1. *Mingori D. L.* A stability theorem for mechanical systems constant damping // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1970. – **37**, No 20. – P. 253–258.
2. *Müller P. C.* Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Thomson-Tait-Chetaev auf mechanische Systeme mit scheinabar nichtkonservativen Lagekräften // Z. angew. Math. und. Mech. – 1972. – **52**, H. 4. – S. T65–T67.
3. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Структурный анализ некоторого класса динамических систем // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 8. – С. 1089–1096.
4. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, вып. 4. – С. 698–704.
5. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Механические системы, эквивалентные в смысле Ляпунова системам, не содержащим неконсервативных позиционных сил // Там же. – 2007. – **71**, вып. 1. – С. 12–22.
6. *Кошляков В. Н., Макаров В. Л. Драгунов Д. В.* Механічні системи, еквівалентні в сенсі Ляпунова системам, що не містять гіроскопічних сил // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 1. – С. 111–122.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 15.06.2007

УДК 519.6

О. М. Литвин

Інтерполювання звичайних диференціальних операторів у гільбертових просторах

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Basic statements of the theory of the interpolation of ordinary differential operators by other ordinary differential operators in Hilbert's spaces are given. Approaching operators are equal to the given operator on a given set of functional knots.

Постановка проблеми. Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних включає в себе, як важливий частинний випадок, теорію інтерполювання. Оператори $L_n u(x)$ інтерполювання функцій $u(x)$ відновлюють (взагалі кажучи, наближено) $u(x)$ між заданими точками $x_1, \ldots, x_m$, використовуючи значення функції $u(x)$ або (у більш загальному випадку) деякої системи операторів (найчастіше використовуються диференціальні та інтегро-диференціальні оператори) від $u(x)$ у вказаних точках $B_{k,s}u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$; $\sum\limits_{k=1}^{m} \rho_k = M$. При цьому наближуючий (інтерполюючий) оператор $L_n u(x)$ повинен мати ті ж самі властивості у вказаних точках, що і наближувана функція: $B_{k,s}L_n u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $1 \leqslant k \leqslant m$; $0 \leqslant s \leqslant \rho_k - 1$. Аналогічно формулюється задача інтерполювання для функцій кількох змінних, але у цьому випадку поняття інтерполювання знайшло своє узагальнення ще й у вигляді операторів інтерлінації та інтерфлетації, у яких інформація про наближувану функцію задається на системі ліній або поверхонь (якщо змінних більше двох) [1, 2].

Задачу інтерполювання звичайних диференціальних операторів (ЗДО) у гільбертових просторах сформулюємо таким чином. Деякий ЗДО $A\colon U \to \Gamma$ (взагалі кажучи, невідомий) задається інтерполяційними даними $Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$, де функціональні вузли $u_\beta(x) \in U$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$, і функції $\gamma_\beta(x) \in \Gamma$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$, вважаються заданими елементами деяких функціональних гільбертових просторів U, Γ відповідно. Треба побудувати за допомогою цієї інформації інший ЗДО L_n з тими ж інтерполяційними властивостями.

Деякі важливі результати з побудови поліноміальних наближуючих операторів у вигляді операторних поліномів P_n степеня n, визначених на множині функцій $u(x) \in X$, $x \in \Omega = [0, 1]$, із значеннями в просторі Y (X та Y — деякі лінійні простори, наприклад гільбертові) наведені в працях [3–9]. Під P_n розуміється оператор

$$P_n u = \sum_{k=0}^{n} L_k u^k,$$

де $L_0 u^0 = L_0 \in Y$, $L_k u^k = L_k(\underbrace{u, u, \ldots, u}_{k})$, $k = \overline{1, n}$ — k-й операторний степінь, отриманий з полілінійного симетричного оператора $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)\colon X^k \to Y$, при $v_1 = \ldots v_k = u$, $v_i \in X$, $i = \overline{1, n}$. Для деякого оператора A треба знайти такий операторний поліном P_n, який задовольняє інтерполяційні умови $P_n(u_\beta(x)) = A(u_\beta(x))$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$, де $\{u_\beta(x)\}_{\beta=1}^{m}$ — задана система вузлів $u_\beta(x) \in X$. У роботах [7–9] детально розглянуто випадок, коли для наближення використовуються інтегральні оператори. Звертаємо увагу на те, що у цих роботах наближуючий оператор не є диференціальним, навіть якщо A є диференціальним оператором.

Відзначимо, що існують практичні задачі, у яких наближуваний нелінійний диференціальний оператор доцільно замінити іншим диференціальним оператором більш простої конструкції (наприклад, лінійним чи поліноміальним) і навіть інтегральні оператори доцільно наближувати диференціальними [10].

У роботах автора [11, 12] досліджувалася задача побудови операторів інтерполювання ЗДО та диференціальних операторів з частинними похідними. Методи побудови наближуючих операторів, запропоновані у цих роботах, не можуть бути використані без змін у випадку, коли наближуваний і наближуючий оператори є диференціальними операторами, що діють на вектор-функції з деякого гільбертового простору і результат їх дії теж є вектор-функціями у деякому гільбертовому просторі. У жодній з відомих авторові робіт не розглядався цей важливий з теоретичної та практичної точки зору випадок. У той же час вся теорія наближення функцій свідчить про те, що врахування класу наближуваних функцій дозволяє отримати більш точне наближення до них. Сказане стосується і теорії наближення ЗДО.

Метою даної роботи є побудова основ теорії інтерполювання ЗДО $A(x, D)$, які діють з одного векторного гільбертового простору в інший, на основі інтерполяційних умов. Запропонована теорія істотно використовує те, що наближуючий оператор є ЗДО.

Інтерполювання звичайних диференціальних операторів у гільбертових просторах. Хай оператор $A(t, D)\colon X \to Y$ діє з s-вимірного простору вектор-функцій $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_s(t))^T \in X$ у s-вимірний простір вектор-функцій $y = (y_1(t), \ldots, y_s(t))^T \in Y$, $x_\nu(t) \in C^N[0, 1]$, $y_\nu(t) \in C^r[0, 1]$, $r \geqslant N - n \geqslant 0$, $\nu = \overline{1, s}$. Вважаємо, що сам оператор $A(t, D)$ може бути невідомим, а відомими є результати його дії $\gamma_i(t) = (\gamma_{i1}(t), \ldots, \gamma_{is}(t))^T$, $i = \overline{1, m}$, на задану систему векторних функціональних вузлів $u_i(t) = (u_{i1}(t), \ldots, u_{is}(t))^T \in X$, $i = \overline{1, m}$:

$$A(t, D) u_i(t) = \gamma_i(t), \qquad i = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Хай $(x_i, x_j)_X = \sum\limits_{\mu=1}^{s} \int\limits_0^1 x_{i\mu}(\tau) x_{j\mu}(\tau) k(\tau - t) d\tau$, $(y_i, y_j)_Y = \sum\limits_{\gamma=1}^{s} \int\limits_0^1 y_{i\nu}(\tau) y_{j\nu}(\tau) k(\tau - t) d\tau$ — скалярні добутки функцій у просторах X, Y, $k(t) = \delta(t)$ — дельта-функція Дірака, або $k(t) = 1$.

Інтерполювання ЗДО узагальненою формулою Лагранжа. Цей випадок досліджувався в роботі [5], у якій була запропонована така формула для інтерполюючого оператора:

$$Pu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\pi_i(u)}{\pi_i(u_i)} \gamma_i,$$

$$\pi_i(u) = \prod_{k=1, k \neq i}^{m} (u - u_k, u_i - u_k)_X.$$

Нижче дамо інший підхід до розв'язання цієї задачі, який зберігає простоту формули Лагранжа у випадку покоординатно різних вузлів.

Означення 1. Для двох s-вимірних векторів $u = (u_1, \ldots, u_s)^T$, $v = (v_1, \ldots, v_s)^T$ введемо операцію їх ділення таким чином:

$$\left[\frac{u}{v}\right] = \operatorname{diag}\left[\frac{u_1}{v_1}, \ldots, \frac{u_s}{v_s}\right], \qquad v_i \neq 0, \qquad i = \overline{1, s},$$

де $\operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_s]$ — діагональна матриця.

Теорема 1. *Якщо векторні функціональні вузли є покоординатно різними, тобто $u_{i,p}(t) \neq u_{j,p}(t)$, $t \in [0, 1]$ $\forall$ i, $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, $p = \overline{1, s}$, то оператор*

$$Lu = \sum_{i=1}^{m} \ell_i(u) \gamma_i,$$

$$\ell_i(u) = \prod_{j=1, j \neq i}^{m} \left[\frac{u - u_j}{u_i - u_j}\right]$$

має такі інтерполяційні властивості:

$$Lu_\beta = \gamma_\beta, \qquad \beta = \overline{1, m}.$$

Звертаємо увагу на те, що $\ell_i(u)$ є діагональними матрицями-операторами. Очевидно, і оператор P і оператор L не є диференціальними операторами. Для того щоб побудувати диференціальний наближуючий оператор, можна скористатись узагальненим методом множників Лагранжа або узагальненим методом найменших квадратів, сформульованими у теоремі 2.

Означення 2. Вираз (взагалі кажучи, функцію змінної t)

$$|||L_n|||^2 = \sum_{\mu=0}^{n} \|a_\mu(t)\|^2 := \sum_{\mu=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} (a_{\mu,i,j}, a_{\mu,i,j})_k \right),$$

де $(a_{\mu,i,j}, a_{\mu,i,j})_k = \int\limits_0^1 (a^2_{\mu,i,j}(\tau) k(\tau - t) d\tau$, назвемо незалежною (взагалі кажучи, функціональною) нормою лінійного диференціального оператора

$$L_n(t, D) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu(t) D^\mu, \qquad D = \frac{d}{dt}$$

з матричними коефіцієнтами $a_\mu(t) = [a_{\mu,i,j}]_{i,j=1}^s$, $\mu = \overline{0,n}$. Очевидно,

$$|||L_n||| \equiv 0 \Leftrightarrow L_n(t,D) \equiv 0; \qquad |||cL_n||| = |c| \cdot |||L_n||| \forall c \in \mathbb{R}.$$

Ця характеристика оператора L_n не залежить від простору X функцій, до яких оператор L_n може застосовуватись. У теоремі 2 сформульовані вказані вище два методи знаходження розв'язку задачі: знайти коефіцієнти $a(t) = (a_0(t), \dots, a_n(t))^T$ оператора L_n з умов

$$L_n(t,D)u_i(t) = \gamma_i(t), \qquad i = \overline{1,m}, \qquad u_i \in X, \qquad \gamma_i \in Y. \tag{2}$$

Теорема 2. *Існують такі набори функціональних вузлів $u_i(t) \in X$, для яких диференціальний оператор $L_n(t,D)$, що задовольняє інтерполяційні умови (2) і має найменшу незалежну норму $|||L_n(t,\cdot)|||$, існує і єдиний. Його коефіцієнти $a(t)$ можна знайти узагальненим методом множників Лагранжа $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_m)$:*

$$J_1(a,\xi) = \xi_0 |||L_n|||^2 + \sum_{i=1}^m (\xi_i, L_n(\cdot,D)u_i(\cdot) - \gamma_i(\cdot))_Y \to \min_{a,\xi}.$$

Якщо $s = 1$, $m = n+1$, $\det\Lambda_1 \neq 0$, $\Lambda_{1,i,k} = D^i u_k(t)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$, $\xi_0 \in \{0;1\}$, то $L_n(t,D)u_i = \gamma_i$, $i = \overline{1,n+1}$. Ці коефіцієнти можна знайти також узагальненим методом найменших квадратів

$$J_2(a) = \sum_{i=1}^m (L_n(\cdot,D)u_i(\cdot) - \gamma_i(\cdot), L_n(\cdot,D)u_i(\cdot) - \gamma_i(\cdot))_Y \to \min_a,$$

якщо

$$\det\Lambda_2 \neq 0; \qquad \Lambda_{2,j,p} = \sum_{i=1}^m (D^j u_i(t), D^p u_i(t))_Y.$$

Зауваження 1. Вираз для $J_2(a)$ отримується з $J_1(a,\xi)$ при $\xi_0 = 0$, $\xi_i = L_n(t,D)u_i(t) - \gamma_i(t)$, $i = \overline{1,m}$.

Зауваження 2. Умова $\det\Lambda_1 \neq 0$ означає, що система функціональних вузлів $u_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, є лінійно незалежною, бо детермінант $\det\Lambda_1$ є детермінантом Вронського. У випадку $s \geqslant 2$ ця умова не має місця, бо функціональні вузли $u_i(t)$ є вектор-функціями.

Теорема 3. *Якщо наближуваний оператор $A(t,D) = \sum\limits_{i=0}^n b_i(t)D^i$ є лінійним ЗДО, то $\forall u_j(t)$, $u_i(t) \neq u_j(t)$, $i \neq j$, i, $j = \overline{1,m}$: $L_n(t,D) = A(t,D)$.*

Інтерполювання ЗДО нелінійними ЗДО. У теоремі 4 дано явний розв'язок задачі інтерполювання за допомогою нелінійних диференціальних операторів першого порядку. Хай $x = (x_1(t), \dots, x_s(t)^T, u_j = (u_{j1}(t), \dots, u_{js}(t))^T \in X, \gamma_j = (\gamma_{j1}(t), \dots, \gamma_{js}(t))^T \in Y$. Якщо $A(t,D)x = A(t,BDx)$, де $B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^s$ — деяка матриця, то можна використовувати для наближення один з таких нелінійних операторів:

$$L_n(t,B,D)x(t) = \sum_{j=1}^m \left(\prod_{\mu=1,\mu\neq j}^m \left[\frac{BD(x(t) - u_\mu(t))}{BD(u_j(t) - u_\mu(t))} \right] \right) \gamma_j(t), \tag{3}$$

$$L_n(t,B,D)x(t)=\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\mu=1,\mu\neq j}^{m}\prod_{\nu=1}^{s}\frac{[BD(x(t)-u_\mu(t))]_\nu}{[BD(u_j(t)-u_\mu(t))]_\nu}\right)\gamma_j(t), \tag{4}$$

$$L_n(t,B,D)x(t)=\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{\mu=1,\mu\neq j}^{m}\frac{(BD(x-u_\mu),BD(u_j-u_\mu))_Y}{(BD(u_j-u_\mu),BD(u_j-u_\mu))_Y}\right)\gamma_j(t). \tag{5}$$

Теорема 4. *Якщо функціональні векторні вузли* $u_j(t)$ *задовольняють умови* $[BD(u_j(t)-u_\mu(t))]_\nu \neq 0$, $t \in [0,1]$, $j \neq \mu$; j, $\mu = \overline{1,m}$; $\nu = \overline{1,s}$, *то оператори* $L_n(t,B,D)$, *що визначаються формулами* (3)–(5), *мають такі інтерполяційні властивості:* $L_n(t,B,D)u_\beta(t)=\gamma_\beta(t)$, $\beta=\overline{1,m}$. *Але оператор, що визначається формулою* (5), *задовольняє ці властивості також, якщо* $(BD(u_j-u_\mu),BD(u_j-u_\mu))_Y \neq 0$, $j \neq \mu$; j, $\mu = \overline{1,m}$.

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її узагальнення. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
3. *Porter W. A.* An overview of polynomic system theory // Proc. IEEE Special issue on system theory. – 1976. – Jan. – P. 18–23.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, No 2. – P. 308–315.
5. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Appr. Theory. – 1971. – **4**, No 4. – P. 419–432.
6. *Howlett P. G., Torokhti A. P.* Weak interpolation and approximation of nonlinear operators on the space C([0, 1]) // Numer. Func. Anal. and Optimiz. – 1998. – **19**, No 9, 10. – P. 1025–1043.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2002. – 406 с.
9. *Хлобыстов В. В., Поповичева Т. Н.* Интерполирование и задачи идентификации // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 3. – С. 100–107.
10. *Рыым Р. Й.* Аппроксимация интегрального оператора при помощи дифференциального полинома. Применение для решения задач переноса излучения и восстановления сигналов // Публ. Тартус. астрофиз. обсерватории. – 1990. – **53**. – С. 175–186.
11. *Литвин О. М.* Інтерполювання звичайних диференціальних операторів // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 16–20.
12. *Литвин О. М.* Інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними // Там само. – 2007. – № 7. – С. 7–11.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 16.02.2007