Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2008

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 534.08.

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О запасе устойчивости по фазе в электродинамической виброиспытательной системе

A method of definition of the stability margin in phase for the systems reproducing vibrations with electrodynamic vibrobenches is developed.

В автоматических системах управления электродинамическими вибростендами (ЭДВ) имеет место погрешность, создаваемая при сравнении сигналов обратной связи с заданными. Сдвиг по времени выходной величины сигнала в ЭДВ относительно входной обусловлен инерционностью элементов управляющего устройства и самого вибростенда. Фазовые и частотные искажения, возникающие в системе ЭДВ, ухудшают точность воспроизведения необходимых гармонических и стохастических вибраций. Также при некотором сдвиге фаз сигналов задающего генератора и цепи обратной связи (ОС) система ЭДВ переходит в неустойчивую область работы, порождающую выход из строя ЭДВ. Это недопустимо. ОС формирует в системе ЭДВ устойчивый режим работы при сдвиге фаз между указанными сигналами, равными нулю. Сдвиг точки перехода через нуль в общем виде можно записать как корень уравнения

$$\sin\omega t - \sum_{k=2}^{n} K_{k\varphi}\sin(k\omega t + \varphi_k) = 0, \tag{1}$$

где ω — круговая частота ($\omega = 2\pi f$, f — частота); t — время; φ_k — k-й сдвиг фаз (инерционность в системе создает отрицательный φ_k); $K_{k\varphi}$ — коэффициент фазовых искажений k-го порядка.

Если представить гармонические сигналы в символической форме [1], то

$$\left.\begin{aligned} &\dot U_1 = \dot U_{1a}\ell^{j\omega t} = U_{1a}\ell^{j\varphi_1}\ell^{j\omega t},\\ &\dot U_k = \dot U_{ka}\ell^{jk\omega t} = U_{ka}\ell^{j\varphi_k}\ell^{jk\omega t},\\ &j=\sqrt{-1}, \qquad k=\overline{2,n}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из (2) видно, что искажения величины k-го сигнала $\dot{U}_k$ относительно $\dot{U}_1$ видны при изменении комплексной амплитуды $\dot{U}_{ka} = U_{ka}\ell^{j\phi_k}$. Исходя из этого,

$$K_{k\varphi} = \frac{\dot{U}_{ka}}{U_{1a}} = \frac{U_{ka}}{U_{1a}}\ell^{j(\phi_k - \varphi_1)}. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) можно представить в общем виде

$$\Delta\varphi = \omega t_0 = f(K_{2\varphi}, K_{3\varphi}, \ldots, K_{n\varphi}, \varphi_n), \tag{4}$$

куда входят $K_{k\varphi}$, $k = \overline{2, n}$, в виде (2) или (3), t_0 — время, соответствующее точке сравнения указанных выходного и входного сигналов в ЭДВ при $\varphi = 0$. Для синусоидального напряжения при наличии первой гармоники и при $U_{na}\sin n\omega t$ уравнение (1) может быть следующим:

$$\sin\omega t - K_{n\varphi}\sin(n\omega t + \varphi_n) = 0. \tag{5}$$

Условием максимального сдвига точки перехода разности сигналов через 0 в зависимости от φ_n является $\partial\omega t/\partial\varphi_n = 0$. Здесь с учетом (1), (2) и (5)

$$\frac{\partial\omega t}{\partial\varphi_n} = \frac{\partial}{\partial\varphi_n}\{\arcsin[K_{n\varphi}\sin(n\omega t + \phi_n)]\} = \left\{\arcsin\left[\frac{U_{na}}{U_{1a}}\ell^{j(\varphi_n - \varphi_1)}\sin(n\omega t + \phi_n)\right]\right\}. \tag{6}$$

Для решения (6) используем выражение [2] $\dfrac{d}{dx}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Получим

$$\frac{\partial\omega t}{\partial\varphi_n} = \frac{\dfrac{U_{na}}{U_{1a}}\ell^{j(\varphi_n - \varphi_1)}\left[\ell^{j\pi/2}\sin(n\omega t + \varphi_n) + \cos(n\omega t + \varphi_n)\right]}{\sqrt{1 - \sin^2\left[\dfrac{U_{na}}{U_{1a}}\ell^{j(\varphi_n - \varphi_1)}\sin(n\omega t + \varphi_n)\right]}}. \tag{7}$$

Приравнивая (7) нулю, получим выражение

$$j\sin(n\omega t + \varphi_n) + \cos(n\omega t + \varphi_n) = 0,$$

которое представим с помощью формул Эйлера

$$\sin x = \frac{\ell^{jx} - \ell^{-jx}}{2j}; \qquad \cos x = \frac{\ell^{jx} + \ell^{-jx}}{2}.$$

Тогда имеем

$$j\frac{\ell^{j(n\omega t + \varphi_n)} - \ell^{-j(n\omega t + \varphi_n)}}{2j} + \frac{\ell^{j(n\omega t + \varphi_n)} + \ell^{-j(n\omega t + \varphi_n)}}{2} = \ell^{j(n\omega t + \varphi_n)} = 0$$

или, воспользовавшись символической формой записи гармонической функции,

$$\sin(n\omega t + \varphi_n) = 0,$$

откуда $n\omega t + \varphi_n \approx m\pi$, где $m = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Подставив это выражение в (5), получим $\sin\omega t - K_{n\varphi} = 0$ и тогда (4) имеет вид

$$\Delta\varphi_{\max} = \arcsin K_{n\varphi} = \omega t_0.$$

Следует заметить, что обычно величины этих фазовых сдвигов определить затруднительно. В таких случаях целесообразно использовать понятие о времени запаздывания. Целесообразность анализа устойчивости на основе определения времени запаздывания заключается в том, что последнее может легко находиться экспериментально. Запаздывание и фазовый сдвиг являются разными количественными характеристиками одного и того же физического явления, вызываемого наличием реактивных элементов в системе (цепи).

Если процесс является гармоническим, то время запаздывания $\tau_{з}$ и фазовый сдвиг ψ связаны соотношением

$$\Psi(\omega) = \tau_{з}\omega. \tag{8}$$

Кроме экспериментальных характеристик, о величине времени запаздывания можно судить по известным фазовым характеристикам системы. Для этого необходимо воспользоваться передаточной функцией системы, в данном случае системы ЭДВ. В общем случае выражение передаточной функции, с учетом запаздывания разомкнутой системы, имеет вид

$$\overline{W}_\tau = \overline{W}(\omega)\ell^{j[\varphi(\omega)+\Psi(\omega)]}. \tag{9}$$

Вектор $\overline{W}_\tau$ по модулю равен $\overline{W}(\omega)$, т. е. передаточной функции, полученной без учета запаздывания, а по фазе повернут относительно $\overline{W}(\omega)\ell^{j\varphi(\omega)}$ на угол $\Psi(\omega)$. Этот угол равен нулю при $\omega = 0$, т. е. в этом случае $W_\tau(0) = W(0)$. При увеличении частоты Ψ между $\overline{W}_\tau$ и $\overline{W}$ возрастает, так как, согласно (8), $\Psi(\omega) = \tau_{з}\omega$. Любая система может самовозбудиться, если при $W(\omega) > 1$, вследствие наличия запаздывания, удовлетворяется неравенство

$$\varphi(\omega) + \Psi(\omega) = 2m\pi, \tag{10}$$

m — целое число $(0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Условие баланса фаз (10) выполняется независимо от знака m. При этом кривая, описываемая концом вектора $\overline{W}_\tau(\omega)$, охватит зону между $(-1, +j0)$ в системе координат комплексных чисел.

Приняв во внимание выражения (8)–(10), получим минимальное, или, как обычно его называют, критическое время запаздывания $\tau_{кр}$. Это время определяется при условии, что

$$\left.\begin{aligned} & W_{(\omega_{лр})} = 1, \\ & \tau_{кр} = \frac{(2m+1)\pi + \varphi_{(\omega_{лр})}}{\omega_{лр}}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Критическое время запаздывания $\tau_{кр}$ можно определить графически, используя частотный критерий Найквиста [3]. Для этого строится амплитудно-фазочастотная характеристика системы воспроизведения вибраций (СВВ) без запаздывания и в соответствии с выражениями (11) на графике проводится окружность радиусом 1. Точки пересечения этих двух кривых дадут значения $\varphi_{\text{кр}}$ и $\omega_{\text{кр}}$. Запас устойчивости СВВ по фазе в общем случае можно представить и как функцию параметров α_k системы и частоты среза $\omega_{\text{с}}$, т. е.

$$\Psi = \Psi(\omega_c, \alpha_k,\ k = \overline{1,n}). \tag{12}$$

При малых отклонениях параметров СВВ в условиях внешних воздействий запас устойчивости по фазе будет изменяться. Для определения этого факта разложим (12) в ряд Тейлора [2] в окрестности расчетных параметров α_k и ограничимся линейными членами ряда. Представим (12) в виде

$$\Psi_k = \Psi_k[\omega_c(\alpha_1), \omega_c(\alpha_2), \ldots, \omega_c(\alpha_n)]$$

и тогда

$$\Delta\Psi \approx \frac{\partial\Psi_k}{\partial\alpha_k} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_k} + \frac{\partial\Psi}{\partial\omega_c} \sum_{k=i}^{l} \frac{\partial\omega_c}{\partial\omega_k}\right)\Delta\alpha_k, \tag{13}$$

где $k = 1, 2, \ldots, i, i+1, \ldots, l, l+1, \ldots, m$; α_i, α_{i+1}, …, α_k — параметры системы.

Далее перейдем к конкретной СВВ с ЭДВ типа УЭВ 20/5000, параметры которого следующие: магнитная индукция в зазоре подвижной катушки $\mathrm{B}_\delta = 1{,}5$ Тл; активное сопротивление цепи подвижной катушки (ПК) $R_{\text{пк}} = 0{,}5\Omega$; индуктивность ПК — $L_{\text{пк}} = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ Гн; масса подвижной системы $m_1 = 13{,}6$ кг; масса подвижной катушки $m_2 = 4{,}9$ кг; длина провода подвижной катушки $l = 108$ м; собственная частота системы $\omega_0 = 125$ рад/с; коэффициенты диссипации колебательных систем подвижной катушки и механической части стенда соответственно $\xi_1 = 0{,}7$, $\xi_2 = 0{,}3$; пондеромоторные силы $F_1 = 1{,}6 \cdot 10^9$ н/м $= B_\delta i_{\max} l$, где $i_{\max}$ — ток в цепи подвижной катушки.

Передаточная функция СВВ с ЭДВ имеют вид [4]

$$W_c(p) = \frac{\tau_{\text{ф}} p + 1}{(\tau_{\text{пк}} з + 1)(T_1^2 p^2 + 2T_1\xi_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2T_2\xi_2 p + 1)}, \tag{14}$$

где $\tau_{\text{ф}}$, $\tau_{\text{пк}}$, T_1, T_2 — соответственно постоянные времени форсирующего звена, подвижной катушки, колебательных звеньев ПК и механический части стенда; $p = d/dt$ — оператор. В качестве параметров α_k, $k = \overline{1,m}$ (см. (14)) предполагаются все постоянные времени в СВВ. Частные производные $\partial\Psi/\partial\tau_{\text{ф}}$, $\partial\Psi/\partial\omega_c, \ldots$, представленные в (13), могут быть определены из выражения для запаса устойчивости по фазе (12). В данном случае для СВВ с ЭДВ запас устойчивости по фазе определяется соотношением

$$\Psi = \operatorname{arctg} \omega_c\tau_{\text{ф}} - \operatorname{arctg} \omega_c\tau_{\text{пк}} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi_1 T_1\omega_c}{1 - T_1^2\omega_c^2} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi_2 T_2\omega_c}{1 - T_2^2\omega_c^2},$$

где $\tau_{\text{ф}} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ с; $\tau_{\text{пк}} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ с; $T_1 = 0{,}84 \cdot 10^{-2}$ с; $T_2 = 0{,}45 \cdot 10^{-4}$ с; $\omega_{\text{ф}} = 0{,}6 \cdot 10^6$ рад/с; $\omega_{\text{пк}} = 125 \cdot 10^6$ рад/с; $\omega_1 = 1{,}2 \cdot 10^2$ рад/с; $\omega_2 = 2{,}2 \cdot 10^4$ рад/с; $\omega_{\text{с}}$ — частота среза, в точке пересечения логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАХ) с осью абсцисс (ω), т. е. когда ЛАХ $= 0 \cdot$ дб. Частные производные $\partial\omega_c/\partial\tau_{\text{ф}}$, $\partial\omega_c/\partial\tau_{\text{пк}}$, $\partial\omega_c/\partial\mathrm{T}_1$, $\partial\omega_c/\partial\mathrm{T}_2$ можно определить, если учесть, что для скорректированной системы СВВ ЛАХ пересекает ось абсцисс (ω) при ЛАХ $= 0 \cdot$ дб под наклоном 20 дб/дек [4]. Это дает возможность частоту среза $\omega_{\text{с}}$ представить посредством выражения

$$\omega_c = \frac{K_y\tau_{\text{ф}}}{\tau_{\text{пк}}\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2},$$

где K_y — коэффициент передачи разомкнутой СВВ.

Не приводя числовых вычислений для СВВ с УЭВ 20/5000, запас устойчивости по фазе определим в виде 69°, что позволяет обеспечивать регулирование частоты в дорезонансной области без потери устойчивости СВВ.

Для расширения частотного диапазона СВВ с УЭВ 20/5000 было введено в систему звено — фильтр, передаточная функция которого представляет собой обратную характеристику резонансной части СВВ, т. е. своеобразный фильтр-пробку на резонансной частоте СВВ.

Скорректированная по фазе СВВ обеспечила проведение виброиспытаний изделий как по методу качающей частоты, так и при воспроизведении СВВ стохастических вибраций.

1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. – 608 с.
3. *Фельдбаум А. Л., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П. и др.* Теоретические основы связи и управления. – Москва: Физматгиз, 1963. – 932 с.
4. *Божко А. Е.* Воспроизведение вибраций. – Киев: Наук. думка, 1975. – 191 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.01.2007

УДК 536.24

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,** академик НАН Украины **В. С. Дейнека**

Идентификация параметров многокомпонентных стержневых систем

We present a procedure of the construction of computational algorithms for solving the problems of identification of the parameters of multicomponent framed structures. The explicit formulas for Gâteaux derivatives used in the construction of gradient computational algorithms are obtained.

Теория оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [1–3] позволяет на основании решений прямых и соответствующих сопряженных задач получать явные выражения дифференциалов Гато квадратичных функционалов качества при различных (в том числе и комбинированных) способах наблюдений. Эта особенность, ранее установленная в работе [4] для однородных систем, авторами работы [5] использована для построения градиентных методов идентификации параметров однородных параболических систем.

В данной работе на основании результатов работ [1–3, 5] предложены вычислительные алгоритмы градиентных методов идентификации параметров многокомпонентных стержневых систем.