УДК 517.5

Ю. С. Коломойцев

О приближении функций обобщенными средними Бохнера–Рисса в пространствах Харди H_p, $0 < p \leqslant 1$

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Отримано критерії збіжності загальних середніх Бохнера–Рісса у просторі Харді $H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, де D^n — одиничний полікруг в $\mathbb{C}^n$. Також знайдено точні порядки наближення функцій цими середніми через K-функціонали та спеціальні модулі гладкості.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство, $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$, $|x|_q = (|x_1|^q + \dots + |x_n|^q)^{1/q}$, $|x| = |x|_2$, $\mathbb{R}^n_+$ — подмножество точек из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^n$ — с целыми координатами, $\mathbb{N}^n$ — с натуральными координатами, $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{Z}^n \bigcap \mathbb{R}^n_+$, $q\mathbb{N} = \{\nu \in \mathbb{N}\colon \nu \equiv 0 \pmod q\}$. $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f; $x_+ = \max\{x, 0\}$. Единичный поликруг обозначим через $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$. Биномиальные коэффициенты дробного порядка $\beta > 0$ будем обозначать через

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

и $\binom{\beta}{0} = 1$.

Запись $A(f,\varepsilon) \asymp B(f,\varepsilon)$ будет обозначать двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε.

Аналитическая в единичном поликруге D^n функция f принадлежит $H_p(D^n)$, если

$$\|f|_{H_p} = \sup_{\substack{0<\rho_j<1\\ j=1,\dots,n}} \|f(\rho_1 e^{it_1}, \dots, \rho_n e^{it_n})\|_p =$$

$$= \sup_{\substack{0<\rho_j<1\\ j=1,\dots,n}} \left(\int\limits_{[-\pi,\pi]^n} |f(\rho_1 e^{it_1}, \dots, \rho_n e^{it_n})|^p dt_1 \cdots dt_n \right)^{1/p} < \infty.$$

Любая функция из $H_p(D^n)$, $p > 0$, раскладывается в поликруге D^n в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} c_k(f) z^k,$$

где $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} = \rho_1^{k_1} e^{ik_1 t_1} \cdots \rho_n^{k_n} e^{ik_n t_n}$, $c_k(f) = c_{k_1,\dots,k_n}(f)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции f.

Обобщенные ℓ_q-средние Бохнера–Рисса определим следующим образом:

$$R^{\beta;\delta}_{\varepsilon;q}(f,z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n_+}(1-(\varepsilon|k|_q)^\beta)^\delta_+c_k(f)z^k, \tag{1}$$

где $x_+=\max\{x,0\}$, а числа q, β, δ и $\varepsilon>0$. При $q=2$ средние (1) называют обобщенными сферическими средними Бохнера–Рисса. Такие средние мы будем обозначать символом $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$.

Настоящая работа посвящена вопросам сходимости средних $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon;q}$, а также получению двусторонних оценок скорости приближения функций рассматриваемыми средними в пространстве $H_p(D^n)$, $0<p\leqslant 1$, в случае $q=1,2$.

Отметим, что вопросы сходимости для средних (1), а также двусторонние оценки скорости приближения функций рассматриваемыми средними и оценки для K-функционалов в пространствах Харди H_p при $0<p\leqslant 1$ изучались в работах [1–11]. Р.М. Тригубом в работе [7] при $\delta>n/p-(n+1)/2$ и четном натуральном β были получены двусторонние оценки приближения функций средними $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$ из $H^p(D^n)$ через K-функционал и специальный модуль гладкости. Вит. В. Волчков [8] сформулировал подобные теоремы для пространств Харди на шаре, а А.В. Товстолис [9] — на конусах в $\mathbb{R}^n$. А.А. Соляником в работе [4] при натуральном β была получена двусторонняя оценка приближения функций $f\in H^p(E_2)$ (E_2 — полуплоскость) соответствующими обобщенными средними Бохнера–Рисса. С.Г. Прибегин [10], используя методы статьи [4], доказал двустороннюю оценку приближения функций $f\in H^p(D)$ средними Бохнера–Рисса с любым показателем $\beta>1/p-1$ и $\delta>1/p-1$. Приближения функций $f\in H^p(D^n)$ средними Бохнера–Рисса $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon,1}$ для дробных и натуральных β изучались также в [11]. В частности, в работе [11] при $\beta\in\mathbb{N}\bigcup(1/p-1)$ и $\delta>n/p-1$ были получены оценки приближения функций рассматриваемыми средними через обычные модули гладкости. Однако оценка сверху приближения средними $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon,1}$ отличалась от оценки снизу.

Заметим здесь, что при $n=1$ разные модули гладкости эквивалентны между собой (см. [12]). А при $n\geqslant 2$, как показано в работе [6], обычные модули гладкости при $p=1$ для получения точных оценок приближения не подходят. Поэтому вводятся специальные модули гладкости.

В этой работе получены критерии сходимости средних $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon;q}$ при $q=1,\,2$, а также найден точный порядок приближения функций рассматриваемыми средними в пространстве $H_p(D^n)$, $0<p\leqslant 1$, через K-функционал и через специальные модули гладкости.

1. Критерии сходимости. Сформулируем теоремы сходимости для обобщенных средних Бохнера–Рисса.

Ключевую роль будут играть неравенства типа Бернштейна для аналитических тригонометрических полиномов. Множество аналитических тригонометрических полиномов порядка не выше N определим следующим образом:

$$\mathcal{T}^+_N=\operatorname{span}\{e^{i(k,t)}\colon k\in\mathbb{Z}^n_+,|k|\leqslant N\}.$$

В случае средних $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$ нам понадобится следующее неравенство типа Бернштейна:

$$\|\Delta^{\beta/2}T\|_p\leqslant CN^\beta\|T\|_p, \tag{2}$$

где Δ^β — степень оператора Лапласа,

$$\begin{aligned}
&\Delta^\beta T(e^{it_1},\ldots,e^{it_n}) = \sum_{|k|\leqslant N} |k|^{2\beta} c_k e^{i(k,t)},\\
&T(e^{it_1},\ldots,e^{it_n}) = \sum_{|k|\leqslant N} c_k e^{i(k,t)},
\end{aligned} \tag{3}$$

а C — константа, не зависящая от T и N. Отметим, что оператор Δ^β аналогичным образом, можно определить для любой функции $f \in H_p(D^n)$ путем умножения коэффициентов Тейлора $c_k(f)$ на множитель $|k|^{2\beta}$.

Будем говорить, что неравенство (2) имеет место в $H_p(D^n)$, если (2) выполняется в p-норме для любого полинома $T \in \mathcal{T}_N^+$ и всех $N \geqslant 1$ с положительной константой C, не зависящей от T и N.

Из результатов работы [13] вытекает следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $0 < p \leqslant 1$ и $\beta \in 2\mathbb{N}\bigcup(n(1/p-1),\infty)$. Тогда неравенство* (2) *имеет место в $H_p(D^n)$.*

Далее средние $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon;q}$ будем называть сходящимися в $H_p(D^n)$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f - R^{\beta,\delta}_{\varepsilon;q}(f)\|_{H_p} = 0$$

для каждой функции $f \in H_p(D^n)$.

Теорема 1. *Пусть $0 < p \leqslant 1$, $\beta > 0$ и неравенство* (2) *имеет место в $H_p(D^n)$. Средние $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$ сходятся в пространстве $H_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда $\delta > n/p - (n+1)/2$.*

Из теоремы 1 и предложения 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $0 < p \leqslant 1$ и $\beta \in 2\mathbb{N}\bigcup(n((1/p)-1),\infty)$. Средние $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$ сходятся в пространстве $H_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда $\delta > n/p - (n+1)/2$.*

Можно показать, что при $\beta \in ((n/2)((1/p)-1), n((1/p)-1)]\setminus(2\mathbb{N})$ предположение о справедливости неравенства (2) в $H_p(D^n)$ является необходимым условием для сходимости средних $R^{\beta,\delta}_\varepsilon$.

Для средних $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon,1}$ имеет место следующий критерий сходимости.

Теорема 2. *Пусть $0 < p \leqslant 1$ и $\beta > 0$. Средние $R^{\beta,\delta}_{\varepsilon,1}$ сходятся в пространстве $H_p(D^n)$ тогда и только тогда, когда $\delta > (1/p) - 1$.*

В качестве вспомогательного результата при доказательстве теоремы 2 получен аналог неравенства типа Бернштейна для дифференциального оператора $\mathcal{R}^\beta$, который определяется по формуле

$$\mathcal{R}^\beta f(z) = \sum_k |k|_1^\beta c_k(f) z^k. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть $0 < p \leqslant 1$, $\beta > 0$ и $N \geqslant 1$. Тогда для любого полинома $T \in \mathcal{T}_N^+$ имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{R}^\beta T\|_p \leqslant C N^\beta \|T\|_p, \tag{5}$$

где константа C не зависит от T и N.

2. Двусторонние оценки приближения. Для исследования скорости приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса мы будем использовать K-функционалы пары пространств, определяемых дифференциальными операторами (3) и (4).

Положим

$$K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p} = \inf_g\{\|f-g\|_{H_p} + \varepsilon^\beta\|\Delta^{\beta/2}g\|_{H_p}\}.$$

Теорема 4. *Пусть* $f\in H_p(D^n)$, $0<p\leqslant 1$, $\delta>n/p-(n+1)/2$, $\beta>0$ *и неравенство* (2) *имеет место в* $H_p(D^n)$. *Тогда*

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p}, \qquad \varepsilon>0.$$

Из теоремы 4 и предложения 1 получаем:
Следствие 2. *Пусть* $0<p\leqslant 1$, $\delta>n/p-(n+1)/2$ *и* $\beta\in 2\mathbb{N}\bigcup(n((1/p)-1),\infty)$. *Тогда*

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p}, \qquad \varepsilon>0.$$

Для оценки приближения средними $R_{\varepsilon,1}^{\beta,\delta}$ введем следующий K-функционал:

$$K_{\beta,1}(f,\varepsilon)_{H_p} = \inf_g\{\|f-g\|_{H_p} + \varepsilon^\beta\|\mathcal{R}^\beta g\|_{H_p}\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $f\in H_p(D^n)$, $0<p\leqslant 1$, $\delta>\dfrac{1}{p}-1$ *и* $\beta>0$. *Тогда*

$$\|f-R_{\varepsilon;1}^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp K_{\beta,1}(f,\varepsilon)_{H_p}, \qquad \varepsilon>0.$$

Рассмотрим вопрос об эквивалентности скорости приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса $R_\varepsilon^{\beta,\delta}$ и модуля гладкости. Для наших целей мы будем использовать следующий специальный модуль гладкости (см. [7]):

$$\omega_\beta^0(f,\varepsilon)_p = \left\| \int\limits_{|x|\leqslant 1} dx \int\limits_{|y|\leqslant 1} dy \cdots \int\limits_{|w|\leqslant 1} \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\beta}{\nu}(-1)^\nu f((\cdot)e^{i\varepsilon\nu(x+y+\cdots+w)})dw \right\|_{H_p}.$$

Здесь число $\varepsilon>0$, а интеграл (усреднение) берется по декартовому произведению m единичных шаров в $\mathbb{R}^n$ при $m>\dfrac{2n}{n+1}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}\right)$.

Важную роль при доказательстве оценок приближения через модуль гладкости ω_β^0 играет условие

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} dx \int\limits_{|y|\leqslant 1} dy \cdots \int\limits_{|w|\leqslant 1} (1-e^{i(t,x+y+\cdots+w)})^\beta dw \neq 0 \qquad \text{при} \qquad t\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \tag{6}$$

Замечание 1. Известно, что условие (6) имеет место, например, при $\beta\in(0,1)$ (см. [14]).
Теорема 6. *Пусть* $f\in H_p(D^n)$, $0<p\leqslant 1$, $\delta>n/p-(n+1)/2$, $\beta>0$, *неравенство* (2) *имеет силу в* $H_p(D^n)$ *и выполняется соотношение* (6). *Тогда*

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp \omega_\beta^0(f,\varepsilon)_p, \qquad \varepsilon>0.$$

Из теоремы 6 и следствия 2 получаем:

Следствие 3. *Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, $\delta > n/p - (n+1)/2$, $\beta \in 2\mathbb{N}\bigcup(n((1/p) - - 1), \infty)$ *и выполняется соотношение* (6). *Тогда*

$$\|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp \omega_\beta^0(f,\varepsilon)_p, \qquad \varepsilon > 0.$$

Из теорем 4 и 6 получаем:

Следствие 4. *Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, $\beta > 0$, *неравенство* (2) *имеет место в* $H_p(D^n)$ *и выполняется соотношение* (6). *Тогда*

$$K_\beta(f,\varepsilon)_{H_p} \asymp \omega_\beta^0(f,\varepsilon)_p, \qquad \varepsilon > 0.$$

Перейдем к оценкам приближения функций средними $R_{\varepsilon,1}^{\beta,\delta}$. Введем специальный модуль гладкости

$$\widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p = \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f(e^{-\nu\varepsilon}(\cdot)) \right\|_{H_p}. \tag{7}$$

При целых β модуль гладкости (7) был введен в работе [12] (см. также [15, гл. 8]).

Теорема 7. *Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, $\delta > (1/p) - 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\|f - R_{\varepsilon,1}^{\beta,\delta}(f)\|_{H_p} \asymp \widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p, \qquad \varepsilon > 0.$$

Из теорем 5 и 7 получаем:

Следствие 5. *Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\widetilde{K}_\beta(f,\varepsilon)_{H_p} \asymp \widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p, \qquad \varepsilon > 0.$$

1. *Стороженко Э. А.* О теоремах типа Джексона в H^p, $0 < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 4. – С. 946–692.
2. *Валашек Я.* О приближениях в многомерных пространствах Харди H^p, $0 < p \leqslant 1$ // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – **105**, № 1. – С. 21–24.
3. *Oswald P.* On some approximation properties of real Hardy spaces ($0 < p \leqslant 1$) // J. Approx. Theory. – 1984. – **40**, No 1. – P. 45–65.
4. *Solyanik A. A.* On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leqslant 1$) by certain means of Fourier integrals // Anal. Math. – 1986. – **12**. – P. 59–75.
5. *Colzani L.* Jackson theorems in Hardy spaces and approximation by Riesz means // Approx. Theory. – 1987. – **49**, No 3. – P. 240–251.
6. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378–1409.
7. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 4. – С. 145–160.
8. *Волчков Вит. В.* Мультипликаторы степенных рядов на областях Рейнхарта и их применение // Доп. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 22–26.
9. *Tovstolis A. V.* Fourier multipliers in Hardy spaces in tube domains over open cones and their applications // Meth. Func. Anal. Topol. – 1998. – **4**, No 1. – P. 68–89.
10. *Прибегин С. Г.* Приближение функций из H^p, $0 < p \leqslant 1$, обобщенными средними Рисса с дробным показателем // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 7. – С. 77–86.
11. *Прибегин С. Г.* О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < < p < \infty$ // Там же. – 2009. – **200**, № 2. – С. 89–106.
12. *Товстолис А. В., Тригуб Р. М.* Эквивалентность разных модулей гладкости в пространствах Харди // Тр. Ин-та прикл. математики и механики. – 1998. – **3**. – С. 201–210.

13. *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On some extensions of Berenstein's inequality for trigonometric polynomials // Functiones et Approxim. – 2001. – **29**. – P. 125–142.
14. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы Фурье и K-функционалы гладких функций // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, No 2. – С. 236–280.
15. *Trigub R. M., Belinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Dordrecht: Kluwer, 2004. – 585 p.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 20.10.2010

Yu. S. Kolomoitsev

On the approximation of functions by generalized Bochner–Riesz means in Hardy spaces H_p, $0 < p \leqslant 1$

Convergence criteria of the generalized Bochner–Riesz means in Hardy spaces $H_p(D^n)$, $0 < p \leqslant 1$, where D^n is a unit polydisk in $\mathbb{C}^n$, are obtained, and the exact orders of approximation of functions by these means via K-functionals and special moduli of smoothness are derived.