УДК 519.6

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,**
академик НАН Украины **В. С. Дейнека**

Идентификация на основе слабых задач параметров гиперболических систем в условиях импульсных и сосредоточенных воздействий

На основі оптимального керування побудовані явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації різноманітних параметрів гіперболічних систем, що знаходяться під імпульсним та зосередженим впливом.

В работах [1–4 и др.] на основе использования полученных авторами результатов теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [5, 6] рассмотрены вопросы построения явных выражений градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами [7] различных параметров многокомпонентных гиперболических систем.

Ниже рассмотрена возможность развития разработанной технологии на случай, когда такие системы находятся под импульсным и сосредоточенным воздействием.

Традиционно импульсные воздействия характеризуются "мгновенным" воздействием на систему и математически учитываются с помощью δ-функции Дирака, обладающей свойством [8]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(s-\tau)\,ds = f(\tau)$$

для любой непрерывной функции f.

При решении различных практических задач часто используют прием замены δ-функции Дирака некоторыми непрерывными "почти импульсными" функциями [8–10 и др.]. Если при решении практической задачи искомое решение, получаемое в пределе, не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности, то рассматриваемая система называется системой со свойством корректности [8].

Задачи идентификации. Пусть на интервале $(0, l)$ определено гиперболическое уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + f(x,t) + \sum_{i=1}^{n_1} q_i\delta(t-\tau_i)\delta(x-\xi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{n_2}\omega_j(t)\chi(\tau_1^j,\tau_2^j)\delta(x-\overline{\xi}_j), \qquad t\in(0,T), \tag{1}$$

где $\rho = \rho(x) \geqslant \rho_0 = \text{const} > 0$, $0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1 < \infty$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$, $k \in C^1(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L_2(\Omega))$, $\Omega = (0,l)$, $q_i \in R$, $R = (-\infty,+\infty)$, $\omega_j(t) \in C([\tau_1^j,\tau_2^j])$, $\chi(\tau_1^j,\tau_2^j) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t\in[\tau_1^j,\tau_2^j], \\ 0 & \text{при} & t\notin[\tau_1^j,\tau_2^j], \end{array}\right.$ $\tau_k^j \in [0,T]$, $k = 1,2$.

На концах отрезка $[0,l]$ заданы смешанные краевые условия

$$y(0,t)=\varphi(t), \qquad k\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l}=\beta(t), \qquad t\in(0,T). \tag{2}$$

При $t=0$ имеем начальные условия

$$y(x,0)=y_0(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0}=y_1(x), \qquad x\in\Omega. \tag{3}$$

В некоторых точках $d_i\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$, известны значения решения начально-краевой задачи (1)–(3), заданные равенствами

$$y(d_i,t)=f_i(t), \qquad t\in(0,T). \tag{4}$$

В задаче (1)–(3) могут быть неизвестны некоторые из параметров ρ, k, f, q_i, ω_j, φ, β, y_0, y_1. Тогда равенства (4) позволяют формулировать множество обратных задач по определению некоторых из указанных параметров, при которых решение начально-краевой задачи (1)–(3) удовлетворяет системе равенств (4).

Идентификация мощностей импульсных воздействий. Пусть в задаче (1)–(4) мощности $q_i\in R$, $i=\overline{1,n_1}$, импульсных воздействий являются неизвестными.

Введем в рассмотрение последовательности $\{\varphi^k(z,s)\}$, $k=1,2,\ldots$, функций из L_2, приближающих δ-функцию $\delta(z-s)$, определенную в точке $z=s$. Тогда при каждом k при замене δ-функции $\delta(z-s)$ ее приближением $\varphi^k(z,s)$ правая часть уравнения (1) принадлежит пространству $L^2(0,T;L_2(\Omega))$.

С учетом последовательностей $\{\varphi^k\}$, результатов работы [5], на основании (1)–(3) получаем задачу. На области Ω_T

$$\rho\frac{\partial^2 y^k}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial y^k}{\partial x}\right)+\sum_{i=1}^{n_1}u_i^k\varphi^k(t,\tau_i)\varphi^k(x,\xi_i), \tag{5}$$

где $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=\bigcup\limits_{j=0}^{n_2}\Omega_j$, $\Omega_i=(\overline{\xi}_i,\overline{\xi}_{i+1})$, $\overline{\xi}_0=0$, $\overline{\xi}_{n_2+1}=l$, $i=\overline{1,n_2}$.

В точках $\overline{\xi}_j$, следуя [5], сосредоточенные воздействия учтем с помощью условий сопряжения

$$[y^k]\Big|_{x=\overline{\xi}_j}=0, \qquad t\in(0,T), \tag{6}$$

$$\left[k\frac{\partial y^k}{\partial x}\right]\bigg|_{x=\overline{\xi}_j}=-\omega_j\chi(\tau_1^j,\tau_2^j), \qquad t\in(0,T), \qquad j=\overline{1,n_2}, \tag{7}$$

где $[\psi]|_{x=\overline{\xi}_j}=\psi(\overline{\xi}_j+0,t)-\psi(\overline{\xi}_j-0,t)$.

Краевые условия имеют вид (2), а при $t=0$ заданы начальные условия (3).

Определение 1. При каждом $u=u^k\in U=R^{n_1}$ обобщенным решением начально-краевой задачи (5)–(7), (2), (3) называется функция $y^k(u;x,t)\in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x)\in V_0=\{v(x)\colon v|_{\Omega_j}\in W_2^1(\Omega_j),\ j=\overline{0,n_2},\ [v]|_{x=\overline{\xi}_j}=0,\ v(0)=0\}$ удовлетворяет равенствам

$$\left(\rho\frac{\partial^2 y^k}{\partial t^2},w\right)+a(y^k,w)=l_k(w), \qquad t\in(0,T), \tag{8}$$

$$y^k|_{t=0} = y_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial y^k}{\partial t}\right|_{t=0} = y_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$

где

$$W(0,T) = \left\{ v(x,t) \in L^2(0,T;V)\colon \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;L_2(\Omega)) \right\},$$

$$V = \{v(x,t)\colon v|_{\Omega_j} \in W_2^1(\Omega_j), j = \overline{0,n_2}, [v]|_{x=\overline{\xi}_j} = 0, j = \overline{1,n_2}; v(0,t) = \varphi(t),\ t \in (0,T)\},$$

$$(z,w) = \int\limits_{\Omega} zw\,dx, \qquad a(y^k,w) = \int\limits_{\Omega} k\frac{\partial y^k}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx,$$

$$l_k(w) = (f,w) + \sum_{i=1}^{n_1} u_i^k \varphi^k(t,\tau_i)(\varphi^k(\cdot,\xi_i), w(\cdot)) + \sum_{j=1}^{n_2} \omega_j(t)\chi(\tau_1^j,\tau_2^j)w(\overline{\xi}_j) + \beta w(l).$$

Следуя [5, 6], легко установить, что при каждом фиксированном $u = u^k \in U$ решение $y^k(u;x,t)$ задачи (8)–(10) существует и единственно.

Составим функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \sum_{i=1}^N \rho_i(y(u;d_i,t) - f_i(t))^2 dt, \tag{11}$$

где ρ_i — весовые коэффициенты.

При каждом фиксированном k задачу (8)–(11) будем решать с помощью градиентных методов [7]:

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \qquad n = 0,1,\ldots,n^*, \tag{12}$$

где направление спуска p_n и коэффициент β_n, следуя [7], определяем так:

для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}; \tag{13}$$

для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}; \tag{14}$$

для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \qquad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}. \tag{15}$$

Здесь J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - \overline{f}$, $Au_n = \{y(u_n;d_i,t)\}_{i=1}^N$, $y(u_n;d_i,t) = y^k(u_n^k;d_i,t)$.

Под решением задачи (1)–(3), (11) будем подразумевать граничное значение решений u^k, $k \to \infty$, задач (8)–(11).

Для каждого приближения $u_n = u_n^k(t) \in U$ задачи (8)–(11) на основании [2, 5] сопряженная задача имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad (x,t) \in \Omega_{dT},\\
&[\psi]|_{x=\overline{\xi}_j} = 0, \qquad t \in (0,T), \qquad j = \overline{1,n_2},\\
&\left[k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\bigg|_{x=\overline{\xi}_j} = 0, \qquad t \in (0,T), \qquad j = \overline{1,n_2},\\
&[\psi]|_{x=d_i} = 0, \qquad \left[k\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\bigg|_{x=d_i} = -\rho_i(y(u_n;d_i,t) - f_i), \qquad i = \overline{1,N}, \qquad t \in (0,T),\\
&\psi|_{t=T} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega_d,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $\Omega_d = \Omega \setminus \gamma_d$, $\gamma_d = \bigcup\limits_{i=1}^{N} d_i$, $\Omega_{dT} = \Omega_d \times (0,T)$.

Определение 2. Обобщенным решением начально-краевой задачи (16) называется функция $\psi(x,t) \in W_d(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, w\right) + a(\psi,w) = l_\psi(y_n;w), \qquad t \in (0,T),\\
&\psi|_{t=T} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega_d,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $W_d(0,T) = \{v(x,t) \in L^2(0,T;V_d)\colon \dfrac{dv}{dt} \in L^2(0,T;L_2(\Omega_d))\}$, $V_d = \{v(x,t)\colon v|_{\Omega^i} \in W_2^1(\Omega^i), i = \overline{1,n_3}, [v]|_{x=\overline{\xi}_j} = 0, j = \overline{1,n_2}; [v]|_{x=d_i} = 0, i = \overline{1,N}; v(0,t) = 0, t \in (0,T)\}$, $V_{d_0} = \{v(x)\colon v|_{\Omega^i} \in W_2^1(\Omega^i), i = \overline{1,n_3}; [v]|_{x=\overline{\xi}_j} = 0, j = \overline{1,n_2}; [v]|_{x=d_i} = 0, i = \overline{1,N}; v(0) = 0\}$, области Ω^i — интервалы, образованные на интервале $(0,l)$ точками $x = 0$, $x = \overline{\xi}_j$, $x = d_i$, $j = \overline{1,n_2}$, $i = \overline{1,N}$,

$$
l_\psi(y_n;w) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(y(u_n;d_i,t) - f_i)w(d_i). \tag{18}
$$

На основании (17) с учетом (8)–(10) получаем

$$
\begin{aligned}
\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle &= \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \rho_i(y(u_n;d_i),t) - f_i)(y(u_{n+1};d_i,t) - y(u_n;d_i,t))\,dt =\\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \Delta u_i^k \int_0^T \varphi^k(t,\tau_i) \int_0^l \varphi^k(x,\xi_i)\psi(x)\,dxdt,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $y(u_\nu; d_i, t) = y^k(u_\nu; d_i, t)$, $\nu = n, n+1$. Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}_n, \tag{20}$$

где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^{n_1}$, $\tilde{\psi}_n^i = \int\limits_0^T \varphi^k(t,\tau_i) \int\limits_0^l \varphi^k(x,\xi_i)\psi(x)\,dxdt$, $\|J'_{u_n}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} (\tilde{\psi}_n^i)^2$.

Наличие градиента $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$ (20) позволяет использовать градиентные методы (12) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1}^k решения u^k задачи (8)–(11).

Идентификация мощностей начальных импульсных воздействий. Пусть в задаче (1)–(4) являются неизвестными мощности импульсных воздействий, которые приложены к системе в начальный момент времени $t = 0$. Ради простоты предположим $q_i = 0$, $\omega_i = 0$. Состояние системы описывается начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + f(x), \qquad (x,t) \in \Omega_T,\\
&y(0,t) = \varphi(t), \qquad k\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l} = u_{n_1}\delta(t-0), \qquad t \in (0,T),\\
&[y]|_{x=\xi_i} = 0, \qquad \left[k\frac{\partial y}{\partial x}\right]\bigg|_{x=\xi_i} = -u_i\delta(t-0), \qquad i = \overline{1, n_1-1}, \qquad t \in (0,T),\\
&y|_{t=0} = y_0(x), \qquad \frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1(x), \qquad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{21}$$

В точках d_i, $i = \overline{1, N}$, известны значения решения $y(x,t)$ задачи (21), заданные равенствами (4). Функционал-невязка имеет вид (11). Используя систему функций $\{\varphi^k(z,s)\}$, приближающих δ-функцию в соответствующих точках s, на основе (21) для фиксированного k получаем слабую задачу вида:

$$\begin{aligned}
&\left(\rho\frac{\partial^2 y^k}{\partial t^2}, w\right) + a(y^k, w) = l_k(w), \qquad t \in (0,T),\\
&y^k|_{t=0} = y_0(x), \qquad \frac{\partial y^k}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1(x), \qquad x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{22}$$

где билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ определена выше,

$$l_k(w) = (f, w) + \sum_{i=1}^{n_1-1} u_i\varphi^k(t,0)w(\xi_i) + u_{n_1}\varphi^k(t,0)w(l).$$

Определение 3. Решением задачи (22) называется функция $y^k(x,t) \in W(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_0$ удовлетворяет равенствам (22), где

$$\begin{aligned}
&W(0,T) = \left\{v(x,t) \in L^2(0,T;V)\colon \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;L_2(\Omega))\right\},\\
&V = \{v(x,t)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), i = \overline{0, n_1-1}, [v]|_{x=\xi_i} = 0, i = \overline{1, n-1}; v(0,t) = \varphi(t), t \in (0,T)\},\\
&V_0 = \{v(x)\colon v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i), i = \overline{0, n_1-1}, [v]|_{x=\xi_i} = 0, i = \overline{0, n_1-1}, v(0) = 0\},\\
&\Omega_i = (x_i, x_{i+1}), \qquad x_0 = 0, \qquad x_{n_1} = l.
\end{aligned}$$

В силу [5, 6] решение задачи (22) существует и единственное.

На основании [2] на каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u^k_{n+1} решения $u^k \in U = R^{n_1}$ задачи (22), (11) сопряженная задача имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \qquad (x,t) \in \Omega_{dT},\\
&[\psi]|_{x=\xi_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n_1 - 1}, \qquad t \in (0,T),\\
&\left[k \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]\Big|_{x=\xi_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n_1 - 1}, \qquad t \in (0,T),\\
&[\psi]|_{x=d_i} = 0, \qquad \left[k \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]\Big|_{x=d_i} = -\rho_i(y^k(u^k_n; d_i, t) - f_i), \qquad i = \overline{1, N}, \qquad t \in (0,T),\\
&\psi|_{t=T} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega_d,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\Omega_d = \Omega \backslash \gamma_d$, $\Omega = (0, l)$, $\gamma_d = \bigcup\limits_{i=1}^{n_1-1} \xi_i \bigcup\limits_{j=1}^{N} d_j$, $\Omega_{dT} = \Omega_d \times (0,T)$.

Определение 4. Обобщенным решением начально-краевой задачи (23) называется функция $\psi(x,t) \in W_0(0,T)$, которая $\forall\, w(x) \in V_{d_0}$ удовлетворяет равенствам

$$
\left(\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, w\right) + \int\limits_0^l k \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dx = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(y^k(u^k_n; d_i, t) - f_i(t)) w(d_i), \tag{24}
$$

$$
\psi|_{t=T} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega_d, \tag{25}
$$

где $W_0(0,T) = \{v(x,t) \in L^2(0,T; V^0_d)\colon dv/dt \in L^2(0,T; L_2(\Omega_d))\}$, $V^0_d = \{v(x,t)\colon v|_{\Omega^i} \in W^1_2(\Omega^i), i = \overline{1, n_3}, [v]|_{x=\xi_i} = 0, i = \overline{1, n_1}; [v]|_{x=d_i} = 0, i = \overline{1, N}; v(0,t) = 0, t \in (0,T)\}$, $V_{d_0} = \{v(x)\colon v|_{\Omega^i} \in W^1_2(\Omega^i), i = \overline{1, n_3}; [v]|_{x=\xi_i} = 0, j = \overline{1, n_1}; [v]|_{x=d_i} = 0, i = \overline{1, N}; v(0) = 0\}$.

Выбирая в тождестве (24) вместо функции w разность $y^k(u^k_{n+1}; x, t) - y^k(u^k_n; x, t)$, следуя [2, 5], с учетом (22), (25) имеем

$$
\begin{aligned}
\langle J'_{u^k_n}, \Delta u^k_n \rangle &= \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^T \rho_i(y^k(u^k_n; d_i, t) - f_i(t))(y^k(u^k_{n+1}; d_i, t) - y^k(u^k_n; d_i, t))\, dt =\\
&= \int\limits_0^T \left(\rho \frac{\partial^2 (y^k(u^k_{n+1}) - y^k(u^k_n))}{\partial t^2}, \psi\right) dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l k \frac{\partial (y^k(u^k_{n+1}) - y^k(u^k_n))}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt =\\
&= \sum_{i=1}^{n_1-1} \Delta u^k_{i,n+1} \int\limits_0^T \varphi^k(t,0)\psi(\xi_i, t)\, dt + \Delta u^k_{n_1,n+1} \int\limits_0^l \varphi^k(t,0)\psi(l,t)\, dt.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

На основании (26) получаем $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}^i_n\}_{i=1}^{n_1}$, $\tilde{\psi}^i_n = \int\limits_0^T \varphi^k(t,0)\psi(\xi_i,t)\, dt$, $i = \overline{1, n_1}$, $\xi_{n_1} = l$, $\|J'_{u^k_n}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} (\tilde{\psi}^i_n)^2$.

Наличие градиента J'_{u_n} функционала-невязки $J(u)$ позволяет применять градиентные методы (12) для определения $(n+1)$-го приближения u^k_{n+1} решения $u^k \in U$ задачи (22), (11) — идентификации мощностей импульсных внутренних и краевого начальных воздействий.

Замечание. Если в задаче (1)–(4) проводится идентификация некоторых из параметров ρ, k, f, y_0, y_1, β при известных импульсных воздействиях, то заменяя δ-функцию соответствующими приближениями из последовательностей $\{\varphi^k(z,s)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, придем к задачам идентификации, ранее рассмотренным, например, в [2].

Таким образом, в работе для идентификации мощностей импульсных воздействий в гиперболических системах, а также для идентификации параметров таких систем, находящихся при импульсных воздействиях, на основе использования приближений из класса L_2 δ-функций Дирака получены явные выражения градиентов функционала-невязки. Полученные градиенты функционала-невязки позволяют использовать градиентные методы идентификации различных параметров гиперболических систем, находящихся при импульсных воздействиях.

1. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Решение комплексных обратных задач для гиперболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – № 2. – С. 55–80.
2. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев: Наук. думка, 2009. – 640 с.
3. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Идентификация параметров динамической задачи теории упругости тела с включением // Кибернетика и систем. анализ. – 2009. – № 3. – С. 75–97.
4. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Идентификация параметров динамических задач теории упругости для составной полой сферы // Пробл. управления и информатики. – 2010. – № 4. – С. 5–30.
5. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
6. *Sergienko I. V., Deineka V. S.* Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
7. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
8. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. – Москва: Наука, 2005. – 430 с.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.
10. *Дыхта В. А.* Оптимизация динамических систем с разрывными траекториями и импульсными управлениями // Соросовский образоват. журн. – 1999. – № 8. – С. 110–115.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 07.09.2010

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko,**
Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Deineka**

Parameters identification for hyperbolic systems under impulse and concentrated loads on the basis of weak problems

Explicit expressions of the functional-residuals gradients for the identification of various parameters of hyperbolic systems under impulse and concentrated loads are constructed on the basis of optimal control theory.