УДК 531.1+517.9



**Н. В. Никитина**

# О принципе кососимметрии

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Мартынюком)*

*The principle of skew-symmetry which can be applied as a criterion of the existence of periodic solutions is presented. The example of a limiting cycle with skew-symmetry is given.*

Принцип симметрии приведен как критерий существования периодических решений в работе [1]. При помощи расширения принципа симметрии на двухчастотные системы можно идентифицировать квазипериодические движения [2]. В [3] отмечено, что замыкание фазовой траектории происходит при кососимметрии. Ниже сформулирован принцип кососимметрии, который также можно применять как критерий существования периодических решений. Приведен пример предельного цикла, имеющего кососимметрию.

**1. Предварительные сведения.** Рассматривается движение двухмерной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2); \qquad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2). \tag{1}$$

Пусть начало координат системы (1) — особая точка. Приведем геометрический принцип симметрии, на основе которого можно идентифицировать замыкание фазовой траектории.

В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно $x_1$ и нечетности функции $F_2(x)$ относительно $x_1$, т. е.

$$\begin{aligned} &F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), \\ &F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство основано на том, что на плоскости $Ox_1x_2$ ось $Ox_2$ является осью симметрии, и всякая интегральная кривая слева от оси $x_2$ является зеркальным отображением кривой справа.

На основании принципа симметрии также можно заключить, что в системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_2(x)$ относительно $x_2$ и нечетности $F_1(x)$ относительно $x_2$, т. е.

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2), \\ &F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь ось $Ox_1$ является осью симметрии. Замыкание траектории за период, согласно принципу геометрической симметрии, происходит, когда верхняя кривая в силу равенств (3) является зеркальным отображением нижней. Симметричность кривой при выполнении условий вида (2), (3) связана с определенной системой координат. Поэтому приведенный выше принцип симметрии носит достаточный характер.

Пусть колебательное движение двух связанных нелинейных осцилляторов описывается векторным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{4}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$ — вектор состояния системы в момент $t \in \mathbb{R}$, $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

В системе (4) существуют квазипериодические движения, если выполняются условия четности функций $F_k$ $(k = 2,4)$ относительно $x_2$, $x_4$ и нечетности функций $F_j$ $(j = 1,3)$ относительно $x_2$, $x_4$, т. е.

$$\begin{aligned} &F_k(x_1, -x_2, x_3, -x_4) = F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (k = 2,4),\\ &F_j(x_1, -x_2, x_3, -x_4) = -F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (j = 1,3). \end{aligned} \tag{5}$$

В системе (4) существуют квазипериодические движения, если выполняются условия четности функций $F_k$ $(k = 1,3)$ относительно $x_1$, $x_3$ и нечетности функций $F_j$ $(j = 2,4)$ относительно $x_1$, $x_3$, т. е.

$$\begin{aligned} &F_k(-x_1, x_2, -x_3, x_4) = F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (k = 1,3),\\ &F_j(-x_1, x_2, -x_3, x_4) = -F_j(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (j = 2,4). \end{aligned} \tag{6}$$

Замыкание траектории относительно начала координат, согласно (2), (3), имеет место в случае седла-центра. Тогда замкнутая траектория содержит седловые решения. Здесь доминирует свойство симметрии. Кривая замыкается, однако ось симметрии может быть одна.

В силу равенств (5), (6) приведены случаи, когда "складываются" два периодические движения, имеющих симметрию. Два связанных нелинейных осциллятора могут иметь режимы биения, хаоса (диссипативные системы — синхронизацию в узком диапазоне параметров). Здесь симметрия не доминирует и неустойчивые точки типа седло-центр могут быть причиной разделения движений на регулярные и хаотические. Для консервативных систем разделение определяется уровнем энергии; для диссипативных — начальными условиями.

В работе [2] показано, что тор, соответствующий квазипериодическим движениям, имеет две оси симметрии в фазовом сечении. В [4] также начало качественного исследования связано с принципом симметрии.

**2. Принцип кососимметрии** связан с кососимметрией векторного поля, определяемого системой (1). В системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (1), связаны следующими условиями:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2),\\ &F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Если, например, ось кососимметрии $Ox_1$, то область в первом квадранте $U$, равна области в третьем квадранте. Область во втором квадранте $V$ равна области в четвертом квадранте. Это означает, что качество кососимметрии связано с двумя осями. То есть, если ось $Ox_1$ является осью кососимметрии, то ось $Ox_2$ также суть ось кососимметрии и тогда

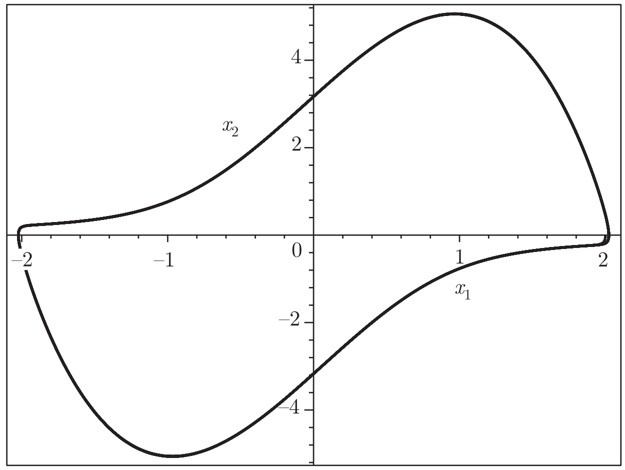


Рис. 1. Кососимметричная замкнутая кривая

в системе (1) существует замкнутая траектория, если функции, стоящие в правой части системы (7), связаны следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
&F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2),\\
&F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

П р и м е р 1. Уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt},$$

приведенное к системе первого порядка

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

уравнения которой удовлетворяют условиям (7), (8). Таким образом, траектория уравнений (9) имеет две оси кососимметрии и замкнута для больших и малых значений параметра [5]. Для иллюстрации приведен фазовый портрет ($\mu = 3$). Замкнутая траектория имеет две оси кососимметрии (рис. 1).

При сложении двух периодических движений, одно из которых имеет симметрию, другое — кососимметрию, существование в системе (4) квазипериодических движений определяется следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, -x_2, -x_3, x_4) = -F_1(-x_1, x_2, x_3, x_4),\\
&F_2(-x_1, x_2, -x_3, x_4) = -F_2(x_1, -x_2, x_3, x_4),\\
&F_3(x_1, x_2, -x_3, x_4) = F_3(x_1, x_2, x_3, x_4),\\
&F_4(x_1, x_2, -x_3, x_4) = -F_4(x_1, x_2, x_3, x_4).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

П р и м е р 2. Уравнение Ван дер Поля при периодическом воздействии

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 + x_{30}\cos t$$

можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_2; \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 + x_3; \\ &\frac{dx_3}{dt} = x_4, \qquad \frac{dx_4}{dt} = -x_3 \end{aligned} \tag{11}$$

при следующих начальных условиях: $t = 0$; $x_3 = x_{30}$; $x_1 = x_2 = x_4 = 0$.

Уравнения системы (11) удовлетворяют условиям (10). Для больших значений параметра следует сделать более полный анализ. Заметим, что в приведенной задаче стационарное состояние подвержено бифуркации в зависимости от параметра [5]. Таким образом, для малого значения параметра $\mu$ (при малых возмущениях) в системе (11) существуют квазипериодические движения.

**3. Обсуждение результатов.** В научной литературе имеет место проблема установления существования предельного цикла. Приведем в качестве примера цитату из [6, с. 16.]: "Как известно, уравнение Ван дер Поля при любом $\mu > 0$ имеет на фазовой плоскости $(x_1, x_2)$ единственный предельный цикл, который является устойчивым. Этот математический факт адекватен экспериментальному наблюдаемому физическому феномену...".

В данной работе обсуждаются простые достаточные принципы симметрии и кососимметрии, при помощи которых можно установить существование периодических и квазипериодических движений. Принцип кососимметрии приведен впервые. При замыкании траектории ось симметрии может быть одна. Оси кососимметрии всегда существуют в парном варианте. Рассматриваемая проблема не содержит принципиального затруднения. Установление существования устойчивых траекторий предшествует количественному анализу, с помощью которого вычисляются оценки на параметры системы для регулярных и хаотических движений.


1. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1949. – 550 с.
2. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* Complex behavior of a trajectory in single-and double systems // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No 3. – P. 315–323.
3. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* Complex oscillations revisited // Ibid. – No 2. – P. 179–186.
4. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* Studying the complex oscillations of a star in the field of a galaxy // Ibid. – 2004. – **40**, No 4. – P. 453–461.
5. *Martynyuk A. A., Nikitina N. V.* On an approximate solution of the van der Pol equations with a large parameter // Ibid. – 2002. – **38**, No 8. – P. 1017–1023.
6. *Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов Ф. Ю., Розов Н. Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – Москва: Физматгиз, 1995. – 336 с.



*Институт механики им. С. П. Тимошенко*
*НАН Украины, Киев*



*Поступило в редакцию 25.06.2007*