1. *Сейфуллин Т. Р.* Гомологии комплекса Кошуля системы полиномиальных уравнений // Доп. НАН України. – 1997. – № 9. – С. 43–49.
2. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля систем полиномов, связанных линейной зависимостью // Некоторые вопросы современной математики. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – С. 326–349.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Комплексы Кошуля вложенных систем полиномов и двойственность // Доп. НАН України. – 2000. – № 6. – С. 26–34.
4. *Сейфуллин Т. Р.* Идемпотентные косизигии системы полиномов // Там само. – 2006. – № 3. – С. 22–28.
5. *Сейфуллин Т. Р.* Двойственность в комплексе Кошуля на изолированной 0-мерной компоненте многообразия корней // Там само. – 2006. – № 4. – С. 16–21.
6. *Сейфуллин Т. Р.* Точечные косизигии системы полиномов // Там само. – 2007. – № 10. – С. 27–32.
7. *Маклейн С.* Гомология. – Москва: Мир, 1966. – 543 с.
8. *Бурбаки Н.* Алгебра. Гомологическая алгебра. – Москва: Наука, 1987. – 182 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 19.10.2006

УДК 517.5

Член-кореспондент НАН України **О. І. Степанець**, **А. С. Сердюк,**
А. Л. Шидліч

Про деякі нові критерії нескінченної диференційовності періодичних функцій

The set of $\mathcal{D}^\infty$ of infinitely differentiable periodic functions is studied in terms of generalized $\overline{\psi}$-derivatives defined by a pair $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ of sequences ψ_1 and ψ_2. It is established that every function f from the set $\mathcal{D}^\infty$ has at least one such derivative whose parameters ψ_1 and ψ_2 decrease faster than any power function. For an arbitrary function from $\mathcal{D}^\infty$ different from a trigonometric polynomial, there exists a pair ψ having the parameters ψ_1 and ψ_2 with the same properties, for which the $\overline{\psi}$-derivative already does not exist. On the basis of the proved statements, a number of criteria for a function to belong to the set $\mathcal{D}^\infty$ is given.

Нехай L — простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x) \,—$$

ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей таких, що $\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}^2(k)} \widetilde{A}_k(f; x)\right), \tag{1}$$

де $\widetilde{A}_k(f; x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ називають $\overline{\psi}$-похідною функції f і записують $\varphi(\cdot) = D^{\overline{\psi}}(f; \cdot) = f^{\overline{\psi}}(\cdot)$.

Зазначимо, що у випадку, коли

$$\psi_1(k) = k^{-r}\cos\frac{r\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = k^{-r}\sin\frac{r\pi}{2}, \qquad r > 0,$$

$\overline{\psi}$-похідна збігається з дробовою похідною в сенсі Вейля, яка, в свою чергу, при натуральних значеннях r є звичайною похідною порядку r.

Підмножину всіх функцій $f \in L$, у яких існують $\overline{\psi}$-похідні, позначають через $L^{\overline{\psi}}$. Нехай також C — простір неперервних 2π-періодичних функцій, $C^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}} \bigcap C$, і $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних опуклих донизу спадних до нуля послідовностей:

$$\mathfrak{M} = \{\lambda(k)\colon \lambda(k) > 0,\ \lambda(k) - 2\lambda(k+1) + \lambda(k+2) \geqslant 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty}\lambda(k) = 0\}.$$

Узагальнені $\overline{\psi}$-похідні були введені О. І. Степанцем у 1980-х рр. (див., напр., [1]). За допомогою цих похідних вдається ранжувати весь спектр інтегровних 2π-періодичних функцій, починаючи з функцій, ряди Фур'є яких можуть навіть розбігатися, і закінчуючи нескінченно диференційовними і, в їх числі, аналітичними та цілими функціями. При цьому виявилось, що, без суттєвих втрат загальності, послідовності ψ_1 і ψ_2 можна вибирати лише із множини $\mathfrak{M}$, оскільки, як показано в [2, гл. III], кожна функція $f \in C$ (або ж $f \in L$) має принаймні одну $\overline{\psi}$-похідну $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$, яка міститься в C (або ж в L), причому пару $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ можна брати так, щоб ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}$. Таким чином, виконуються рівності

$$\bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} C^{\overline{\psi}} = C. \tag{2}$$

Якщо $\mathcal{T}$ — множина всіх тригонометричних поліномів і $f \in \mathcal{T}$, то зрозуміло, що якою б не була пара $\overline{\psi}$, для якої $\overline{\psi}^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, функція f має $\overline{\psi}$-похідну. Звідси, зокрема, випливає, що множина $L^{\overline{\psi}}$ не може бути порожньою. Зрозуміло також, що $\bigcap\limits_{\overline{\psi}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{T}$, якщо $\overline{\psi}$ пробігає всю множину пар, для яких $\psi^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Більше того, виконується і рівність

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\overline{\psi}} = \mathcal{T}. \tag{3}$$

Звернемо увагу на те, що рівності (2) означають, що коли пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ пробігає множину $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то вся множина L (або C) розбивається на підмножини (класи) $L^{\overline{\psi}}$ (або $C^{\overline{\psi}}$). Рівність (3) означає, що при такій класифікації залишаються нерозрізненими тільки тригонометричні поліноми. Принагідно зазначимо, що спільна частина відомих класів W^r складається з множини $\mathcal{D}^\infty$ всіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, оскільки, як відомо, функція f належить множині $\mathcal{D}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли її коефіцієнти Фур'є $c_k(f)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію:

$$f \in \mathcal{D}^\infty \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} k^r c_k(f) = 0 \qquad \forall r > 0.$$

Тобто в шкалі класів W^r такі функції розрізнити не можна.

У даній роботі встановлюються необхідні і достатні умови нескінченної диференційовності функції f, які формулюються в термінах їх $\overline{\psi}$-похідних, компоненти ψ_1 та ψ_2 яких вибираються з множини $\mathfrak{M}$. Це дає змогу ранжувати всю множину $\mathcal{D}^\infty$ залежно від швидкості спадання послідовностей ψ, що визначають ці похідні.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geqslant 1$, що прямують до нуля при $t \to \infty$. Множину всіх таких функцій також будемо позначати через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \geqslant 0, \forall t_1, t_2 \in [1, \infty), \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\right\}.$$

Для характеристики швидкості спадання до нуля функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ зручно використовувати пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, які визначаються таким чином. При будь-якому $t \geqslant 1$

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ, значення $\eta(t)$ при кожному $t \geqslant 1$ визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_\infty^+$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}.$$

Основним результатом роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $f \in \mathcal{D}^\infty$, то можна вказати пару функцій $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+$, і у функції f існує $\overline{\psi}$-похідна $f^{\overline{\psi}}$, тобто $f \in C^{\overline{\psi}}$.*

У той же час для довільної функції $f \in L\backslash\mathfrak{T} \supset \mathcal{D}^\infty\backslash\mathfrak{T}$ можна вказати пару $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+$, і $f \overline{\in} L^{\overline{\psi}}$, тобто $f^{\overline{\psi}}$ не існує.

Теорема 1 дозволяє встановити декілька нових критеріїв належності функції f до множини $\mathcal{D}^\infty$.

Нехай $\mathfrak{M}^\infty$ — підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію:

$$\mathfrak{M}^\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon \forall r > 0 \lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = 0\}, \tag{4}$$

через $\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\alpha(\psi; t) \overset{\text{df}}{=} \dfrac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) \overset{df}{=} \psi'(t + 0)$ спадає до нуля при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}^{\mathcal{A}} = \{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \alpha(\psi; t) = 0\},$$

через $\mathfrak{M}'_\infty$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ прямує до нескінченності при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = \infty\}.$$

Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, то внаслідок нерівності

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leqslant 2\frac{\eta(\psi;t)-t}{t}, \qquad \forall t \geqslant 1, \qquad \psi \in \mathfrak{M}$$

(див., напр., [2, с. 164; 3]) справджується співвідношення

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leqslant 2 \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(\psi;t)-t}{t} = 0,$$

тобто ψ належить множині $\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}$.

Для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при будь-якому $t > 1$ виконується рівність

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)$$

(див., напр., [2, с. 164; 3]). Тому якщо $\psi \in \mathfrak{M}^{\mathcal{A}}$, то для довільного $r > 0$ і будь-якого t_0 такого, що $1/\alpha(t) \geqslant r+1$, $t \geqslant t_0$, маємо

$$\lim_{t\to\infty} t^r\psi(t) = \psi(1)\lim_{t\to\infty} \exp\left(r\ln t - \int\limits_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \psi(1)\lim_{t\to\infty} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^t \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha(\tau)} - r\right)d\tau + r\ln t_0\right) \leqslant \psi(1)\lim_{t\to\infty} e^{-\ln t + (r+1)\ln t_0} = 0,$$

і, отже, ψ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$.

Таким чином, виконуються такі вкладення:

$$\mathfrak{M}^+_\infty \subset \mathfrak{M}'_\infty \subset \mathfrak{M}^{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^\infty. \tag{5}$$

Якщо $f \in C^{\overline{\psi}}$ для деякої пари $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для якої функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$, то внаслідок (4) ряд (1) можна диференціювати довільну кількість разів і в результаті будемо отримувати рівномірно збіжні ряди, а отже, $f \in \mathcal{D}^\infty$.

Звідси на підставі ланцюжка вкладень (5) і теореми 1 отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{M}$ — будь-яка з множин $\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Еквівалентними є такі твердження:*

i) функція f належить множині $\mathcal{D}^\infty$;

ii) існує функція $\psi(t)$ з множини $\mathcal{M}$ така, що $f \in C^{\overline{\psi}}$ для всіх пар $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, для яких при кожному $k \in \mathbb{N}$ справджується рівність $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$;

iii) $f \in C^{\overline{\psi}}$ для деякої пари $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ такої, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathcal{M}$.

На підставі теорем 1 та 2 отримуємо аналоги співвідношень (2) і (3):

$$\mathcal{D}^\infty = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\infty} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}'_\infty} C^{\overline{\psi}} = \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^+_\infty} C^{\overline{\psi}}$$

і

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}'_\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}^+_\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\overline{\psi}}) = \mathcal{T}.$$

Таким чином, весь спектр 2π-періодичних нескінченно диференційовних функцій можна проранжувати за допомогою їх $\overline{\psi}$-похідних, причому пари $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ досить вибирати так, щоб функції $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належали до однієї з множин $\mathfrak{M}^+_\infty$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^{\mathcal{A}}$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Нерозрізненними при такій класифікації залишаються тільки тригонометричні поліноми.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин-та математики НАН Украины. Т. 40. – Киев, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
3. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688–702.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 16.05.2007

УДК 517.95

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко**

Об одной проблеме Стефана

By using the variational method, we study a nonlinear thermophysical problem with a free boundary. It is proved that an approximate solution based on the Ritz method tends to the exact one in a certain metric.

1. Постановка двухфазной стационарной задачи Стефана. Пусть $D = \{-1 < x < 1,\ H < y < 0\}$ обозначает полосу. Обозначим через γ кривую, отделяющую жидкую фазу D_γ^+ от твердой фазы D_γ^-, при этом концы y лежат на вертикалях $x = \pm 1$. Будем считать, что температурное поле монотонно убывает вместе с вертикальной координатой y. Таким образом, в нижней части полосы будет расположена твердая фаза, а в верхней — жидкая. Обе области D_γ^+ и D_γ^- предполагаются односвязными и симметричными относительно оси y.

Рассматривается задача. Требуется определить тройку $(u^\pm(x, y), \gamma)$ по следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 u^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\pm}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in D_\gamma^\pm, \tag{1}$$

$$u^+(x, 0) = v, \qquad v = \mathrm{const} > 1; \qquad u^-(x, H) = 0, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2}$$