ijmn} = I_{ijmn} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}, \qquad V_{ijmn} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}. \tag{26}$$

Тогда, исходя из (24), можно записать

$$K^{\nu k}_{ijpq}p^k_{pqmn} = (\delta_{\nu k} - c_k)(9ds_kV_{ijmn} + 4bq_kD_{ijmn});$$
$$N^{\nu k}_{ij}p^k_{jrpq} = (\delta_{\nu k} - c_k)rp^k_{jrpq} = (\delta_{\nu k} - c_k)r(3s_kV_{mrpq} + 2q_kD_{ijmn}), \tag{27}$$

где $3d = 3a + 2b$.

В результате, с учетом (22), (23), (27) получим следующие выражения для эффективных постоянных изотропного материала:

$$\lambda^*_{ijmn} = 3K^*V_{ijmn} + 2\mu^*D_{ijmn}; \qquad p^*_{ijmn} = 3s^*V_{ijmn} + 2q^*D_{ijmn}; \qquad \chi^*_{ij} = \chi^*\delta_{ij};$$

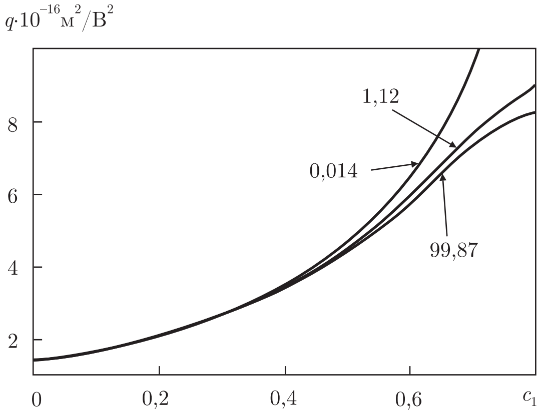

Рис. 1

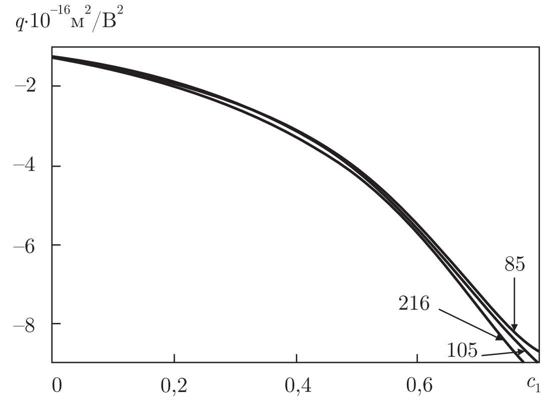

Рис. 2

$$K^* = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{c_\nu K_\nu (1 - 9dK'_{3-\nu})}{1 - 9d\overline{K}'}; \qquad \mu^* = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{c_\nu \mu_\nu (1 - 4b\mu'_{3-\nu})}{1 - 4b\overline{\mu}'};$$

$$s^* = \sum_{k=1}^{2} c_k s_k \frac{1 - 9d(K_{3-k} - K_c)}{1 - 9d\overline{K}'} \left(\frac{1 - r\chi'_{3-k}}{1 - r\overline{\chi}'} \right)^2; \tag{28}$$

$$q^* = \sum_{k=1}^{2} c_k q_k \frac{1 - 4b(\mu_{3-k} - \mu_c)}{1 - 4b\overline{\mu}'} \left(\frac{1 - r\chi'_{3-k}}{1 - r\overline{\chi}'} \right)^2.$$

Аналогичный результат получим, воспользовавшись второй формулой (22) для эффективного модуля p^*_{ijmn}. При этом

$$\overline{K}' = c_1 K_2 + c_2 K_1 - K_c, \qquad K_i = \lambda_i + \frac{2}{3}\mu_i, \qquad K_c = \lambda_c + \frac{2}{3}\mu_c, \qquad K'_i = K_i - K_c,$$

$$\lambda'_k = \lambda_k - \lambda_c, \qquad \mu'_k = \mu_k - \mu_c.$$

3. Числовой пример. Рассмотрим композитный материал со следующими свойствами, изотропную матрицу с характеристиками

$$\lambda_2 = 3 \text{ ГПа}, \qquad \mu_2 = 1{,}5 \text{ ГПа}, \qquad \frac{\chi_2}{\chi_0} = 10,$$

$$p_2 = 1{,}587 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2/\text{В}^2, \qquad q_2 = -1{,}27 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2/\text{В}^2$$

и включения с характеристиками

$$\lambda_1 = 65 \text{ ГПа}, \qquad \mu_1 = 25 \text{ ГПа}, \qquad \frac{\chi_1}{\chi_0} = 10^4,$$

$$p_1 = -0{,}78 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2/\text{В}^2, \qquad q_1 = 5{,}1 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2/\text{В}^2.$$

На рис. 1 представлена зависимость эффективного электрострикционного модуля q^* от концентрации включений при различных значениях электрострикционного модуля q_1

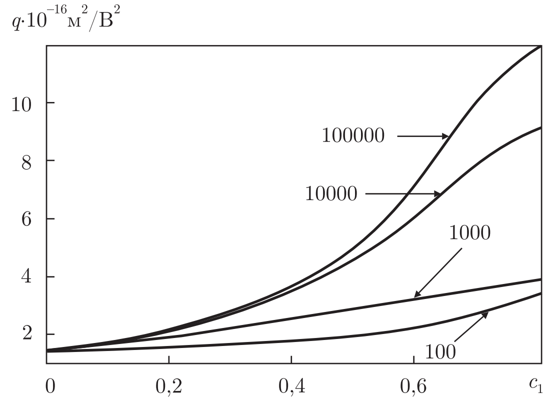

Рис. 3

включений. Для больших значений модуля q_1 с увеличением концентрации включений отмечается более медленный рост значения эффективного электрострикционного модуля q^*. На рис. 2 показана зависимость эффективного электрострикционного модуля p^* от концентрации включений при различных значениях электрострикционного модуля p_1 включений. Для абсолютного по величине значения модуля p^* наблюдается такая же зависимость, как и для q^*. Значение эффективных модулей существенно зависит от концентрации включений, а для концентрации включений начиная с $c_1 = 0{,}4$ существенно зависит от значений электрострикционных модулей включений. Зависимости эффективного электрострикционного модуля q^* от концентрации включений c_1 при различных значениях относительной диэлектрической проницаемости χ_1/χ_0 включений приведены на рис. 3. Из них видно, что значения эффективного модуля q^* существенно зависят от относительной диэлектрической проницаемости χ_1/χ_0 для всех концентраций включений c_1.

1. *Хорошун Л. П., Дородных Т. И.* Эффективные электроупругие постоянные пористых поликристаллов тригональной симметрии // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 10. – С. 63–74.
2. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. *Khoroshun L. P.* General dynamic equations of electromagnetomechanics for dielectrics and piezoelectrics // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 4. – P. 407–420.
4. *Kovalev Yu. D., Stativka.* Stress state of an inhomogeneous piezoceramic cylinder subject to bending // Ibid. – No 8. – P. 936–942.
5. *Wen C.-W., Weng G. J.* Theoretical approach to effective electrostriction in inhomogeneous materials // Phys. Rev. B. – 2000. – **61**, No 1. – P. 258–265.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Ташкентский университет Ислама

Поступило в редакцию 01.10.2007