УДК 517.929


**Р. І. Качурівський, Г. П. Пелюх**

# Про обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язки диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

*(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)*

*Отримано нові достатні умови існування неперервно диференційовних, обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу та досліджено їх властивості.*

Розглянемо рівняння вигляду

$$\dot{x}(t+1) = a\dot{x}(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt), \tag{1}$$

де $a$, $b$, $c$, $q$ — деякі дійсні сталі, яке було об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–7] та цитовану там літературу), і в даний час ряд питань теорії рівнянь такого типу достатньо добре вивчені. У даній роботі встановлено нові достатні умови існування неперервно диференційовних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків рівняння і розроблено метод їх побудови.

Мають місце такі теореми.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови:*

*1)* $0 < a < 1$, $q > 1$;

*2)* $2\alpha \dfrac{l}{a - a^q} \leqslant \Delta < 1$, *де* $\alpha = \max\left\{1; \dfrac{1}{|\ln a|}\right\}$, $l = \max\{|b|; |c|\}$.

*Тоді рівняння* (1) *має сім'ю неперервно диференційовних при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(t)$.

Розв'язки рівняння (1) будуються у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — неперервно диференційовні функції, які визначаються співвідношеннями

$$x_0(t) = -\int_t^{+\infty} a^{\tau} \omega(\tau)\, d\tau, \tag{$3_0$}$$

$$x_i(t) = \int_t^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^{-(j+1)} (bx_{i-1}(q(\tau+j)) + c\dot{x}_{i-1}(q(\tau+j)))\, d\tau, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{$3_i$}$$

$\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція.

Беручи до уваги умови теореми, методом математичної індукції неважко показати, що при $t \in \mathbb{R}^+$, $i = 0, 1, \ldots$, мають місце оцінки:

$$|\dot{x}_i(t)| \leqslant M_1 \Delta^i a^t, \qquad |x_i(t)| \leqslant M_2 \Delta^i a^t, \qquad i = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

де $M_1$, $M_2$ — деякі додатні сталі, $M_2 = M_1/|\ln a|$.

Отже, ряд (2), елементи якого визначаються співвідношеннями $(3_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервно диференційовної функції $x(t, \omega(t))$, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$ і задовольняє умови

$$|\dot{x}(t, \omega(t))| \leqslant \frac{M_1}{1 - \Delta} a^t, \qquad |x(t, \omega(t))| \leqslant \frac{M_2}{1 - \Delta} a^t. \tag{5}$$

Теорема 1 доведена.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови:*

*1)* $0 < a < 1$, $q > 1$*;*

*2)* $2\alpha \dfrac{l}{a - a^q} \leqslant \Delta < \dfrac{1}{2}$, *де* $\alpha = \max\left\{1; \dfrac{1}{|\ln a|}\right\}$, $l = \max\{|b|; |c|\}$.

*Тоді довільний неперервно диференційовний обмежений при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *рівняння* (1) *можна подати у вигляді ряду* (2)*, в якому функції* $x_i(t) = x_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються співвідношеннями* $(3_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, *а* $\omega(t)$ *— деяка неперервна 1-періодична функція.*

Для доведення теореми достатньо показати, що для довільного неперервно диференційовного обмеженого при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язку $\gamma(t)$ рівняння (1) існує неперервна 1-періодична функція $\omega(t)$ така, що виконується співвідношення

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t, \omega(t)). \tag{6}$$

Такою, зокрема, буде функція $w(t) = \lim\limits_{m \to \infty} \omega_m(t)$, де $w_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначаються за допомогою співвідношень

$$\omega_0(t) = a^{-t} \dot{\gamma}(t), \tag{7}$$

$$\omega_m(t) = a^{-t} \dot{\gamma}(t) - a^{-t} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{x}_i(t, \omega_{m-1}(t)), \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Розглянемо тепер систему рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t + 1) = A\dot{x}(t) + Bx(qt) + C\dot{x}(qt), \tag{9}$$

де $A$, $B$, $C$ — дійсні, сталі $(n \times n)$-матриці, $q$ — дійсна стала. При цьому відносно матриці $A$ будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \qquad |\lambda_i| \neq 0, 1, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді, як відомо, існує заміна змінних

$$x(t) = Sy(t),$$

де $S$ — деяка стала неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (9) до вигляду

$$\dot{y}(t+1) = \Lambda\dot{y}(t) + \widetilde{B}y(qt) + \widetilde{C}\dot{y}(qt), \tag{10}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\widetilde{B} = S^{-1}BS$, $\widetilde{C} = S^{-1}CS$.

Має місце така теорема

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови:*

*1)* $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q > 1$;

*2)* $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $2\beta\dfrac{l}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \leqslant \Delta < 1$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \lambda^* = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda^*|}\right\}, \qquad l = \max\{|\widetilde{B}|; |\widetilde{C}|\},$$

$$|\widetilde{B}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \qquad |\widetilde{C}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

*Тоді система рівнянь* (10) *має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$.

**Доведення.** Розв'язки системи рівнянь (10) будемо шукати у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{11}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервно диференційовні вектор-функції, що є розв'язками послідовності систем

$$\dot{y}_0(t+1) = \Lambda\dot{y}_0(t), \tag{$12_0$}$$

$$\dot{y}_i(t+1) = \Lambda\dot{y}_i(t) + \widetilde{B}y_{i-1}(qt) + \widetilde{C}\dot{y}_{i-1}(qt), \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{$12_i$}$$

Системи рівнянь $(12_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, мають множину неперервно диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = -\int_t^{+\infty} \Lambda^{\tau}\omega(\tau)\,d\tau, \tag{$13_0$}$$

$$y_i(t) = \int_t^{+\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)}(\widetilde{B}y_{i-1}(q(\tau+j)) + \widetilde{C}\dot{y}_{i-1}(q(\tau+j)))\,d\tau, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{$13_i$}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична вектор-функція. Розмірковуючи за індукцією, неважко показати, що так визначені вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є неперервно диференційовними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють умови

$$|y_0(t)| \leqslant M_1\lambda^{*t}, \qquad |\dot{y}_0(t)| \leqslant M_2\lambda^{*t}, \tag{$14_0$}$$

$$|y_i(t)| \leqslant M_1\Delta^i\lambda^{*qt}, \qquad |\dot{y}_i(t)| \leqslant M_2\Delta^i\lambda^{*qt}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{$14_i$}$$

де $M_1$, $M_2$ — деякі додатні сталі, $M_1 = M_2/|\ln\lambda^*|$.

Із ($14_i$), $i = 0, 1, \ldots$, безпосередньо випливає, що ряд (11), члени якого визначаються співвідношеннями ($13_i$), $i = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ до деякої неперервно диференційовної вектор-функції $y(t, \omega(t))$, яка залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ і задовольняє умови

$$|y(t, \omega(t))| \leqslant \frac{M_1}{1-\Delta}\lambda^{*t}, \qquad |\dot{y}(t, \omega(t))| \leqslant \frac{M_2}{1-\Delta}\lambda^{*t}. \tag{15}$$

Теорема 3 доведена.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови:*

*1)* $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q > 1$;

*2)* $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $2\beta\dfrac{l}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \leqslant \Delta < \dfrac{1}{2}$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \lambda^* = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda^*|}\right\}, \qquad l = \max\{|\widetilde{B}|; |\widetilde{C}|\},$$

$$|\widetilde{B}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|, \qquad |\widetilde{C}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

*Тоді довільний неперервно диференційовний обмежений при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язок* $\gamma(t)$ *системи* (10) *можна подати у вигляді ряду* (11)*, в якому вектор-функції* $y_i(t) = y_i(t, \omega(t))$, $i = 0, 1, \ldots$, *визначаються співвідношеннями* ($13_i$), $i = 0, 1, \ldots$, *а* $\omega(t)$ *— деяка неперервна 1-періодична вектор-функція.*

Аналогічні результати отримані і для систем диференціально-різницевих рівнянь вигляду

$$\dot{y}(t+1) = \Lambda\dot{y}(t) + F(t, y(qt), \dot{y}(qt)), \tag{16}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $q = \text{const}$, $F\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Зокрема, доведена така теорема.

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови:*

*1)* $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $q > 1$;

*2)* $F(t, 0, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$;

*3) для довільних* $(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, $(t, \overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *має місце співвідношення*

$$|F(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F(t, \overline{x}, \overline{y})| \leqslant L(|\overline{\overline{x}} - \overline{x}| + |\overline{\overline{y}} - \overline{y}|),$$

*де* $L$ *— деяка додатна стала;*

*4)* $\lambda_* > \lambda^{*q}$, $2\beta\dfrac{L}{\lambda_* - \lambda^{*q}} \leqslant \Delta < 1$, *де*

$$\lambda_* = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \lambda^* = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}, \qquad \beta = \max\left\{1; \frac{1}{|\ln\lambda^*|}\right\}.$$

*Тоді система рівнянь* (16) *має сім'ю неперервно диференційовних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків у вигляді ряду*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{17}$$

*де* $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — *неперервно диференційовні вектор-функції, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(t)$ *і визначаються співвідношеннями*

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= -\int\limits_t^{+\infty} \Lambda^{\tau}\omega(\tau)\,d\tau,\\
y_1(t) &= \int\limits_t^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-(k+1)} F(\tau+k, y_0(q(\tau+k)), \dot{y}_0(q(\tau+k)))\,d\tau,\\
y_i(t) &= \int\limits_t^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^{-(k+1)} \Bigg( F\Bigg(\tau+k, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(\tau+k)), \sum_{j=0}^{i-1} \dot{y}_j(q(\tau+k))\Bigg) -\\
&\quad - F\Bigg(\tau+k, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(\tau+k)), \sum_{j=0}^{i-2} \dot{y}_j(q(\tau+k))\Bigg)\Bigg) d\tau, \qquad i = 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
\tag{18}
$$


1. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. – Москва: ВИНИТИ, 1981. – Т. 19. – С. 55–126.
2. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 167 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 421 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 212 с.
5. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1626–1633.
6. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 75–95.
7. *Пелюх Г. П.* О свойствах решений предельной задачи для систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 2. – С. 217–224.


*Інститут математики НАН України, Київ*
*Надійшло до редакції 06.12.2010*

**R. I. Kachurivsky, G. P. Pelyukh**

## On solutions of differential-functional equations of neutral type bounded at $t \in \mathbb{R}^+$

*We obtain sufficient conditions for the existence of continuously differentiable solutions of differential-functional equations of the neutral type with linear deviations of the argument bounded at* $t \in \mathbb{R}^+$. *The structure of these solutions is investigated as well.*