УДК 519.6

Академік НАН України **З. Т. Назарчук, Я. П. Кулинич**

Кубатурна формула для обчислення деякого класу сингулярних інтегралів

A scheme to calculate a circular single layer potential is proposed. The cubature formulas use Gaussian weights and a value of Meijer's G-function. The effectiveness of such an approach is shown.

Останнім часом приділяється значна увага розв'язанню задач математичної фізики методом граничних інтегральних рівнянь, які зводяться до обчислення двовимірних сингулярних інтегралів типу потенціалу простого або подвійного шару [1]. Зокрема, при побудові алгоритмів чисельного розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь задач дифракції хвиль різної фізичної природи [2] виникає потреба обчислення інтегралів виду

$$F(x) = \iint_S \frac{f(y)}{|x-y|} dS_y, \tag{1}$$

де S — круг одиничного радіуса, $x = \{x_1, x_2\}$, $y = \{y_1, y_2\}$, $x \in S$, а функція $f(y)$ задовольняє певні умови в околі границі S. Можливі два підходи до наближеного обчислення сингулярних інтегралів (1). Перший з них полягає в інтерполюванні функції $f(y)$ і наступним точним інтегруванням отриманого виразу. Згідно з другим підходом інтерполюють підінтегральний вираз у цілому з подальшим обчисленням отриманих інтегралів. У цьому випадку отримані вирази малоефективні для побудови алгоритму визначення функції $f(y)$ з інтегрального рівняння, оскільки значення $f(y)$ стають залежні від x [3]. Цього недоліку позбавлені вирази, отримані з використанням першого підходу.

Нижче побудовано кубатурні формули для обчислення інтегралів з використанням інтерполювання функції $f(y)$.

Перейдемо до полярної системи координат $y = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\}$, $x = \{r\cos\phi, r\sin\phi\}$ та вважатимемо, що поведінка функції $f(y)$ в околі границі S визначається співвідношенням $(1-\rho)^\beta f^*(\rho,\varphi)$, де $\beta > -1$. Тоді

$$F(r,\phi) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta f^*(\rho,\varphi)\, d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \phi)}}, \tag{2}$$

де $f^*(\rho,\varphi) = f^*(\rho,\varphi + 2\pi)$. Враховуючи періодичність функції $f^*(\rho,\varphi)$ за змінною φ, інтерполюємо її в m вузлах $\tau_l = 2\pi l/m$, $j = \overline{0, m-1}$ тригонометричним поліномом порядку $p = [m/2]$ [4]:

$$L(f^*;\varphi) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} B_j^m f^*(\rho,\tau_l) \cos[j(\varphi - \tau_l)],$$

де $B_0^m = 1/m$, $B_p^m = (3-(-1)^m)/(2m)$, $B_j^m = 2/m$ для $j = \overline{2, p-1}$. Далі, $f^*(\rho,\tau_l)$ інтерполюємо за змінною ρ поліномом, побудованим на системі вузлів $\{\rho_k\}$, які є коренями полінома

$R_n^{(1,\beta)}(\rho) = P_n^{(1,\beta)}(1-2\rho)$, де $P_n^{(1,\beta)}(z)$ — поліном Якобі. У результаті отримаємо наближений вираз для функції $f^*(\rho,\varphi)$ у вигляді

$$L(f^*;\varphi,\rho) = \frac{2m+\beta+3}{(m+\beta+1)(m+\beta+2)} \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p} A_{lkij}^{mn} f^*(\rho_k,\tau_l) R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\tau_l)],$$

де

$$A_{lkij}^{mn} = \frac{(l+\beta+1)(2l+\beta+2)R_l^{(1,\beta)}(\rho_k)}{(l+1)R_{m+1}^{(1,\beta)}(\rho_k)R_m^{(1,\beta)'}(\rho_k)} B_j^m.$$

Тоді

$$F(r,\phi) \approx \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta L(f^*;\varphi,\rho)\,d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)}}.$$

Таким чином, задача апроксимації $F(r,\phi)$ зведена до обчислення інтегралів

$$I_{ij}(r,\phi) = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\tau_l)]\,d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)}}.$$

Розглянемо внутрішній інтеграл. На основі результатів роботи [3] маємо

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos[j(\varphi-\tau_l)]\,d\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)}} = \frac{(-1)^j 2\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)_j \sqrt{|\rho^2-r^2|}} \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}}^{\mathrm{j}}\left(\frac{\rho^2+r^2}{|\rho^2-r^2|}\right)\cos j(\phi-\tau_l).$$

Тут $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ — приєднані функції Лежандра, $(a)_j$ — символ Похгаммера. Для вибору однозначної вітки функції $\mathrm{P}_\nu^\mu(z)$ проведено розріз вздовж дійсної осі від $-\infty$ до $+1$. Тому

$$I_{ij}(r,\phi) = \frac{(-1)^j 2\pi}{\left(\frac{1}{2}\right)_j}\cos(\phi-\tau_l)\int_0^1 \frac{\rho(1-\rho)^\beta R_i^{(1,\beta)}(\rho)}{\sqrt{|\rho^2-r^2|}} \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}}^{\mathrm{j}}\left(\frac{\rho^2+r^2}{|\rho^2-r^2|}\right)d\rho.$$

Для обчислення цього інтеграла використаємо властивість згортки Мелліна двох функцій, яка описується рівністю [5, ф. 8.4.1.2]

$$\int_0^\infty f_1(x) f_2\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_1^*(s) f_2^*(s) z^{-s}\,ds, \tag{3}$$

де $f_i^*(s)$ — трансформанта Мелліна функції $f(x)$, c — деяка дійсна константа. У нашому випадку

$$f_1(x) = \begin{cases} x(1-x)^\beta R_i^{(1,\beta)}(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \qquad f_2(x;j) = \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}} \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}}^{\mathrm{j}}\left(\frac{x^2+1}{|x^2-1|}\right).$$

Вираз для трансформанти Мелліна функції $f_1(x)$ дає формула [5, ф. 7.391.4]

$$f_1^*(s) = \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(\beta+i+1)\Gamma(i+1-s)}{i!\Gamma(1-s)\Gamma(\beta+s+i+2)} \tag{4}$$

за умови $\operatorname{Re} s > -1$. Далі, для знаходження $f_2^*(s)$ використаємо той факт, що для функції $\widetilde{f_2}(x) = |1-x|^{\nu} \mathrm{P}_{\nu}^{\mu}\left(\dfrac{1+x}{|1-x|}\right)$ перетворення Мелліна описується формулою

$$\widetilde{f_2^*}(s) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(s-\mu/2)\Gamma(-\nu-\mu/2-s)}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(s+\nu+1-\mu/2)\Gamma(1-\mu/2-s)}$$

за умови $\operatorname{Re}\mu/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(\mu/2+\nu)$ і $\operatorname{Re}\nu > -1$ [5, ф. 8.4.41.15]. Поклавши $\nu = -1/2$, $\mu = -j$ $(j \geqslant 0)$ та використавши рівність $f_2^*(s;-j) = \widetilde{f_2^*}(s/2)$, отримаємо

$$\widetilde{f_2^*}(s) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(s-\mu/2)\Gamma(-\nu-\mu/2-s)}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(s+\nu+1-\mu/2)\Gamma(1-\mu/2-s)},$$

де $-j/2 < \operatorname{Re} s < j/2 + 1/2$. Оскільки

$$\mathrm{P}_{-\frac{1}{2}}^{\mathrm{j}}(z) = \frac{\Gamma(1/2+j)}{\Gamma(1/2-j)} \mathrm{P}_{-\frac{1}{2}}^{-\mathrm{j}}(z),$$

то

$$f_2^*(s;j) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s/2+j/2)\Gamma(1/2+j/2-s/2)}{2\Gamma(1/2-j)\Gamma(s/2+1/2+j/2)\Gamma(1+j/2-s/2)}. \tag{5}$$

Підставляючи (4), (5) в (3), знаходимо такий вираз для інтегралів:

$$I_{ij}(r,\phi) = \pi\cos j(\phi-\tau_l)\frac{\Gamma(\beta+i+1)}{i!} J_{ij}(r),$$

де

$$J_{ij}(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(i+1-s)\Gamma((s+j)/2)\Gamma((1+j-s)/2)}{\Gamma(1-s)\Gamma(\beta+s+i+2)\Gamma((1+j+s)/2)\Gamma(1+(j-s)/2)} r^{-s} ds$$

за умови $-1 < \operatorname{Re} s < (j+1)/2$. Для подальшого перетворення останнього інтеграла проведемо заміну змінної інтегрування $s = 2u$ та використаємо формули для гамма-функції подвійного аргументу [5]. Після очевидних елементарних перетворень отримуємо

$$J_{ij}(r) = \frac{2^{-\beta}}{2\pi i}\int\limits_{c/2-i\infty}^{c/2-i\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{3}\Gamma(b_k-u)\prod\limits_{k=1}^{3}\Gamma(1-a_k+u)}{\prod\limits_{k=4}^{6}\Gamma(1-b_k+u)\prod\limits_{k=4}^{6}\Gamma(a_k-u)} r^{-2u} du,$$

де

$$a_1 = \frac{1-i}{2}, \quad a_2 = -\frac{i}{2}, \quad a_3 = \frac{1-j}{2}, \quad a_4 = \frac{1+j}{2}, \quad a_5 = \frac{2+i+\beta}{2}, \quad a_6 = \frac{3+i+\beta}{2},$$

$$b_1 = \frac{j}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = -\frac{j}{2}, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = \frac{1}{2}.$$

Використовуючи означення G-функції Мейєра через інтеграл Мелліна–Барнса [5], в кінцевому випадку отримаємо

$$I_{ij}(r,\phi) = 2^{-\beta}\pi \cos j(\phi-\tau_l)\frac{\Gamma(\beta+i+1)}{i!}G_{66}^{33}\left(r^2\Big|\begin{array}{c} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6\end{array}\right), \tag{6}$$

де $G_{66}^{33}\left(r^2\Big|\begin{array}{c} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6\end{array}\right)$ — G-функція Мейєра.

Ураховуючи залежність (6), кубатурну формулу для обчислення інтеграла (2) подамо у вигляді

$$F(r,\phi) \approx \frac{2^{-\beta}(2m+\beta+3)\pi}{(m+\beta+1)(m+\beta+2)} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p} B_{lkij}^{mn} f^*(\rho_k,\tau_l) G_{66}^{33}\left(r^2\Big|\begin{array}{c} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6\end{array}\right)\cos j(\phi-\tau_l), \tag{7}$$

де $B_{lkij}^{mn} = A_{lkij}^{mn}\dfrac{\Gamma(\beta+i+1)}{i!}$.

Проілюструємо ефективність запропонованої методики обчислення інтегралів, поклавши $f^*(\rho,\varphi) = (1+\rho)^{\beta} e^{-\alpha(\rho\cos\varphi + r\cos\phi)}$. Оскільки у цьому випадку точні вирази для функції $F(r,\phi)$ відсутні, то для знаходження значень цієї функції, які будемо розглядати як тестові, використаємо стандартні квадратурні формули для регулярних інтегралів, попередньо провівши перетворення виразу (2).

З цією метою перейдемо до полярної системи координат $\{\tau,\psi\}$ з центром у точці x. Тоді (2) набуде вигляду

$$\int_0^{\pi}\int_{\tau^-(\psi)}^{\tau^+(\psi)} e^{-\alpha\tau\cos\psi}(1-r^2-\tau^2-2r\tau\cos(\psi-\phi))^{\beta} d\tau d\psi,$$

де $\tau^{\pm}(\psi) = -r\cos(\psi-\phi) \pm \sqrt{1-r^2\sin(\psi-\phi)}$. Зробивши чергову заміну змінної інтегрування $\tau = -r\cos(\psi-\phi) + \lambda\sqrt{1-r^2\sin(\psi-\phi)}$ та використавши табличний інтеграл [6, ф.3.387.1], отримаємо

$$F(r,\phi) = \sqrt{\pi}(2/\alpha)^{\beta+1/2}\Gamma(\beta+1)\int_0^{\pi} e^{\alpha r\cos\psi\cos(\psi-\phi)}(1-r^2\sin^2(\psi-\phi))^{(2\beta+1)/4} \times$$
$$\times \cos^{-(2\beta+1)/2}\psi I_{(2\beta+1)/2}(\alpha\cos\psi\sqrt{1-r^2\sin^2(\psi-\phi)}).$$

Очевидно, що за умови $-1 < \beta \leqslant -1/2$ інтеграл у правій частині — регулярний. Для подальших розрахунків покладемо $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$. Результати розрахунків наведені у табл. 1. Через m позначено мінімальне число вузлів за азимутальною координатою, яке забезпечує максимальну точність обчислення інтегралів ε при фіксованій кількості вузлів за радіальною координатою.

Таблиця 1

r	n	$\phi = \pi/17$		$\phi = 8\pi/17$		$\phi = 16\pi/17$	
		m	ε	m	ε	m	ε
0,1	5	7	10^{-5}	8	10^{-5}	10	10^{-5}
	10	11	10^{-9}	11	10^{-9}	13	10^{-10}
	15	14	10^{-12}	15	10^{-13}	16	10^{-14}
0,5	5	8	10^{-3}	7	10^{-3}	10	10^{-5}
	10	14	10^{-8}	16	10^{-9}	15	10^{-9}
	15	16	10^{-10}	20	10^{-13}	20	10^{-12}
0,9	5	10	10^{-4}	11	10^{-4}	12	10^{-6}
	10	17	10^{-8}	18	10^{-9}	18	10^{-10}
	15	19	10^{-9}	20	10^{-10}	17	10^{-10}

Наведені дані свідчать про те, що запропонована кубатурна формула (7) за відносно малої кількості вузлів забезпечує достатню високу точність обчислення інтегралу (2). Отже, її доцільно застосовувати для чисельного розв'язання відповідних інтегральних рівнянь у зв'язку з малою розмірністю алгебраїчної системи, що при цьому утворюється.

1. *Лифанов И. К.* Метод сингулярних интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, теории упругости и дифракции волн. – Москва: ТОО "Янос", 1995. – 520 с.
2. *Хай М. В.* Двухмерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
3. *Назарчук З. Т., Сеник Т. Д.* Про один алгоритм обчислення потенціалу простого шару // Доп. АН України. – 1992. – № 5. – С. 27–31.
4. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – Москва: Физматлит, 2003. – 688 с.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.

Фізико-механічний інститут
ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Надійшло до редакції 23.10.2007