ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2011

МЕХАНІКА

УДК 539.3

А. Я. Григоренко, А. С. Бергулев, С. Н. Яремченко

О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Наведено чисельно-аналітичний підхід для дослідження напружено-деформованого стану ортотропних прямокутних пластин. Задача розв'язується на основі тривимірної моделі теорії пружності. Система диференційних рівнянь в частинних похідних зводиться до одновимірної задачі з використанням методу сплайн-колокації за двома координатними напрямками. Крайова задача для системи звичайних диференційних рівнянь високого порядку розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Запропоновано приклади розрахунків для різних крайових умов.

Прямоугольные толстостенные пластины из анизотропных материалов имеют широкое применение во многих отраслях современной техники. Актуальным является вопрос обеспечения прочности и надежности при эксплуатации соответствующих элементов конструкций, что возможно лишь при получении исчерпывающей информации об их напряженно-деформированном состоянии. Проведение исследований на основании трехмерной теории упругости связано с трудностями вычислительного характера. Поэтому можно найти только незначительное количество публикаций, посвященных данному вопросу [1, 2].

Результатам теоретических и экспериментальных исследований по распределению перемещений и напряжений в прямоугольных толстостенных пластинах, полученным на основе решения краевых задач в линейно-упругой постановке, посвящены некоторые работы зарубежных авторов, например, [3, 4]. В них рассмотрены пластины с различными краевыми условиями на торцах. Так, в [3] исследуются частично встроенные конечные и бесконечные по длине пластины.

В данной работе предложен эффективный численно-аналитический подход к изучению напряженно-деформированного состояния прямоугольных толстостенных ортотропных пластин на основании теории упругости. Подход базируется на применении метода сплайн-апроксимации в двух направлениях и метода коллокации, при помощи которых исходная трехмерная краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных сводится к соответствующей задаче для системы обычных дифференциальных уравнений высокого порядка. Полученная система решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Решение двумерных краевых задач теории пластин и оболочек на основании метода сплайн-коллокации проводилось в [5, 6].

Исходные соотношения. Для получения разрешающих уравнений мы используем соотношения теории упругости в декартовой системе координат $Oxyz$ [7].

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\qquad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

Физические уравнения, что выражают закон Гука:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\alpha_{11}\sigma_{xx}+\alpha_{12}\sigma_{yy}+\alpha_{13}\sigma_{zz},\quad \varepsilon_{yy}=\alpha_{12}\sigma_{xx}+\alpha_{22}\sigma_{yy}+\alpha_{23}\sigma_{zz},\\
&\varepsilon_{zz}=\alpha_{13}\sigma_{xx}+\alpha_{23}\sigma_{yy}+\alpha_{33}\sigma_{zz},\quad \varepsilon_{yz}=\alpha_{44}\sigma_{yz},\quad \varepsilon_{xz}=\alpha_{55}\sigma_{xz},\quad \varepsilon_{xy}=\alpha_{66}\sigma_{xy}
\end{aligned}\tag{3}$$

или

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=\lambda_{11}\varepsilon_{xx}+\lambda_{12}\varepsilon_{yy}+\lambda_{13}\varepsilon_{zz},\quad \sigma_{yy}=\lambda_{12}\varepsilon_{xx}+\lambda_{22}\varepsilon_{yy}+\lambda_{23}\varepsilon_{zz},\\
&\sigma_{zz}=\lambda_{13}\varepsilon_{xx}+\lambda_{23}\varepsilon_{yy}+\lambda_{33}\varepsilon_{zz},\quad \sigma_{yz}=\lambda_{44}\varepsilon_{yz},\quad \sigma_{xz}=\lambda_{55}\varepsilon_{xz},\quad \sigma_{xy}=\lambda_{66}\varepsilon_{xy},
\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}=\frac{1}{E_x},\qquad \alpha_{22}=\frac{1}{E_y},\qquad \alpha_{33}=\frac{1}{E_z},\\
&\alpha_{12}=-\frac{\nu_{yx}}{E_y}=-\frac{\nu_{xy}}{E_x},\qquad \alpha_{13}=-\frac{\nu_{xz}}{E_x}=-\frac{\nu_{zx}}{E_z},\qquad \alpha_{23}=-\frac{\nu_{zy}}{E_z}=-\frac{\nu_{yz}}{E_y},\\
&\alpha_{44}=\frac{1}{G_{yz}},\qquad \alpha_{55}=\frac{1}{G_{xz}},\qquad \alpha_{66}=\frac{1}{G_{xy}},\\
&\lambda_{11}=\frac{\alpha_{22}\alpha_{33}-{\alpha_{23}}^2}{\Delta},\qquad \lambda_{22}=\frac{\alpha_{11}\alpha_{33}-{\alpha_{13}}^2}{\Delta},\qquad \lambda_{33}=\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}-{\alpha_{12}}^2}{\Delta},\\
&\lambda_{12}=\frac{\alpha_{13}\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta},\qquad \lambda_{13}=\frac{\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22}}{\Delta},\qquad \lambda_{23}=\frac{\alpha_{12}\alpha_{13}-\alpha_{11}\alpha_{23}}{\Delta},\\
&\lambda_{44}=\frac{1}{\alpha_{44}},\qquad \lambda_{55}=\frac{1}{\alpha_{55}},\qquad \lambda_{66}=\frac{1}{\alpha_{66}},\\
&\Delta=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-{\alpha_{23}}^2)-\alpha_{12}(\alpha_{12}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{23})+\alpha_{13}(\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22}).
\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь использованы такие обозначения: σ — напряжения; ε — деформации; u, v и w — компоненты вектора перемешений; λ, G — коэффициенты Ламе; E — модуль Юнга; ν — коэффициенты Пуассона; X, Y, Z — компоненты вектора массовых сил.

Тогда из соотношений (1)–(4) путем элементарных преобразований можно получить систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных (уравнения Ламэ), которая описывает напряженно-деформированное состояние прямоугольной толстостенной ортотропной пластины:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + d_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + e_1 X,\\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= a_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + d_2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} + e_2 Y,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + b_3\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y} + c_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + d_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + e_3 Z.
\end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i, e_i определяются механическими характеристиками материала с учетом соотношений (5).

Краевые условия на краях пластины часто задаются в смешанном виде или в напряжениях, но несложно, используя соотношения упругости и Коши, перейти к их записи в перемещениях:

$$\begin{aligned}
&\beta_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_{23}\frac{\partial v}{\partial y}+\beta_{33}\frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_{zz_0}, \quad \lambda_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \sigma_{zx_0}, \quad \lambda_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \sigma_{zy_0},\\
&\beta_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_{23}\frac{\partial v}{\partial y}+\beta_{33}\frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_{zz_c}, \quad \lambda_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \sigma_{zx_c}, \quad \lambda_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \sigma_{zy_c}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В этих системах β_{ij} — коэффициенты, которые определяются из систем (2)–(3), $\lambda_{44} = G_{yz}$; $\lambda_{55} = G_{xz}$; σ_{zz_0}, σ_{zx_0}, σ_{zy_0} — напряжения, заданные на нижней грани пластины; σ_{zz_c}, σ_{zx_c}, σ_{zy_c} — напряжения, заданные на верхней грани пластины.

Метод решения. Решение системы (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
&u(x,y,z) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} u_{ij}(z)\varphi_i^u(x)\psi_j^u(y), \qquad v(x,y,z) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} v_{ij}(z)\varphi_i^v(x)\psi_j^v(y),\\
&w(x,y,z) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N} w_{ij}(z)\varphi_i^w(x)\psi_j^w(y),
\end{aligned} \tag{8}$$

где функции $u_{ij}(z)$, $v_{ij}(z)$, $w_{ij}(z)$ — искомые функции, а функции φ_i^a, ψ_j^a, $a = u, v, w$ определяются через линейные комбинации B_3 сплайнов на равномерных сетках $0 = x_0 < < x_1 < \cdots < x_N = a$ и $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = b$, соответственно, с учетом граничных условий при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Это позволяет применять метод сплайн-коллокации по координатам x и y и свести начальную задачу к системе $6(N+1)(M+1)$ обычных диференциальных уравнений

$$\frac{d\overrightarrow{S}}{dz} = A\overrightarrow{S} + \overrightarrow{f} \tag{9}$$

с граничными условиями вида

$$B_r\overrightarrow{S(r)} = \overrightarrow{f_r}, \qquad r = 0, c. \tag{10}$$

Решение задач. Анализ результатов. Сравним решения, полученные указанным выше способом, с результатами решения задачи с использованием метода разделения переменных при помощи рядов Фурье.

Пускай стороны пластины $a = b = 1$, толщина — $h = 0{,}1$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Материал, из которого сделана пластина, — стеклопластик, СТЭТ. Его упругие характеристики (после проведения обезразмеривания) следующие:

$$\begin{gathered}
E_x = 0{,}359 \cdot 10^6, \qquad E_y = 0{,}293 \cdot 10^6, \qquad E_z = 0{,}183 \cdot 10^6, \\
G_{xy} = 0{,}076 \cdot 10^6, \qquad G_{zx} = 0{,}066 \cdot 10^6, \qquad G_{yz} = 0{,}063 \cdot 10^6, \\
\nu_{xy} = 0{,}177, \qquad \nu_{yz} = 0{,}371, \qquad \nu_{zx} = 0{,}157.
\end{gathered} \tag{11}$$

На гранях $z = 0$, $z = h$ граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{zz_0} = 1, \qquad \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0. \tag{12}$$

На краях $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ зададим условия шарнирного опирания. Для $x = \mathrm{const}$: $\sigma_{xx} = 0$, $v = 0$, $w = 0$; для $y = \mathrm{const}$: $\sigma_{yy} = 0$, $u = 0$, $w = 0$. Тогда искомые функции перемещений следует искать в виде

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(z)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \\
v(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}, \\
w(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{13}$$

После подстановки (13) в (6) для каждой из гармоник ряда получаем уравнения вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_1\frac{m^2\pi^2}{a^2}u_{mn}(z) + b_1\frac{n^2\pi^2}{b^2}u_{mn}(z) + c_1\frac{mn\pi^2}{ab}v_{mn}(z) + d_1\frac{m\pi}{a}w_{mn}(z), \\
\frac{\partial^2 v_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_2\frac{n^2\pi^2}{b^2}v_{mn}(z) + b_2\frac{m^2\pi^2}{a^2}v_{mn}(z) + c_2\frac{mn\pi^2}{ab}u_{mn}(z) + d_2\frac{n\pi}{b}w_{mn}(z), \\
\frac{\partial^2 w_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_3\frac{m\pi}{a}u_{mn}(z) + b_3\frac{n\pi}{b}v_{mn}(z) + c_3\frac{m^2\pi^2}{a^2}w_{mn}(z) + d_3\frac{n^2\pi^2}{b^2}w_{mn}(z).
\end{aligned} \tag{14}$$

С граничными условиями на сторонах $z = 0$:

$$\begin{aligned}
&\beta_1\frac{m\pi}{a}u_{mn}(z) + \beta_2\frac{n\pi}{b}v_{mn}(z) + \beta_3\frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} = \frac{16}{\pi^2 mn}, \\
&\frac{m\pi}{a}w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} = 0, \\
&\frac{n\pi}{b}w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} = 0;
\end{aligned} \tag{15}$$

$z = h$:

$$\beta_1 \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) + \beta_2 \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_3 \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} = 0, \qquad (16)$$
$$\frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} = 0.$$

Коэффициенты β_i в (15) и (16) определяются из соотношений Коши и закона Гука. Получив решения данных задач методом дискретной ортогонализации и подставив их в формулы (13), определим значения искомых функций перемещений.

Так как область, которая рассматривается, при указанных граничных условиях имеет оси симметрии $x = a/2$ и $y = b/2$, при помощи сплайн-коллокации задача может быть решена на прямоугольнике $[0, a/2] \times [0, b/2]$. При этом используются условия симметрии при $x = a/2$: $u = 0$, $\partial v/\partial x = 0$, $\partial w/\partial x = 0$; при $y = b/2$: $v = 0$, $\partial u/\partial y = 0$, $\partial w/\partial y = 0$. Более плотная коллокационная сетка в случае подсчета на четвертях позволяет считать именно этот результат наиболее приближенным к истинному во всех последующих примерах.

Сравним результаты, полученные методом Фурье с количеством членов ряда $N_f = M_f = 10$, $N_f = M_f = 12$, с результатами, полученными методом сплайн-коллокации с количеством точек коллокации $N = M = 10$, $N = M = 12$ и количеством точек ортогонализации ($N_1 = 50$, $N_2 = 100$, $N_3 = 200$). Также произведем подсчет на первой четверти с количеством точек коллокации $N_q = M_q = 12$. Подсчет будем вести для точек $x_1 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}01)$, $x_2 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}05)$, $x_3 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}09)$, $x_4 = (0{,}3; 0{,}3; 0{,}05)$, $x_5 = (0{,}7; 0{,}7; 0{,}05)$. После проведения нормирования с коэффициентом $k = 10^6$ получим результаты, представленные в табл. 1. Следует отметить, что эти результаты практически одинаковы при разном количестве точек интегрирования, что подчеркивает сходимость метода. Данные рассчетов в этом и дальнейших примерах будем представлять для $N_2 = 100$.

Как видно из табл. 1, результаты, полученные методом сплайн-коллокации, при увеличении количества точек коллокации сходятся к результатам, полученным методом Фурье. Это может послужить критерием точности используемого в данной работе метода.

Также были проведены рассчеты для той же пластины, но с жестко закрепленным контуром. В этом случае для подтверждения сходимости также представлены результаты, полученные при подсчете на первой четверти с количеством точек коллокации $N_q = M_q = 10$. Результаты представлены в табл. 2.

Рассчеты для той же пластины с жестко закрепленным контуром, но при длинах сторон: а) $a = 1$, $b = 0{,}5$; б) $a = 0{,}8$, $b = 0{,}5$ представлены в табл. 3. Точки вывода результата в этих случаях брались следующим образом: а) $x_1 = (0{,}5; 0{,}25; 0{,}01)$, $x_2 = (0{,}5; 0{,}25; 0{,}05)$,

Таблица 1

Точки	Метод Фурье		Метод сплайн-коллокации		
	$N_f, M_f = 10$	$N_f, M_f = 12$	$N, M = 10$	$N, M = 12$	$N_q, M_q = 12$
x_1	196,07648	196,08044	192,90677	193,27233	198,07835
x_2	193,23317	193,25883	191,12933	191,78271	193,40888
x_3	190,82797	190,83908	185,21909	185,65907	190,01029
x_4	126,50834	126,51714	121,58239	122,09784	126,12274
x_5	126,50834	126,51714	121,58237	122,09783	—

Таблица 2

Точки	Метод сплайн-коллокации			
	$N, M = 10$	$N, M = 12$	$N_q, M_q = 10$	$N_q, M_q = 12$
x_1	112,79711	115,55136	122,83467	124,64444
x_2	112,96858	115,37632	126,91670	128,68888
x_3	112,74096	115,55292	122,79864	124,56444
x_4	61,92496	63,65908	70,70366	72,08233
x_5	61,92497	63,65908	—	—

Таблица 3

Точки	Метод сплайн-коллокации					
	$a = 1$, $b = 0{,}5$			$a = 0{,}8$, $b = 0{,}5$		
	$N, M = 10$	$N, M = 12$	$N_q, M_q = 12$	$N, M = 10$	$N, M = 12$	$N_q, M_q = 12$
x_1	64,57038	68,92355	66,96888	29,84656	33,03305	33,89111
x_2	71,16021	70,51737	69,37333	30,23560	37,90385	37,11733
x_3	64,47902	68,617	68,20888	28,18063	32,90601	33,56044
x_4	30,62885	35,65169	33,89737	17,55941	16,67820	15,96774
x_5	30,62885	35,65169	—	17,55941	16,67820	—

$x_3 = (0{,}5; 0{,}25; 0{,}09)$, $x_4 = (0{,}3; 0{,}15; 0{,}05)$, $x_5 = (0{,}7; 0{,}35; 0{,}05)$; б) $x_1 = (0{,}4; 0{,}25; 0{,}01)$, $x_2 = (0{,}4; 0{,}25; 0{,}05)$, $x_3 = (0{,}4; 0{,}25; 0{,}09)$, $x_4 = (0{,}24; 0{,}15; 0{,}05)$, $x_5 = (0{,}56; 0{,}35; 0{,}05)$.

На основании данных, представленных в табл. 2 и 3, можно сделать вывод о том, что величина прогиба существенно зависит от геометрии пластины.

Таким образом, предложенный численно-аналитический подход дает возможность получить характеристику распределения полей перемещений и напряжений трехмерной ортотропной прямоугольной пластины под действием нагружения при различных граничных условиях на торцах. Как видно из полученных результатов, численные значения искомых функций при разном количестве точек ортогонализации практически совпадают. Это свидетельствует об устойчивости метода. При изменении количества точек коллокации также наблюдается практическая сходимость результатов расчетов. Критерием точности для данного метода является совпадение результатов работы программы с результатами, полученными методом Фурье для пластины с шарнирно закрепленным контуром. Поэтому можно сделать вывод, что предложенный численно-аналитический подход, который базируется на использовании метода сплайн-коллокации по двум координатным направлениям и метода дискретной ортогонализации для решения системы обычных дифференциальных уравнений высокого порядка, позволяет эффективно проводить исследования напряженно-деформированного состояния прямоугольных ортотропных пластин в трехмерной постановке.

1. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Некоторые задачи об равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1981. – № 1. – С. 133–138.
2. *Суслова Н. Н.* Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда // Итоги науки и техники. Сер. Механика тв. деформир. тела. – Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1980. – **13**. – С. 187–296.
3. *Douglas G. R.* A partially built-in plate under uniform load // J. of Elasticity. – 2001. – No 63. – P. 113–135.
4. *England A. H.* Bending solutions for inhomogeneous and laminated elastic plates // Ibid. – 2006. – No 82. – P. 129–173.
5. *Grigorenko A. Ya., Maltsev S. A.* On of natural vibrations of thin conical shells of variable thickness // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No 11. – P. 90–100.

6. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells in refined statement under changing // Ibid. – 2008. – **44**, No 9. – P. 53–62.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
8. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Численное решение задач об осесимметричных колебаниях сплошных цилиндров // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 5. – С. 10–20.
9. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А.* Исследование свободных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией // Там же. – 2010. – **46**, № 6. – С. 17–26.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 06.12.2010

A. Ya. Grigorenko, A. S. Bergulyov, S. N. Yaremchenko

Stress-strain state of thick-walled orthotropic rectangular plates

A numerically-analytical approach to researching the stress-strain state of orthotropic rectangular plates is proposed. The problem is solved on the basis of a three-dimensional model of the theory of elasticity. The system of partial differential equations is reduced to the one-dimensional problem within the method of spline-collocation in two coordinate directions. The boundary-value problem for a system of ordinary differential equations of the higher order is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. The examples of calculations for various geometric parameters and boundary conditions of orthotropic rectangular plates are presented.