УДК 539.3

Т. Л. Ефимова

Исследование свободных колебаний ортотропных цилиндрических оболочек на основе различных моделей

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Досліджуються вільні коливання ортотропних циліндричних оболонок при різних граничних умовах на краях в уточненій постановці з застосуванням теорії Міндліна–Тимошенка та на основі тривимірної теорії пружності. Для розрахунку частот використовується чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації, а також методу колокації, дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. Проведено порівняння частот циліндричних оболонок з різними граничними умовами на торцях, отриманих в рамках різних моделей.

При исследовании динамических характеристик оболочек средней толщины следует применять либо уточненную теорию оболочек, либо проводить расчеты с использованием трехмерной теории упругости. В случае анизотропных нетонких оболочек решение такой задачи сопряжено со значительными трудностями. В научной литературе имеется ряд работ, посвященных исследованию колебаний полых цилиндров конечной длины в рамках трехмерной теории упругости [1–7] и цилиндрических оболочек с использованием различных теорий [2, 8–10].

В данном сообщении для исследования свободных колебаний нетонких цилиндрических оболочек в рамках трехмерной теории упругости, а также уточненной теории оболочек используется эффективная численная методика, которая базируется на применении сплайн-аппроксимации, а также метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с внутренним радиусом $R-H$ и внешним радиусом $R+H$ длиной L, изготовленную из ортотропного материала и использованием трехмерной модели. Исходные уравнения трехмерной теории упругости для задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в цилиндрической системе координат r, θ, z имеют вид:

уравнения движения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+2\frac{\sigma_{r\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2},
\end{gathered}\tag{1}$$

соотношения Коши

$$\begin{gathered}
e_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad e_\theta=\frac{1}{r}\left(u_r+\frac{u_\theta}{\partial\theta}\right),\qquad e_z=\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad 2e_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta},\\
2e_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},\qquad 2e_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}u_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r},
\end{gathered}\tag{2}$$

закон Гука

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z = \lambda_{11}e_r + \lambda_{12}e_\theta + \lambda_{13}e_z,\\
&\sigma_\theta = \lambda_{12}e_r + \lambda_{22}e_\theta + \lambda_{23}e_z,\\
&\sigma_r = \lambda_{13}e_r + \lambda_{23}e_\theta + \lambda_{33}e_z,\\
&\sigma_{r\theta} = \lambda_{44}e_{r\theta}, \qquad \sigma_{rz} = \lambda_{55}e_{rz}, \qquad \sigma_{\theta z} = \lambda_{66}e_{\theta z},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где элементы матрицы жесткости $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r, z)$ — непрерывные и дифференцируемые функции координат r и z. Здесь t — временная координата, $u_r(r, z, t)$; $u_\theta(r, z, t)$, $u_z(r, z, t)$ — проекции полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных, соответственно, к координатным линиям r, θ, z; e_r, e_θ, e_z — относительные линейные деформации в направлении координатных линий; $e_{\theta z}$, e_{rz}, $e_{r\theta}$ — деформация сдвига; σ_r, σ_θ, σ_z — нормальные напряжения; $\sigma_{\theta z}$, σ_{rz}, $\sigma_{r\theta}$ — касательные напряжения; плотность материала $\rho(r, z)$ — непрерывная функция координат r и z.

На цилиндрических поверхностях оболочки при $r = R \pm H$ отсутствуют напряжения, и граничные условия принимают вид

$$
\sigma_r(r, z, t) = 0, \qquad \sigma_{r\theta}(r, z, t) = 0, \qquad \sigma_{rz}(r, z, t) = 0. \tag{4}
$$

На торцах $z = 0$ и $z = L$ рассмотрим следующие граничные условия:

$$
1)\ \sigma_r = 0, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_r = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_r = 0; \tag{5}
$$

$$
2)\ \sigma_{rz} = 0, \qquad \sigma_{\theta z} = 0, \qquad u_z = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \qquad u_z = 0; \tag{6}
$$

$$
3)\ u_r = 0, \qquad u_\theta = 0, \qquad u_z = 0. \tag{7}
$$

Так как все точки оболочки совершают гармонические колебания с частотой ω, а также в силу периодичности рассматриваемых функций по координате θ, перемещения можно представить в виде (далее знак $\widehat{\ }$ опускается)

$$
\begin{aligned}
&u_r(r, \theta, z) = \widehat{u}_r(r, z) \cos n\theta \exp(i\omega t),\\
&u_\theta(r, \theta, z) = \widehat{u}_\theta(r, z) \sin n\theta \exp(i\omega t),\\
&u_z(r, \theta, z) = \widehat{u}_z(r, z) \cos n\theta \exp(i\omega t).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Выбрав в качестве неизвестных функций компоненты вектора перемещений $u_r(r, z)$, $u_\theta(r, z)$, $u_z(r, z)$, запишем разрешающую систему уравнений относительно перемещений в виде [6]

$$
L_i \overline{g} = 0, \tag{9}
$$

где L_i $(i = 1, 2, 3)$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка, а $\overline{g} = \{u_r(r, z), u_\theta(r, z), u_z(r, z)\}$.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круговых цилиндрических оболочек уточненной постановке Миндлина–Тимошенко, которая базируется на гипотезе прямой линии, в соответствии с которой в системе координат γ, θ, z, $(-h/2 \leqslant \gamma \leqslant h/2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant L)$ перемещения можно записать в виде

$$u_\gamma(\gamma,\theta,z) = w(\theta,z), \qquad u_\theta(\gamma,\theta,z) = v(\theta,z) + \gamma\psi_\theta(\theta,z),$$
$$u_z(\gamma,\theta,z) = u(\theta,z) + \gamma\psi_z(\theta,z). \tag{10}$$

Здесь $u(\theta,z)$, $v(\theta,z)$, $w(\theta,z)$ — перемещения координатной поверхности, $\psi_\theta(\theta,z)$, $\psi_z(\theta,z)$ — функции, которые характеризуют полный поворот прямолинейного элемента. В соответствии с (10) выражения для деформаций примут вид

$$e_\theta(\gamma,\theta,z) = \varepsilon_\theta(\theta,z) + \gamma\kappa_\theta(\theta,z), \qquad e_z(\gamma,\theta,z) = \varepsilon_z(\theta,z) + \gamma\kappa_z(\theta,z),$$
$$e_{\theta z}(\gamma,\theta,z) = \varepsilon_{\theta z}(\theta,z) + 2\gamma\kappa_{\theta z}(\theta,z), \qquad e_{\gamma\theta}(\gamma,\theta,z) = \gamma_\theta(\theta,z), \tag{11}$$
$$e_{\gamma z}(\gamma,\theta,z) = \gamma_z(\theta,z).$$

В (11) ε_θ, ε_z, $\varepsilon_{\theta z}$ — тангенциальные, κ_θ, κ_z, $\kappa_{\theta z}$ — изгибные деформации координатной поверхности, γ_θ, γ_z — углы поворота нормали, обусловленные поперечными сдвигами.

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta z}}{\partial \theta} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{R}Q_\theta = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{R}N_\theta = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{\theta z}}{\partial \theta} - Q_z = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}, \tag{12}$$
$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{z\theta}}{\partial z} - Q_\theta = \rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 \psi_{z\theta}}{\partial t^2},$$

причем $N_{z\theta} - M_{\theta z}R^{-1} - N_{\theta z} = 0$; N_z, N_θ, $N_{z\theta}$, $N_{\theta z}$ — тангенциальные усилия; Q_z, Q_θ — перерезывающие усилия; M_z, M_θ, $M_{z\theta}$, $M_{\theta z}$ — изгибные и скручивающие моменты; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки.

Соотношения упругости для ортотропных оболочек симметричной структуры по толщине относительно выбранной координатной поверхности запишеим в виде

$$N_z = C_{11}\varepsilon_z + C_{12}\varepsilon_\theta, \qquad N_\theta = C_{12}\varepsilon_z + C_{22}\varepsilon_\theta, \qquad N_{\theta z} = C_{66}\varepsilon_{\theta z},$$
$$N_{z\theta} = C_{66}\varepsilon_{\theta z} + 2D_{66}\frac{1}{R}\kappa_{\theta z}, \qquad M_z = D_{11}\kappa_z + D_{12}\kappa_\theta, \qquad M_\theta = D_{11}\kappa_z + D_{22}\kappa_\theta, \tag{13}$$
$$M_{\theta z} = M_{z\theta} = 2D_{66}\kappa_{\theta z}, \qquad Q_\theta = K_2\gamma_\theta, \qquad Q_z = K_1\gamma_z,$$

где

$$K_1 = \frac{5}{6}hG_{13}; \qquad K_2 = \frac{5}{6}hG_{23}; \qquad C_{ij} = B_{ij}h; \qquad D_{ij} = \frac{B_{ij}h^3}{12};$$
$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \qquad B_{66} = G_{12},$$

G_{13}, G_{23}, G_{12} — модули поперечных сдвигов; E_1, E_2 — модули упругости; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона. На криволинейных контурах $z = 0$, L рассмотрим такие граничные условия:

1) контур жестко защемлен

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_z = 0;$$

2) контур шарнирно оперт и свободный в направлении образующей

$$\frac{\partial u}{\partial z} = v = w = \frac{\partial \psi_z}{\partial z} = \psi_\theta = 0.$$

При $\theta = 0$, π задаются условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0.$$

Так как все точки оболочки совершают гармонические колебания с частотой ω, а также в силу периодичности рассматриваемых функций по координате θ, перемещения и полные углы поворота можно представить в виде (далее знак $\widehat{\ }$ опускается)

$$\begin{aligned} &u(\theta, z, t) = \widehat{u}(\theta, z) \exp(i\omega t), \qquad v(\theta, z, t) = \widehat{v}(r, z) \exp(i\omega t), \\ &w(\theta, z, t) = \widehat{w}(r, z) \exp(i\omega t), \qquad \psi_\theta(\theta, z, t) = \widehat{\psi_\theta}(r, z) \exp(i\omega t), \\ &\psi_z(\theta, z, t) = \widehat{\psi_z}(r, z) \exp(i\omega t). \end{aligned} \tag{14}$$

Выбрав в качестве неизвестных функций компоненты вектора перемещений срединной поверхности и полные углы поворота, разрешающую систему уравнений в частных производных можно записать в виде [4]

$$L_i \bar{f} = 0, \tag{15}$$

где L_i $(i = \overline{1,5})$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка, а $\bar{f} = \{u(r,z), v(r,z), w(r,z), \psi_\theta(r,z), \psi_z(r,z)\}$.

Система уравнений (9) (или (15)) с соответствующими граничными условиями представляет собой двумерную краевую задачу на собственные значения.

Метод решения. Решение задачи (9) для трехмерной теории упругости представим в виде

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \sum_{i=0}^{N} u_{ri}(r) \varphi_{1i}(z), \\ u_\theta(r, z) &= \sum_{i=0}^{N} u_{\theta i}(r) \varphi_{2i}(z), \\ u_z(r, z) &= \sum_{i=0}^{N} u_{zi}(r) \varphi_{3i}(z), \end{aligned} \tag{16}$$

где u_{ri}, $u_{\theta i}$, u_{zi} — искомые функции переменной r, $\varphi_{ji}(z)$ $(j = 1, 2, 3;\ i = 1, \ldots, N)$ — линейные комбинации кубических B-сплайнов на равномерной сетке $\Delta\colon 0 = z_0 < z_1 < \cdots <$

$< z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Для уточненной неклассической теории решение задачи (15) решение задачи представим в виде

$$u(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_i(r)\varphi_{1i}(z), \qquad v(r,z) = \sum_{i=0}^{N} v_i(r)\varphi_{2i}(z),$$
$$w(r,z) = \sum_{i=0}^{N} w_i(r)\varphi_{3i}(z), \qquad \psi_\theta(r,z) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{\theta i}(r)\varphi_{4i}(z), \tag{17}$$
$$\psi_z(r,z) = \sum_{i=0}^{N} \psi_{zi}(r)\varphi_{5i}(z).$$

Подставляя представление (17) в уравнения (15) (либо (16) в уравнения (9)), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0, L]$, $k = 0, N$ [4]. В результате получаем одномерную краевую задачу, которую для трехмерной теории упругости можно записать в виде

$$\frac{d\overline{Y}}{dr} = A(r,\omega)\overline{Y}, \tag{18}$$
$$B_1\overline{Y} = \overline{0} \quad \text{при} \quad r = R - H, \qquad B_2\overline{Y} = \overline{0} \quad \text{при} \quad r = R + H,$$

где $\overline{Y} = \{\overline{u}_r, \overline{u'}_r, \overline{u}_\theta, \overline{u'}_\theta, \overline{u}_z, \overline{u'}_z\}$; $\overline{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1}, \ldots, u_{rN}\}$; $\overline{u}_\theta = \{u_{\theta 0}, u_{\theta 1}, \ldots, u_{\theta N}\}$; $\overline{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \ldots, u_{zN}\}$; A — квадратная матрица; B_1, B_2 — прямоугольные матрицы граничных условий. Аналогично для теории оболочек получаем одномерную краевую задачу

$$\frac{d\overline{Y}}{d\theta} = A(\theta,\omega)\overline{Y}, \tag{19}$$
$$B_1\overline{Y} = \overline{0} \quad \text{при} \quad \theta = 0, \qquad B_2\overline{Y} = \overline{0} \quad \text{при} \quad \theta = \pi,$$

где $\overline{Y} = \{\overline{u}, \overline{u'}, \overline{v}, \overline{v'}, \overline{w}, \overline{w'}, \overline{\psi}_\theta, \overline{\psi}'_\theta, \overline{\psi}_z, \overline{\psi}'_z\}$; $\overline{u} = \{u_0, u_1, \ldots, u_N\}$; $\overline{v} = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$; $\overline{w} = \{w_0, w_1, \ldots, w_N\}$; $\overline{\psi_\theta} = \{\psi_{\theta 0}, \psi_{\theta 1}, \ldots, \psi_{\theta N}\}$; $\overline{\psi_z} = \{\psi_{z0}, \psi_{z1}, \ldots, \psi_{zN}\}$; A — квадратная матрица; B_1, B_2 — прямоугольные матрицы граничных условий.

Задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (18) с соответствующими граничными условиями решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [2].

Решение задачи. Анализ результатов. Для оценки точности предложенной методики приводилось сравнение (табл. 1) первых четырех обезразмеренных частот $\overline{\omega}_i = \omega_i H\sqrt{\rho/G_0}$, $G_0 = 10^4$ МПа колебаний полого ортотропного цилиндра с шарнирно опертыми торцами ($H/R = 0{,}1$, $H/L = 0{,}05$), полученных: A) в рамках трехмерной теории

Таблица 1

ω_i	n	A	B	C
$\overline{\omega}_1$	2	0,0412	0,0436	0,0434
$\overline{\omega}_2$	1	0,0529	0,0530	0,0529
$\overline{\omega}_3$	3	0,0547	0,0562	0,0559
$\overline{\omega}_4$	1	0,0562	0,0598	0,0592

Таблица 2

H/L	H/R	ω_i	n	Трехмерная модель	Модель Миндлина
1/40	1/10	$\overline{\omega}_1$	2	0,0276	0,0275
		$\overline{\omega}_2$	1	0,0298	0,0298
		$\overline{\omega}_3$	3	0,0507	0,0483
1/20	1/10	$\overline{\omega}_1$	2	0,0543	0,0542
		$\overline{\omega}_2$	1	0,0526	0,0625
		$\overline{\omega}_3$	3	0,0681	0,0676
1/10	1/4	$\overline{\omega}_1$	1	0,1404	0,1390
		$\overline{\omega}_2$	2	0,1592	0,1552
		$\overline{\omega}_3$	3	0,2533	0,2431

с применением возможного в данном случае разложения $u_r = \widetilde{u}_r(r)\sin(m\pi z/L)$, $u_\theta = \widetilde{u}_\theta(r) \times \sin(m\pi z/L)$, $u_z = \widetilde{u}_z(r)\cos(m\pi z/L)$ с последующим решением одномерной задачи методом дискретной ортогонализации; B) с использованием метода сплайн-коллокации в рамках трехмерной модели; C) с использованием метода сплайн-коллокации и модели Тимошенко–Миндлина. Параметры ортотропии материала для расчетов выбирались такими: $E_r = 0{,}42G_0$, $E_\theta = 1{,}31G_0$, $E_z = 1{,}79G_0$, $G_{\theta z} = 0{,}28G_0$, $G_{r\theta} = G_{rz} = 0{,}24G_0$, $\nu_{z\theta} = 0{,}15$, $\nu_{r\theta} = 0{,}31$, $\nu_{rz} = 0{,}08$. Для трехмерной теории расчеты проводились для различных значений параметра волнообразования n и выстраивались в порядке возрастания. При сравнении соответствующих частот следует учесть, что при использовании численных методов происходила перестройка третьей и четвертой частот, которые соответствовали значениям параметра волнообразования $n = 3$ и $n = 1$, соответственно. При этом максимальное различие частот не превышает 0,05%.

Проводилось сравнение частоты колебаний ортотропного цилиндра с выше указанными жесткостными параметрами в рамках данных моделей для различных значений H/L и H/R (табл. 2). Рассматривался цилиндр с жестко защемленными торцами.

Для оболочек с $H/R = 0{,}1$ различие частот не превышает 0,24%. При этом следует отметить, что для довольно толстой оболочки с $H/R = 0{,}25$ уточненная теория дает хорошее совпадение (различие до 1%).

1. *Григоренко А. Я.* Численное решение задачи о свободных осесимметричных колебаниях полого ортотропного цилиндра при различном закреплении торцов // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 49–54.
2. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
3. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л.* Применение метода сплайн-апроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 74–85.
4. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
5. *Ефимова Т. Л.* Численное решение задачи о неосесимметричных свободных колебаниях ортотропных неоднородных цилиндров на основе метода сплайн-коллокации // Доп. НАН України. – 2010. – № 3. – С. 58–64.
6. *Heyliger P. R.* Axisymmetric free vibrations of finite anisotropic cylinders // J. Sound and Vibration. – 1991. – **148**, No 3. – P. 507–520.
7. *Loy C. T., Lam K. Y.* Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // Ibid. – 1999. – **226**, No 4. – P. 719–737.
8. *Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколова Л. В.* Свободные колебания круговых цилиндрических оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Теорет. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 43. – С. 111–117.

9. *Leissa A. W.* Vibration of shells. – Washington: NASA, 1973. – 428 p.
10. *Sividas K. R., Ganesan N.* Free vibration of circular cylindrical shells with axially varying thickness // J. Sound and Vibration. – 1991. – **147**, No 1. – P. 73–85.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.07.2010

T. L. Efimova

Investigation of free vibrations of orthotropic cylindrical shells within the framework of different models

A problem of natural vibrations of orthotropic cylindrical shells under various boundary conditions of its end-faces within the framework of the Mindlin–Timoshenko theory and on the basis of 3-D elasticity theory is considered. Using the method of spline-approximation and collocation, the problems are solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The comparison of the frequencies of cylindrical shells with different boundary conditions on their ends within various models is performed.