Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2008

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.24:539.3.

Н. И. Никитенко, член-корреспондент НАН Украины **Ю. Ф. Снежкин, Н. Н. Сороковая, Ю. Н. Кольчик**

Развитие молекулярно-радиационной теории и метод расчета термоползучести

A molecular-radiative mathematical model of unsteady creep and a numerical method of solution of the system of equations for thermocreep in an area with mobile borders are given. As an example, the results of the modeling of thermocreep in a thick-walled pipe are presented.

Ползучесть представляет собой неравновесный процесс деформирования под действием внешних сил, при котором местоположение отдельных частиц тела непрерывно изменяется. Традиционно полагают [1–5], что для каждого конкретного материала зависимость деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{\text{п}}$ от напряжения σ, времени t и температуры T может быть представлена в виде произведения $\varepsilon_{ij}^{\text{п}} = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(T)$. Деформации ползучести при неизменных внешних нагрузках могут проявиться через очень короткий отрезок времени, если температура тела T является достаточно высокой, и через много лет, если она низкая. Столь сильная зависимость динамики процесса от температуры является характерной чертой активационных процессов, в частности диффузии, испарения, тепловой ионизации, диссоциации. Резкое возрастание их интенсивности с повышением температуры объясняется активацией частиц вследствие некоторых флуктуационных процессов, природа которых до недавнего времени оставалась неясной.

Математическая модель. На базе молекулярно-радиационной теории [6] сформулирован следующий механизм активационных процессов диффузии. Предельный уровень энергии $I_{\beta\nu}$, на котором может находиться частица компонента β в активационных процессах, определяется из условия $I_{\beta\nu}h\nu < A_\beta \leqslant (I_{\beta\nu}+1)h\nu$, где A_β — энергия активации. Частица, находящаяся на уровне $I_{\beta\nu}$, после поглощения фотона $h\nu$ активизируется и, отдавая энергию $(I_{\beta\nu}+1)h\nu$, разрывает связи с соседними частицами, совершает диффузионный переход. Функция $w_{i\nu}$ распределения частиц по энергиям в активационных процессах, которая найдена на основе закона интенсивности спектрального излучения частиц [7, 8], имеет вид [6]

$$w_{i\nu} = \left[1-\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]\left\{1-\exp\left[-(I_\nu+1)\frac{h\nu}{kT}\right]\right\}^{-1}\exp\left(-\frac{ih\nu}{kT}\right). \quad (1)$$

Из (1) при $I_{\beta\nu}\to\infty$ следует закон распределения Максвелла–Больцмана.

Согласно (1), масса частиц единичного объема, которые за единицу времени достигают энергии активации A и совершают диффузионный перескок, равна [6]

$$G = \frac{\overline{\varepsilon}\rho}{\exp(A/kT) - 1}, \tag{2}$$

где $\overline{\varepsilon}$ — осредненный по частотам коэффициент излучения.

Диффузия частиц вдоль линии действия внешних растягивающих напряжений σ требует меньших энергетических затрат по сравнению со случаем, когда $\sigma = 0$. Пусть тело имеет решетчатую структуру. Частицы связаны с узлами решетки и их число в каждом единичном объеме равно n. Расстояние между ближайшими узлами равно a. Частица, находящаяся на нулевом энергетическом уровне, после поглощения фотона $h\nu$, движущегося вдоль некоторой оси ξ, возбуждается и совершает колебания вдоль оси ξ. В дальнейшем частица поглощает и излучает фотоны $h\nu$, движущиеся параллельно этой оси. Если в результате поглощения фотонов $h\nu$ частица достигает энергии активации, то она совершает диффузионный перескок в направлении ξ.

Рассмотрим два слоя частиц, расположенных в плоскостях z и $z+a$ на расстоянии шага кристаллической решетки. Пусть внешняя сила σ направлена вдоль оси z. Динамика ползучести характеризуется плотностью результирующего потока J частиц вдоль оси z от слоя z к слою $z+a$. При перескоке частицы в направлении, составляющем угол θ по отношению к z, на частицу действует сила $f = \sigma\cos\theta/(na) = \sigma m\cos\theta/(\rho a)$, где m — масса частицы. Работа силы f на пути a равна $E_D = fa = \sigma m\cos\theta/\rho$. Энергия активации частицы для перескока в этом направлении равна $A_\sigma(\theta) = A - \sigma m\cos(\theta)/\rho$. Масса частиц $dG(\varphi)$ из слоя z единичной площади, достигающих за единицу времени энергии активации и совершающих диффузионный перескок под углом θ к внешней силе в элементарный телесный угол $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, где φ — угол долготы, равна $dG(\theta) = a\overline{\varepsilon}\rho\{\exp[(A - \sigma m\cos\theta/\rho)/(kT)] - 1\}^{-1} \times \sin\theta d\theta d\varphi$.

Плотность потока частиц через, покидающих плоскость z и движущихся в полусферу $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, равна

$$J^+ = a\overline{\varepsilon}\rho \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\exp\left(\frac{A - \sigma m\cos\theta/\rho}{kT}\right) - 1\right]^{-1} \cos\theta\sin\theta d\theta.$$

При условии $\exp[(A - \sigma m\cos\theta/\rho)/kT] \gg 1$ из последнего выражения следует

$$J^+ = 2\pi a\overline{\varepsilon}\rho\exp(-N_{\text{д}})\frac{\exp(N_\sigma)(N_\sigma - 1) + 1}{N_\sigma^2}. \tag{3}$$

Здесь N_σ и $N_{\text{д}}$ — критерии подобия, $N_{\text{д}} = A/(kT)$, $N_\sigma = \sigma m/(\rho kT)$. Число $N_{\text{д}}$ характеризует диффузионную активность частиц тела, а N_σ определяет влияние внешних сил, температуры и плотности материала на динамику смещения частиц тела.

Аналогично находится плотность потока частиц J^- в отрицательном направлении оси z. Результирующая плотность потока массы частиц

$$J = J^+ - J^- = 4\pi a\overline{\varepsilon}\rho\frac{\exp(-N_{\text{д}})\,\mathrm{sh}(N_\sigma)(N_\sigma - 1)}{N_\sigma^2}. \tag{4}$$

Скорость ползучести вдоль оси z пропорциональна результирующему потоку J

$$\dot{\varepsilon}^{\text{п}} = \gamma \frac{J}{a\rho} = B \frac{\exp(-N_{\text{д}}) \operatorname{sh}(N_\sigma)(N_\sigma - 1)}{N_\sigma^2} = g(T) f(\sigma, T), \tag{5}$$

где $\gamma = \text{const}$; $B = \gamma 4\pi\overline{\varepsilon}$; $g(T) = B\exp(-N_{\text{д}})$; $f(\sigma, T) = \operatorname{sh}(N_\sigma)(N_\sigma - 1)/N_\sigma^2$. Когда $\sigma = 0$, величина $\dot{\varepsilon}^{\text{п}} = 0$. Поскольку при ползучести тело ведет себя как несжимаемая жидкость, возникновение потока частиц вдоль внешней силы приводит к увеличению размера тела вдоль оси z и к уменьшению вдоль осей x и y.

Напряженно-деформированное состояние тела, подвергающегося ползучести вследствие действия внешних сил и неравномерного поля температуры, характеризуется тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}, определяемых шестью независимыми компонентами. Для этого тела, как и в случае упругих и пластических деформаций, справедливы уравнения равновесия, геометрические уравнения взаимосвязи между компонентами тензора деформаций ε_{ij} и вектора перемещения u_i, уравнение переноса энергии. Полная деформация ε_{ij} тела складывается из упругой деформации $\varepsilon_{ij}^{\text{у}}$ и деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{\text{п}}$ [3]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{у}} + \varepsilon_{ij}^{\text{п}}. \tag{6}$$

Тензор $\varepsilon_{ij}^{\text{у}}$ связан с тензором напряжений следующими уравнениями [3]:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{у}} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ij}\delta_{ij}}{E} + \alpha T \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — единичный тензор; α — коэффициент линейного и термического расширения.

Согласно экспериментальным данным, деформации ползучести тела протекают без изменения его объема. Для такой несжимаемой среды справедливы уравнения

$$\varepsilon_{11}^{\text{п}} + \varepsilon_{22}^{\text{п}} + \varepsilon_{33}^{\text{п}} = 3\varepsilon_{\text{ср}}^{\text{п}} = \text{const} \qquad \text{и} \qquad \dot{\varepsilon}_{11}^{\text{п}} + \dot{\varepsilon}_{22}^{\text{п}} + \dot{\varepsilon}_{33}^{\text{п}} = 0. \tag{8}$$

После освобождения тела от внешних нагрузок и выравнивания температуры тело переходит в состояние равновесия. Как и для несжимаемой жидкости, для произвольной частицы тела, расположенной внутри тела, равнодействующая сил взаимодействия с другими его частицами равна нулю. Только для частиц, расположенных в окрестности граничной поверхности, эта равнодействующая отлична от нуля. Поэтому в энергетическом отношении мера остаточных деформаций, возникших вследствие ползучести при неизменной температуре тела, полностью определяется изменением площади его наружной поверхности, и при расчете динамики ползучести достаточно учитывать изменение геометрии тела, обусловленное остаточными деформациями. В теории ползучести, как и в теории течения вязкой жидкости, принимается существование однозначной зависимости между интенсивностью скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}}$ и интенсивностью напряжений $\sigma_{\text{и}}$. При этом для каждой точки тела она сохраняется такой же, как для одномерной ползучести, обусловленной одноосным растягивающим (или сжимающим) напряжением, считается известной и может быть представлена в виде [3, 4]

$$\dot{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}} = \Psi \sigma_{\text{и}}, \tag{9}$$

где

$$\chi_{\text{и}} = \frac{\sqrt{(\chi_{11}-\chi_{22})^2+(\chi_{22}-\chi_{33})^2+(\chi_{33}-\chi_{11})^2+6(\chi_{12}^2+\chi_{23}^2+\chi_{31}^2)}}{\sqrt{2}}, \qquad \chi = \dot{\varepsilon}^{\text{п}}, \sigma.$$

Так как выражение (9) для скорости деформации ползучести $\dot{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}}$ аналогично по форме закону Гука для упругого тела, то зависимость между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора скоростей деформаций может быть получена заменой в известных уравнениях теории упругости [4] деформаций на скорость деформации и модуля сдвига на модуль ползучести $\mu^{\text{п}}$. С учетом (8) находим, что

$$\sigma_{ii} - \sigma_{\text{ср}} = 2\mu^{\text{п}}\dot{\varepsilon}_{ii}^{\text{п}}, \qquad \sigma_{ij} = \mu^{\text{п}}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{п}}, \qquad \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}. \tag{10}$$

Так как при одноосном растяжении $\sigma_{22}+\sigma_{33}=0$ и $\sigma_{\text{ср}}=\sigma_{11}/3$, из первого уравнения системы (10) находим $\varepsilon_{11}^{\text{п}} = 2\sigma_{11}/(3\mu^{\text{п}})$. Поскольку деформация $\varepsilon_i^{\text{п}}$ связана с σ_i той же зависимостью, что и в эксперименте по одноосному растяжению (9), то

$$\frac{1}{3\mu^{\text{п}}} = \Psi = \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{и}}^{\text{п}}}{\sigma_{\text{и}}} = \frac{gf}{\sigma_{\text{и}}}. \tag{11}$$

Из уравнений (10) и (11) следует

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^{\text{п}} = \Omega(\sigma_{ii}-\sigma_{\text{ср}}); \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{п}} = 2\Omega\sigma_{ij}, \qquad i \neq j; \qquad \Omega = \frac{3gf}{2\sigma_{\text{и}}}. \tag{12}$$

В соответствии с уравнениями (6), (7) и (12) выражения для компонентов тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t_n)$, возникающих вследствие изменений внешних напряжений, массовых сил, температуры и геометрии тела принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ij}\delta_{ij}}{E} + \alpha T\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{\text{п}}, \qquad \varepsilon_{ij}^{\text{п}} = \int\limits_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{п}}\,dt. \tag{13}$$

Если в уравнениях (13) для ε_{ii}, $i=1,2,3$, два последних члена перевести в левую часть и ввести обозначения

$$\varepsilon'_{ii} = \varepsilon_{ii} - \alpha T - \varepsilon_{ii}^{\text{п}}, \tag{14}$$

то они примут вид, аналогичный уравнениям линейной упругости. Их разрешение относительно компонентов напряжения σ_{ii}, $i=1,2,3$, дает

$$\sigma_{ii} = 2\mu_1\varepsilon'_{ii} + \mu_2(\varepsilon'_{11}+\varepsilon'_{22}+\varepsilon'_{33}), \tag{15}$$

где μ_1 и μ_2 — коэффициенты Ламе, $\mu_1 = E_{\text{у}}/[2(1+\nu)]$ и $\mu_2 = E_{\text{у}}/[(1-2\nu)(1+\nu)]$.

В результате совместного решения уравнений (8), (14), (15), а также геометрических уравнений $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = (u_{i,j}+u_{j,i})/2$ взаимосвязи между компонентами тензора ε_{ij} и компонентами вектора смещения $u_{i,j}$ находим, что

$$\sigma_{ii} = 2\mu_1\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) - (2\mu_1+3\mu_2)\alpha T - 2\mu_1\varepsilon_{ii}^{\text{п}}; \tag{16}$$

$$\sigma_{ij} = \mu_1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \mu_1\varepsilon_{ij}^{\text{п}}, \qquad i \neq j. \tag{17}$$

После подстановки полученных выражений в уравнения равновесия $\sigma_{ij,j}+\rho X_i = 0$ получаем уравнение термоползучести в перемещениях, которое в проекции на ось x_1 имеет следующий вид:

$$(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu_1\nabla^2 u_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}[(2\mu_1+3\mu_2)\alpha T] - \mu_1\left(2\frac{\partial\varepsilon_{11}^{\text{п}}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varepsilon_{12}^{\text{п}}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varepsilon_{13}^{\text{п}}}{\partial x_3}\right)+\rho F_1 = 0, \tag{18}$$

где $\theta = 3\varepsilon_{\text{ср}} = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} = \partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2+\partial u_3/\partial x_3$. Для нахождения содержащейся в (18) температурной функции T используется уравнение переноса энергии [7]

$$c_v\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + (2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{19}$$

Если на граничной поверхности S заданы напряжения, тогда граничные условия записываются таким образом:

$$p_{i\nu}(x_{1,\text{гр}}, x_{2,\text{гр}}, x_{3,\text{гр}}, t) = \sigma_{i1}\cos(x_1,\nu) + \sigma_{i2}\cos(x_2,\nu) + \sigma_{i3}\cos(x_3,\nu), \qquad i = 1, 2, 3,$$

где ν — нормаль к граничной поверхности S.

По найденным в результате решения уравнений (18), (19) при заданных краевых условиях функциям u_i, $i = 1, 2, 3$, и T определяются компоненты тензоров напряжений и деформаций для момента времени $t_{\text{к}}$.

Процесс ползучести может сопровождаться заметными изменениями геометрических параметров тела. Для учета этого фактора период протекания процесса ползучести $0 \leqslant t \leqslant$ $\leqslant t_{\text{к}}$ разбивается на участки Δt_s согласно условию $t_s = t_{s-1} + \Delta t_s$ $(s = 1, 2, \ldots, S, t_S = t_{\text{к}})$. После проведения решения задачи (12)–(19) для участка Δt_s осуществляется коррекция геометрии тела в соответствии с деформациями ползучести в точках граничной поверхности.

Численный метод решения задач термоползучести. Численное решение уравнений (18) и (19) для тела произвольной конфигурации проводится на базе метода канонических элементов [9, 10]. Для простоты изложения рассмотрим двумерную односвязную область в декартовых координатах (x, y). В ней вводится регуляризированная [9] разностная сетка: $y_m = y_{m-1} + h_{y,m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, M;\ y_0 = y';\ y_M = y'')$; $x_{im} = x_{i-1,m} + h_{x,i-1,m}$ $(i = 1, 2, \ldots, I_m;\ x_{0m} = x'_m;\ x_{I_m,m} = x''_m)$. Здесь y' и y'' — минимальные и максимальное значения координаты y для точек области; x'_m и x''_m — то же для координаты x точек сечения области координатной прямой y_m.

Производные от функций, содержащихся в исходных дифференциальных уравнениях, для произвольной внутренней узловой точки области определяются через производные вдоль нормалей к граничным поверхностям канонического элемента, который строится в окрестности этой узловой точки при помощи координатных поверхностей ортогональной системы координат. Для узловой точки $(x_{im},\ y_m)$ каноническим элементом является прямоугольник, образованный координатными прямыми $x = x_{i+0,5,m}$, $x = x_{i-0,5,m}$, $y = y_{m+0,5}$, $y = y_{m-0,5}$.

Решение уравнения (19) на временной сетке $t_n = nl_T$ $(n = 1, 2, \ldots, l_T = \text{const})$ проводится на базе трехслойной явной разностной схемы Н. И. Никитенко [11]

$$c_v\rho[(1 + \theta_T)\delta_t T - \theta_T\delta_t T^{n-1}] = \sum_{\beta=0}^{\text{B}}\sum_{i=1}^{3}\delta_j(\lambda\delta_j T) + (2\mu_1 + 3\mu_2)\alpha T\delta_t(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \tag{20}$$

где весовой параметр $\theta_T \geqslant 0$. Первые производные от искомой функции W по t и по x на гранях элемента $x = x_{i+0,5,m}$ и $x = x_{i-0,5,m}$ определяется разностными отношениями

$$\begin{aligned}
&\delta_t W_{im}^n = \frac{W_{im}^{n+1} - W_{im}^n}{l_T}, \qquad \delta_x W_{i+0,5,m} = \frac{W_{i+1,m} - W_{im}}{h_{xim}},\\
&\delta_x W_{i-0,5,m} = \frac{W_{im} - W_{i-1,m}}{h_{x,i-1,m}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Производные $\partial W/\partial x$ и $\partial(\lambda \partial W)/\partial x^2$ в точке $(x_m,\, y_m)$ аппроксимируются выражениями

$$\begin{aligned}
&\delta_x W_{im} = \alpha_x \delta_x W_{i+0.5,m} + (1-\alpha_x)\delta_x W_{i-0,5,m},\\
&\delta_x(\lambda \delta_x W_{im}) = \frac{\lambda_{i+0,5,m}\delta_x W_{i+0,5,m} - \lambda_{i-0,5,m}\delta_x W_{i-0,5,m}}{\dfrac{h_{xim} + h_{x,i-1,m}}{2}},
\end{aligned} \tag{22}$$

где $\alpha_x = h_{x,i-1,m}/(h_{xim} + h_{x,i-1,m})$, $\lambda_{i+0,5,m} = (\lambda_{i+1,m} + \lambda_{im})/2$.

Производная $\partial W/\partial y$ в точке $(x_{im},\, y_{m+0,5})$ грани $y = y_{m+0,5}$ канонического элемента с погрешностью $O(h_{xim}^2 + h_{ym}^2)$ определяется по формуле [9]

$$\begin{aligned}
\delta_y W_{i,m+0,5} = {} & \frac{(W_{i'',m+1} - W_{im})h''_{x,m+1} + (W_{i''+1,m+1} - W_{im})h'_{x,m+1}}{h_{ym}(h'_{x,m+1} + h''_{x,m+1})} - \\
& - \frac{h'_{x,m+1}h''_{x,m+1}}{2h_{ym}}\delta_{xx}W_{i,m},
\end{aligned} \tag{23}$$

где $h'_{x,m+1} = x_{im} - x_{i'',m+1}$, $h''_{x,m+1} = x_{i''+1,m+1} - x_{im}$. Формула (23) получена на базе дифференциальных уравнений [9], определяющих взаимосвязь между производными от скалярной функции в направлении осей ортогональных и неортогональных координат.

Абсциссы $x_{i'',m+1}$ и $x_{i''+1,m+1}$узловых точек $(x_{i'',m+1},\, y_{m+1})$ и $(x_{i''+1,m+1},\, y_{m+1})$, лежащих на прямой $y = y_{m+1}$ на ближайшем расстоянии от прямой $x = x_{im}$, определяются из условия

$$\begin{aligned}
&|x_{i'',m+1} - x_{im}| + |x_{i''+1,m+1} - x_{im}| = \min(|x_{s,m+1} - x_{im}| + |x_{s+1,m+1} - x_{im}|),\\
&s = 1, 2, \ldots, I_{m+1} - 1.
\end{aligned} \tag{24}$$

Если одна из точек $(x_{i'',m+1},\, y_{m+1})$ или $(x_{i''+1,m+1},\, y_{m+1})$ лежит в плоскости $x = x_{im}$, то формула для $\delta_y W_{i,m+0,5}$ переходит в симметричное разностное соотношение, аналогичное выражению для $\delta_x W_{i+0,5,m}$. Разностные выражения производных $\partial W/\partial y$, $\partial^2 W/\partial y^2$ и $\partial^2 W/\partial x \partial y$ в узловой точке (x_{im}, y_m) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\delta_y W_{im} = \alpha_y \delta_y W_{i,m+0,5} + (1-\alpha_y)\delta_y W_{i,m-0,5}, \qquad \alpha_y = \frac{h_{y,m-1}}{h_{ym} + h_{y,m-1}};\\
&\delta_{yy} W_{im} = \frac{\delta_y W_{i,m+0,5} - \delta_y W_{i,m-0,5}}{y_{m+0,5} - y_{m-0,5}}; \qquad \delta_{xy} W_{im} = \frac{y_{m+0,5} - y_{m-0,5}}{x_{i,m+1} - x_{i,m-1}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

При граничных условиях первого рода функция W в граничных точках считается заданной. Для нахождения температуры $T_{I,m}^{n+1}$ в некоторой граничной узловой точке, например в точке $(x_{I,m}, y_m)$, при граничных условиях второго или третьего рода целесообразно ввести в рассмотрение приграничный элемент, одна из сторон которого образована границей области и может быть криволинейной, две другие — координатными прямыми. Одна из них параллельна оси x и проходит через точку $(x_{I,m+0,5}, y_{m+0,5})$, если производная $\Pi_y = (x_{I,m+1} - x_{I,m-1})/(2h_y) > 0$, и через точку $(x_{I,m-0,5}, y_{m-0,5})$, если эта производная меньше нуля. Вторая прямая есть $y = y_{m-0,5}$, если $\Pi_y > 0$ или $y = y_{m+0,5}$, если $\Pi_y < 0$. Плотности потоков энергии через границы элементов $y = y_{m-0,5}$, $y = y_{m+0,5}$ определяются по формулам $q'_{yIm} = \lambda_{I,m-0,5}\delta_y T_{I,m-0,5}$ и $q''_{yIm} = \lambda_{I,m+0,5}\delta_y T_{I,m+0,5}$. Уравнение баланса энергии для приграничного элемента треугольной формы при $\Pi_y < 0$, согласно трехслойной явной разностной схемой [11], можно записать в виде

$$S_{\text{тр}} c\rho\left[(1+\theta)\frac{T_{Im}^{n+1} - T_{Im}^{n}}{l} - \theta\frac{T_{Im}^{n} - T_{Im}^{n-1}}{l}\right] = \overline{q}_{xIm} h_y + q'_{yIm}\overline{h}_{xm} - q_{\text{г}} h_{\text{г}}. \qquad (26)$$

Площадь треугольного элемента $S_{\text{тр}}$ для случая, когда кривизной граничной поверхности можно пренебречь, равна $S_{\text{тр}} = h_y \overline{h}_{xm}/2$; $\overline{h}_{xm} = |x_{I,m+0,5} - x_{I,m-0,5}|$; $q_{\text{г}}$ — плотность теплового потока на границе области, $q_{\text{г}} = \lambda \partial T(x_{\text{г}}, y_{\text{г}}, t)/\partial\nu$. Плотность теплового потока $\overline{q}_{xim}$ через координатную поверхность $x = x_{I,m+0,5}$ или $x = x_{I,m-0,5}$ с погрешностью порядка h_{xm}^2 определяется по разностной формуле $\overline{q}_{xim} = \lambda(\alpha_0 T_{Im}^n + \alpha_1 T_{I-1,m}^n + \alpha_2 T_{I-2,m}^n)$, где $\alpha_0 = (3h_{xm} - \overline{h}_{xm})/(5h_{xm}^2 - 4h_{xm}\overline{h}_{xm})$, $\alpha_1 = (1 - 2h_{xm}\alpha_0)/h_{xm}$, $\alpha_2 = -(\alpha_0 + \alpha_1)$.

Уравнения (19) решаются методом установления через интервал времени $\Delta t \geqslant l_T$, т. е. в моменты времени $t_s = s\Delta t$ $(s = 0, 1, \ldots, \Delta t = \text{const})$. Интервал Δt целесообразно выбирать таким, чтобы на нем укладывалось целое число шагов l_T. Решение осуществляется методом установления. При этом к правым частям уравнений (19) прибавляется произведение модуля сдвига μ_1 и производной $\partial u_i/\partial\tau$ по фиктивному времени τ, выполняющему роль итерационного параметра. Шаг по τ выбирается согласно условию $\tau_n = nl_u$ $(n = 0, 1, \ldots, l_u > 0)$, причем на слое $n = 0$ сеточная функция $u_{ik_1k_2k_3}^n$ принимается равной $u_{ik_1k_2k_3}^s$. Численное решение преобразованных к нестационарному виду уравнений (19) базируется на трехслойной явной разностной схеме. Разностная аппроксимация первого из уравнений системы (19) имеет вид

$$(1+\theta_u)\delta_\tau u_1 - \theta_u\delta_\tau u_1^{n-1} = \sum_{j=1}^{3}\delta_{jj}u_1 + \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\sum_{j=1}^{3}\delta_{1j}u_j - \left(2 + 3\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\alpha\delta_1 T - \\ - (2\varepsilon_{11}^{\text{п}} + \varepsilon_{12}^{\text{п}} + \varepsilon_{13}^{\text{п}}) + \rho\frac{F_1}{\mu_1}. \qquad (27)$$

С применением функций $u_{ik_1k_2k_3}^{n+1}$ и $T_{k_1k_2k_3}^{s+1}$ находятся компоненты тензора напряжений $\sigma_{ijk_1k_2k_3}^{n+1}$ и интенсивности напряжений $\sigma_{\text{и}k_1k_2k_3}^{n+1}$. Итерации прекращаются, когда функции $u_{ik_1k_2k_3}^{n+1}$ на временных слоях n и $n+1$ практически совпадают. При этом сеточным функциям u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, σ_i, $\varepsilon_{ij}^{\text{п}}$ на слое $s+1$ присваиваются значения этих функций на слое $n+1$, и они служат исходными для расчета искомых функций на слое $s+2$. Если деформации ползучести $\varepsilon_{ij}^{\text{п}}$ за период Δt превышают некоторое допустимое значение с точки зрения погрешности решения задачи, осуществляется изменение геометрии тела, исходной для временного стоя t_{s+2}. Для этого в результате суммирования для каждой граничной узловой точки ее радиуса-вектора в момент t_s и вектора смещения этой точки вследствие ползучести

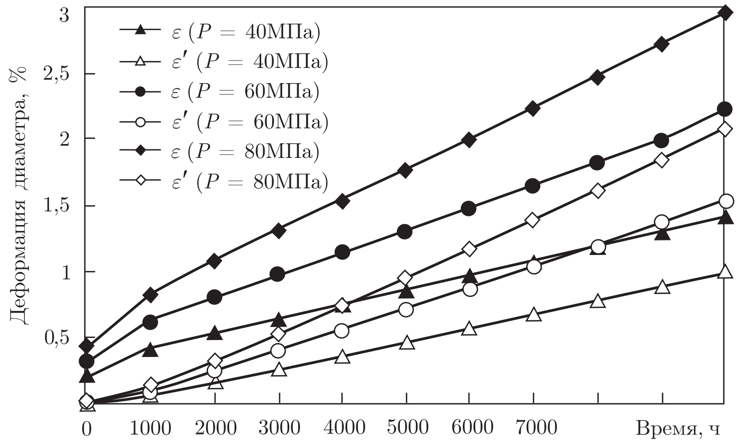

Рис. 1. Графики изменения общей деформации ε и деформации ползучести $\varepsilon' = \varepsilon^{\text{п}}$ наружного диаметра полого цилиндра при различных давлениях давлениях ρ на его внутренней поверхности

за время Δt_s находится массив координат точек, определяющих геометрию тела в момент времени t_{s+1} при условии отсутствия внешних нагрузок. На базе этого массива строится так же, как и для начального момента времени, регуляризированная разностная сетка.

Ползучесть толстостенной трубы при осесимметричном нагружении. Описанный метод решения был численно опробован при решении задачи ползучести для однородного достаточно длинного полого цилиндра $r_0 \leqslant r \leqslant R$ с постоянными физическими характеристиками. Начиная с момента $t = 0$, цилиндр подвергается равномерно распределенному давлению $p(r_0, t) = P(t)$ на внутренней поверхности и $p(R, t) = p_R(t)$ — на внешней. В направлении оси z к цилиндру приложена нагрузка $P_z(t)$. Для уравнения теплопроводности принимаются следующие краевые условия: $T(r_0, t) = T_1(t)$, $T(R, t) = T_2(t)$, $T(r, 0) = T_0$.

Вследствие ползучести накапливаются необратимые изменения геометрии тела. Они могут быть учтены изменением разностной сетки согласно выражению $r_i^{s+1} = r_i^s + l_s(\dot{\varepsilon}^{\text{п}}_{\vartheta\vartheta})_i^{s+1} r_i^s$, либо путем нахождения по (27) смещений граничных поверхностей с последующим построением равномерной пространственной сетки. Численные эксперименты показали: оба варианта коррекции геометрии дают практически одинаковые результаты. На рис. 1 приведены результаты расчета общей деформации ε и деформации ползучести $\varepsilon' = \varepsilon^{\text{п}}$ (остаточной деформации) наружного диаметра стального цилиндра в изотермических условиях в зависимости от времени и внутреннего давления при следующих исходных данных: $r_0 = 0{,}0125$ м, $R = 0{,}025$ м, $T = 723_K$, $B = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$. Представленные на рис. 1 кривые имеют вид, характерный для экспериментальных кривых ползучести [3, 4].

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. – Москва: Физматгиз, 1960. – 452 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 452 с.
3. *Безухов Н. И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – Москва: Высш. шк., 1968. – 512 с.
4. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – Москва: Мир, 1986. – 360 с.
5. *Никитенко Н. И., Никитенко Н. Н.* Численное моделирование взаимосвязанных процессов теплопереноса и ползучести // Тепловое проектирование систем. Сб. научн. трудов. – Москва: МАИ, 1990. – С. 31–40.
6. *Никитенко Н. И.* Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инж.-физ. журн. – 2000. – **73**, № 4. – С. 851–860.
7. *Никитенко Н. И.* Теория тепломассопереноса. – Киев: Наук. думка, 1983. – 352 с.

8. *Никитенко Н. И.* Закон интенсивности спектрального излучения частиц и связанные с ним проблемы тепло- и массопереноса. Пятый Минский междунар. форум по тепло- и массообмену. – Т. 1. Тез. докл. – Минск, 2004. – С. 204–206.
9. *Никитенко Н. И.* Об усовершенствовании метода канонических элементов для моделирования процессов переноса в системах с криволинейными границами // Инж.-физ. журн. – 1994. – **66**, № 6. – С. 710–714.
10. *Никитенко Н. И., Кольчик Ю. Н.* Метод канонических элементов для моделирования переносных процессов в многосвязных областях произвольной формы границами // Там же. – 1999. – **72**, № 5. – С. 837–847.
11. *Никитенко Н. И.* Сопряженные и обратные задачи тепломассопереноса. – Киев: Наук. думка, 1988. – 240 с.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев
Киевский национальный университет
строительства и архитектуры

Поступило в редакцию 24.07.2007