УДК 519.21,519.718

І. В. Малик

Асимптотика детермінованих диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Одержано критерій асимптотичної поведінки для детермінованих диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. Даний метод грунтується на необхідних та достатніх умовах і не використовує додаткових конструкцій (наприклад, функціонал Ляпунова–Красовського).

Розглянемо функцію $y(t)$, що задовольняє детерміноване диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу [1–3]

$$\frac{dDy_t}{dt} = Ly_t + f(t) \tag{1}$$

та початкову умову

$$y_0 = \varphi. \tag{2}$$

Різницеві оператори D, L задані співвідношеннями [1, 2]

$$Dx_t := \sum_{i=0}^{n} \delta_i x(t - \tau_i); \qquad Lx_t := \sum_{i=0}^{n} l_i x(t - \tau_i), \tag{3}$$

де $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = h < \infty$; δ_i, l_i — дійсні константи, причому, $\delta_0 = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} |\delta_i| < 1$.

У даній роботі ставиться питання про асимптотичну стійкість розв'язку задачі (1), (2).

Означення 1. Розв'язок задачі (1), (2) називається експоненціально стійким, якщо $\exists\, M > 0$ та $c > 0$, що

$$|y(t)| \leqslant Me^{-ct}.$$

Наведемо два результати, що стосуються асимптотичної стійкості розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1 [2]. *Нехай $f \equiv 0$, D — стійкий різницевий оператор, $u(s)$, $v(s)$ та $w(s)$ — неперервні невід'ємні незростаючі функції при $s \geqslant 0$; $u(s) > 0$, $v(s) > 0$ при $s > 0$ та $u(0) = v(0) = 0$. Якщо існує неперервна функція $V\colon R^1_+ \times C \to R^1$, така, що*

$$u(\|D\varphi\|) \leqslant V(t, \varphi) \leqslant v(\|\varphi\|),$$

$$V'(t, \varphi) < -w(\|D\varphi\|) \qquad \textit{або} \qquad V'(t, \varphi) < -w(\|\varphi(0)\|),$$

то розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (1) стійкий. Якщо $u(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то розв'язок (1) — обмежений. Якщо $w(s) > 0$ при $s > 0$, то розв'язок (1) асимптотично стійкий.

У роботі [3] розглядаються рівняння, що містять лише одне запізнення ($\delta_2 = \dots = \delta_n = l_2 = \dots = l_n = 0$), та асимптотична поведінка розв'язків даних рівнянь.

Теорема 2 [3]. *Нехай розв'язок рівняння*

$$\frac{(1+\delta_1)dy_t}{dt} = (l_0 + l_1)y_t$$

асимптотично стійкий і рівняння

$$(l_0 + l_1)H = -C$$

має розв'язок, для якого

$$(1 - |\delta_1|)\Delta - (|l_0| + |l_1|) > 0, \qquad \Delta = \frac{1 - 4|Hl_1(1-\delta_1)^{-1}|}{4|H\delta_1(1-\delta_1)^{-1}|}.$$

Тоді тривіальний розв'язок рівняння (1) *асимптотично стійкий.*

Нижче розглядається інший підхід до розв'язання питання про асимптотичну стійкість розв'язку задачі (1), (2). Для цього на деякому ймовірнісному базисі $(\Omega, F, P, \Im)$ [4] розглянемо випадковий процес, що задовольняє стохастичне диференціально-різницеве рівняння (НСДРР)

$$dDx_t = (Ly_t + f(t))dt + \varepsilon x(t)dw(t) \tag{4}$$

та початкову умову

$$x_0 = \varphi. \tag{5}$$

Розглянемо функцію Коші $X(t)$ [1, 2] як розв'язок (1) при $f \equiv 0$, що задовольняє початкову умову

$$X(t) := \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & -h \leqslant t < 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Лема 1 [5]. *Розв'язок задачі* (1), (2) *задовольняє стохастичне інтегральне рівняння*

$$x(t) = y(t) + \varepsilon \int\limits_0^t X(t-s)x(s)\,dw(s). \tag{7}$$

Теорема 3 [5]. *Нехай виконуються такі умови:*

1) тривіальний розв'язок рівняння

$$\frac{dDz_t}{dt} = Lz_t \tag{8}$$

асимптотично стійкий;

2) характеристичний показник функції f задовольняє співвідношення

$$K_1 \colon = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t} < -\rho,$$

де

$$\rho := \sup\left\{\operatorname{Re} z\colon z\sum_{i=0}^{n}\delta_i e^{-\tau_i z} - \sum_{i=0}^{n} l_i e^{-\tau_i z} = 0\right\}$$

(у випадку фінітної функції f покладемо $K_1 = -\infty$).

Тоді для того щоб

$$\lim_{t\to\infty} Ex^2(t) = 0, \tag{9}$$

необхідно і достатньо виконання нерівності

$$B := \frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\infty |V(is)|^{-2} ds < 1, \tag{10}$$

де $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця.

Теорема 4. $\forall\, t > 0$ *має місце рівність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E|x(t) - y(t)|^2 = 0. \tag{11}$$

Доведення. Використаємо формулу (7):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E|x(t) - y(t)|^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\int_0^t X^2(t-s)Ex^2(s)\,ds = 0.$$

Теорема 4 доведена.

Теорема 5. *Для того щоб тривіальний розв'язок рівняння* (1) *був асимптотично стійкий, необхідно та достатньо виконання двох умов:*

1) $K_1\colon = \overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{\ln|f(t)|}{t} < -\rho,$

2) $\exists\,\varepsilon_0 > 0 : B = \dfrac{\varepsilon_0^2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty |V(is)|^{-2} ds = 1.$

Доведення. *Необхідність.* Нехай виконуються умови теореми. Тоді для $\forall\,\varepsilon < \varepsilon_0$

$$B = \frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_0^\infty |V(is)|^{-2} ds < 1.$$

Це означає, що при заданих $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі (4), (5) асимптотично стійкий, що на основі попередньої теореми гарантує асимптотичну стійкість розв'язку задачі (1), (2). Необхідність доведена.

Достатність. Нехай розв'язок задачі (1), (2) асимптотично стійкий. Тоді зрозумілим є те [1], що всі корені характеристичного квазіполінома $V(z)$ лежать в лівій півплощині комплексної площини **C**, а точніше

$$\rho := \sup\left\{\operatorname{Re} z\colon z\sum_{i=0}^{n}\delta_i e^{-\tau_i z} - \sum_{i=0}^{n} l_i e^{-\tau_i z} = 0\right\} < 0.$$

Тому можна стверджувати [1], що

$$B = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |V(is)|^{-2} ds < \infty,$$

що і доводить достатність.

Теорема 5 доведена.

Зауваження. За допомогою теореми 5 з переходом до процесу

$$u(t; p) := e^{pt} y(t)$$

розв'язується задача про точне значення характеристичного показника Ляпунова [5].

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради проф. В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. – Москва: Мир, 1967. – 545 с.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 420 с.
3. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997. – 236 с.
4. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – Москва: Физматизд, 1994. – Т. 2. – 473 с.
5. *Малик І. В., Савчук Б. В.* Максимальне запізнення для диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип 501. Математика. – Чернівці: Вид-во Чернів. нац. ун-ту, 2010. – С. 61–64.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 29.06.2010

I. V. Malyk

Asymptotics of determinate differential difference equations of the neutral time

A criterion of the asymptotic behaviour for the determinate differential difference equations of the neutral type is obtained. This method is based on necessary and sufficient conditions and uses no additional constructions (e.g., the Lyapunov–Krasovsky functional).