



УДК 550.34.013:519.651

© 2008

А. С. Костинский

Интерполяционные сплайны в обратной задаче сейсмометрии с произвольными начальными условиями

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

Direct and inverse problems of “classic” seismometry with arbitrary initial conditions are considered. A general analytical solution of the direct problem expressed through characteristic numbers of the primary matrix for a pendulum — galvanometer system is suggested. A solution of the inverse problem is constructed for the situation where the record is assigned by its values in nodes of some (generally speaking, nonuniform) net. Spline structures as a tool of approximation of the record function are used; the role of boundary conditions is analyzed. The results can be used for the computation of theoretical accelerograms and the processing (interpretation) of earthquake records.

Уравнения движения сейсмографа — традиционный предмет сейсмологических исследований [1–5]. С появлением цифровой регистрации анализ системы маятник + гальванометр как основы действующего сейсмометрического инструментария утратил прежнюю актуальность. Однако большая часть эры инструментальных наблюдений — это период оптической регистрации, и необходимость интерпретации исторических записей заставляет возвращаться назад к проблеме восстановления “истинного” смещения почвы по сейсмограмме. Сейсмограф для интерпретатора — линейная система с более или менее точно заданными параметрами, для которой отклик на внешний импульс (запись) известен (с определенной точностью). Для электродинамических сейсмографов уравнения движения (содержащие также вторую производную смещения) могут быть решены в аналитическом виде без затруднений как в прямом направлении (относительно ординаты записи), так и в обратном (относительно смещения). Это удивительно, но не существует (как известно автору данного сообщения) выписанного общего решения прямой задачи в компактной, удобной для использования, форме. Как правило, доминирует решение обратной задачи, и это определяет точку зрения. Точка зрения в этом случае есть взгляд интерпретатора, который имеет сегмент записи и должен, исходя только из этого, восстановить импульс смещения. Интерпретатор выбирает часть записи, ограниченную сегментами с малой амплитудой, психологически руководствуясь ощущением, что на этих сегментах аппаратура “в основном в покое”

и он может положить постоянные, равными нулю. Но, очевидно, что это не так. Нулевая амплитуда записи не означает состояние покоя аппаратуры, тем более, что амплитуда определяется с ошибкой. Легко показать, что решение прямой задачи, полученное с помощью матрицы Грина, может быть обобщено на ненулевые начальные условия (произвольное состояние прибора). В обозначениях работы [6]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\varepsilon_s \frac{d\theta}{dt} + w_s^2\theta &= -\frac{1}{l_s} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma K \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon_g \frac{d\varphi}{dt} + w_g^2\varphi &= \frac{\gamma}{K} \frac{d\theta}{dt}, \quad \gamma^2 = 4\varepsilon_s\varepsilon_g\sigma^2, \quad K^2 = \frac{K_g}{K_s}, \end{aligned}$$

смещение почвы в сейсмической волне $x(t)$ и ордината записи $y(t) = 2A\varphi(t)$ (A — оптический рычаг) связаны уравнением

$$\frac{d^3x}{dt^3} = a_0 \frac{d^4y}{dt^4} + a_1 \frac{d^3y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_3 \frac{dy}{dt} + a_4y, \quad (1)$$

и “традиционное” решение, включающее постоянные $x(0)$, $\dot{x}(0)$, есть [6]:

$$\begin{aligned} y(t) \equiv y_0(t) &= \frac{1}{a_0} \left\{ x(0) \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k e^{-\lambda_k t} - \dot{x}(0) \sum_{k=1}^4 \alpha_k e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k^2 \int_0^t x(t') e^{-\lambda_k(t-t')} dt' \right\}, \\ y_0(0) &= 0, \quad \frac{dy_0}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2}(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь отрицательные числа a_k , $k = 1, 2, 3, 4$, пропорциональны коэффициентам характеристического уравнения матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ w_s^2 & 0 & 2\varepsilon_s & -\gamma K \\ 0 & w_g^2 & \frac{-\gamma}{K} & 2\varepsilon_g \end{pmatrix},$$

ее характеристические числа λ_k связаны с параметрами α_k соотношениями

$$\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

и тождествами

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\alpha_k}{\lambda_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^4 \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k = 0, \quad \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k^2 = 1,$$

образующими (справа) строку единичной 4×4 -матрицы E . Если требовать выполнения общих условий

$$y|_{t=0} = y(0), \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}(0), \quad \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} = \ddot{y}(0), \quad \left. \frac{d^3y}{dt^3} \right|_{t=0} = \dddot{y}(0)$$

(справа — заданные постоянные), то необходимы еще три тождества:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\alpha_k}{\lambda_k^2} = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}, \quad \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k^3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \quad \sum_{k=1}^4 \alpha_k \lambda_k^4 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} \lambda_i \lambda_j,$$

появляются дополнительные комбинации параметров $p_k, q_k, r_k, k = 1, 2, 3, 4$,

$$p_k = \frac{\frac{\alpha_k}{\lambda_k^2}}{\sum_{m=1}^4 \frac{\alpha_m}{\lambda_m^2}}, \quad q_k = \alpha_k \lambda_k - \alpha_k \sum_{m=1}^4 \alpha_m \lambda_m^3 + \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \left(\sum_{m=1}^4 \alpha_m \lambda_m^3 \right)^2 - \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \sum_{m=1}^4 \alpha_m \lambda_m^4,$$

$$r_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \sum_{m=1}^4 \alpha_m \lambda_m^3,$$

и связывающие их тождества

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 p_k &= 1, & \sum_{k=1}^4 p_k \lambda_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 p_k \lambda_k^2 &= 0, & \sum_{k=1}^4 p_k \lambda_k^3 &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 q_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 q_k \lambda_k &= 1, & \sum_{k=1}^4 q_k \lambda_k^2 &= 0, & \sum_{k=1}^4 q_k \lambda_k^3 &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 r_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 r_k \lambda_k &= 0, & \sum_{k=1}^4 r_k \lambda_k^2 &= 1, & \sum_{k=1}^4 r_k \lambda_k^3 &= 0, \end{aligned}$$

завершают (в правой части) конструкцию единичной матрицы E . Решение прямой задачи в этом случае записывается в таком виде:

$$\begin{aligned} y(t) = \widehat{L}x(t) &= y(0) \sum_{k=1}^4 p_k e^{-\lambda_k t} - \dot{y}(0) \sum_{k=1}^4 q_k e^{-\lambda_k t} + \ddot{y}(0) \sum_{k=1}^4 r_k e^{-\lambda_k t} - \\ &- \left[\ddot{y}(0) - \frac{1}{a_0} \ddot{x}(0) \right] \sum_{k=1}^4 \frac{\alpha_k}{\lambda_k} e^{-\lambda_k t} + y_0(t), \end{aligned} \quad (2)$$

что явно обнаруживает тот факт, что произвольное состояние прибора характеризуется четырьмя числами. Решение обратной задачи

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y + \left(a_2 + t a_3 + \frac{1}{2} t^2 a_4 \right) \int_0^t y dt - (a_3 + t a_4) \int_0^t t y dt + \\ &+ \frac{1}{2} a_4 \int_0^t t^2 y dt + C_0 + C_1 t + \frac{1}{2} C_2 t^2 \end{aligned} \quad (3)$$

просто следует из неоднородного (относительно $x(t)$) уравнения (1), постоянные C_0, C_1, C_2 могут быть выражены через начальное значение смещения и его производных:

$$C_0 = x(0) - a_0 \dot{y}(0) - a_1 y(0),$$

$$C_1 = \dot{x}(0) - a_0\ddot{y}(0) - a_1\dot{y}(0) - a_2y(0),$$

$$C_2 = \ddot{x}(0) - a_0\ddot{y}(0) - a_1\dot{y}(0) - a_2\dot{y}(0) - a_3y(0).$$

Будем предполагать, что импульс смещения сгенерирован процессом в очаге землетрясения, имеющем конечную “эффективную” длительность, так что функция $x(t)$ в существенной своей части локализована на отрезке $[0, t_{\max}]$, и $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(t_{\max}) = 0$.

Вместо формулы (3) можно записать

$$x(t) = a_0 \frac{dy}{dt} + a_1 y + \left(a_2 + ta_3 + \frac{1}{2}t^2 a_4 \right) \int_0^t y dt - (a_3 + ta_4) \int_0^t ty dt + \frac{1}{2}a_4 \int_0^t t^2 y dt -$$

$$- a_0 \dot{y}(0) - a_1 y(0) - (a_0 \ddot{y}(0) + a_1 \dot{y}(0) + a_2 y(0))t + C_2 t^2, \quad (4)$$

$$C_2 t_{\max}^2 = a_0 (\dot{y}(0) - \dot{y}(t_{\max})) + a_1 (y(0) - y(t_{\max})) + (a_0 \ddot{y}(0) + a_1 \dot{y}(0) + a_2 y(0))t_{\max} -$$

$$- \left(a_2 + t_{\max} a_3 + \frac{1}{2} t_{\max}^2 a_4 \right) \int_0^{t_{\max}} y dt + (a_3 + t_{\max} a_4) \int_0^{t_{\max}} ty dt - \frac{1}{2} a_4 \int_0^{t_{\max}} t^2 y dt,$$

и необходимо каким-то образом “угадать” значения постоянных, восстанавливая $x(t)$. Один из способов есть плайн-аппроксимация записи. Принимая во внимание то, что запись, заданная своими значениями в узлах сетки, есть во всех точках функция определенного (подходящего) класса гладкости — кубический или эрмитов сплайн, мы определяем тем самым класс гладкости смещения (поскольку аналитическое выражение смещения через запись известно). Если сплайн достаточно гладкий, решение обратной задачи удовлетворяет требованиям корректности, производные записи получаются также, как сплайн.

Сформулируем задачу более определенно. Пусть запись $y(t)$ задана на отрезке $[0, t_{\max}]$ своими значениями в узлах некоторой (не обязательно равномерной) сетки Δ : $0 = t_0 < \dots < t_N = t_{\max}$, т. е. известны ординаты $y_i = y(t_i)$, $i = 0, \dots, N$. Будем считать y_i точными значениями, предполагая, что система полностью описывается уравнением (1) (линейным оператором \hat{L}), а ошибки в измерении ординат равны нулю. Другими словами, y_i есть значения функции (2) в моменты времени t_i , $i = 0, \dots, N$, в модельной ситуации (рис. 1). Пунктирные линии обозначают здесь “истинные” данные, сплошные линии соответствуют “наблюдаемым”, требуется восстановить, насколько это возможно, “истину” по совокупности “наблюдаемых”.

Пусть функция $y(t)$ аппроксимирована кубическим интерполяционным сплайном $S_3(t) \equiv S_{3,1}(t)$, имеющим класс гладкости C^2 . Выражение для $y(t)$ в этом случае имеет вид [7]:

$$y(t) = S_3(t) = y_i(1 - \tau)^2(1 + 2\tau) + y_{i+1}\tau^2(3 - 2\tau) + m_i h_i \tau(1 - \tau)^2 - m_{i+1} h_i \tau^2(1 - \tau),$$

$$y(t_i) = S_3(t_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

где $h_i = t_{i+1} - t_i$, $\tau = (t - t_i)/h_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, и если подставить в правую часть (4), получается представление для $x(t)$ в виде кусочно-гладкого полинома степени 6 по t :

$$x(t) = P_6(x; t) = \sum_{n=0}^6 c_n^{i,i+1} t^n, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

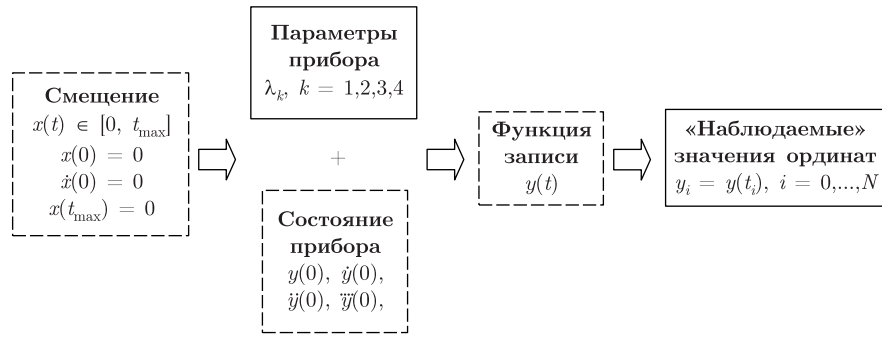


Рис. 1. Мысленный эксперимент: идеальная ситуация, в которой предстоит восстанавливать смещение

коэффициенты полинома, в общем, зависят от значений ординат y_i и производных m_i во всех узлах сетки:

$$m_i = S'_3(t_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Система уравнений для m_i имеет трехдиагональную матрицу и замкнута, если заданы дополнительные краевые условия. Для сглаживания неперiodических данных, как правило, используются три типа краевых условий [7]:

- 1) $S'_3(0) = e_0^{(1)}$, $S'_3(t_{\max}) = e_N^{(1)}$,
- 2) $S''_3(0) = e_0^{(2)}$, $S''_3(t_{\max}) = e_N^{(2)}$,
- 3) $S'''_3(t_p + 0) = S'''_3(t_p - 0)$, $p = 1, N - 1$,

а числа $e_0^{(1)}$, $e_N^{(1)}$ обычно либо приравниваются конечным разностям для условий 1-го типа

$$e_0^{(1)} = (1 + \mu_1) \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \mu_1 \frac{y_2 - y_1}{h_1}, \quad \mu_1 = \frac{h_0}{h_0 + h_1},$$

$$e_N^{(1)} = -\lambda_{N-1} \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-2}} + (1 + \lambda_{N-1}) \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{h_{N-1}}{h_{N-1} + h_{N-2}},$$

либо просто считаются равными нулю для “естественных” краевых условий 2-го типа. Именно этот вариант дает наихудшие результаты в алгоритме деконволюции (рис. 2), хотя вторая производная смещения восстанавливается практически без искажений во внутренних точках сетки для плотных равномерных сеток. Третью производную в формуле (4) при этом следует понимать как полусумму левого и правого предельных значений:

$$S'''_3(t_0) = \frac{6}{h_0^2} \left(m_1 + m_0 - 2 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right),$$

$$S'''_3(t_N) = \frac{6}{h_{N-1}^2} \left(m_N + m_{N-1} - 2 \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}} \right),$$

$$S'''_3(t_i + 0) = \frac{6}{h_i^2} \left(m_{i+1} + m_i - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right),$$

$$S'''_3(t_i - 0) = \frac{6}{h_{i-1}^2} \left(m_i + m_{i-1} - 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

$$S'''_3(t_i) = \frac{1}{2} \{ S'''_3(t_i + 0) + S'''_3(t_i - 0) \}, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

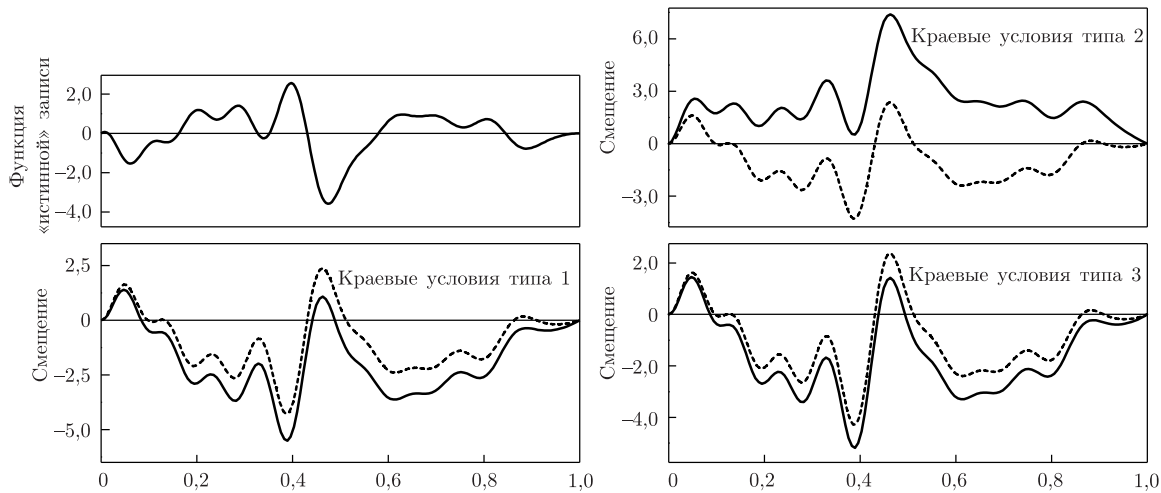


Рис. 2. Интерполяционные сплайны в алгоритме деконволюции. По функции «истинного» смещения (пунктирная кривая) рассчитывается «истинная» запись (вверху). Считаются исходными значения «истинной» записи на равномерной сетке Δ с числом узлов $N = 149$. Для краевых условий 1-го типа числа $e_0^{(1)}, e_N^{(1)}$ приравниваются конечным разностям, для условий 2-го типа конечные значения второй производной полагаются равными нулю. Параметры прибора: $T_s = 25,0$ с, $T_g = 1,2$ с, $D_s = 0,5$, $D_g = 8,0$, $\sigma^2 = 0,25$

Таким образом, «истинное» смещение может быть рассчитано для любого момента времени $t \in [0, t_{\max}]$, но если требуется строить «рабочие» акселерограммы, функции $P_6(t)$, имеющей класс гладкости C^1 , недостаточно. «Истинное» ускорение $\ddot{x}(t)$ меняется скачком в узлах сетки Δ , пиковые ускорения определяются неоднозначно. Чтобы избежать неоднозначности, необходимо перейти от S_3 к сплайну более высокой гладкости, по крайней мере, класса C^3 . Это может быть эрмитов сплайн степени 7 $S_{7,4}(t)$ [7]. Подобный подход, в свою очередь, допускает обобщение в ситуации, когда ордината записи задана с ошибкой. Значения интерполяционного (обычного) сплайна в узлах сетки совпадают со значениями функции, если известны только максимальные значения ошибок в узлах, необходимо строить сплайн, «более гладкий», чем интерполяционный, проходящий в «коридоре» вблизи заданных значений ординат. Это не меняет алгоритма деконволюции, поскольку аналитический вид такого сглаживающего сплайна такой же, как у интерполяционного.

1. Eaton J. P. Theory of electromagnetic seismograph // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1957. – **74**. – P. 37–75.
2. Hagiwara T. A note on the theory of the electromagnetic seismograph // Bull. of Tokyo Univ. – 1958. – **36**. – P. 139–164.
3. Neunhöfer H. Deconvolution of seismograms concerning the parameters of the seismograph // Gerl. Beitr. Geophys. – 1971. – **80**, No 6. – P. 290–296.
4. Перепелица В. А. Определение истинного вида смещения «почвы» по сейсмограмме. – Москва: Наука, 1974. – 77 с.
5. Плешингер А. Методы решения обратной задачи сейсмометрии и границы их практической применимости // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 9. – С. 38–55.
6. Костинский А. С., Спиртус В. Б. О влиянии характеристик сейсмографов на выделение вступлений волн в начальной части записи землетрясений // Геофиз. журн. – 1982. – **4**, № 3. – С. 32–41.
7. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.

Отдел сейсмологии Института геофизики
им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь

Поступило в редакцию 16.07.2007