ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2011

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.8

Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко

Условия устойчивости по векторному критерию и ограничениям многокритериальных задач целочисленной оптимизации

(Представлено академиком НАН Украины В. С. Дейнекой)

Наведені в роботі дослідження відносяться до теоретичного напряму робіт, спрямованих на вивчення проблеми стійкості векторних задач дискретної оптимізації. Одержано нові результати щодо умов стійкості одного типу для векторних задач оптимізації на скінченній множині цілочислових точок опуклого многогранника відносно збурень вхідних даних як у лінійних часткових критеріях, так і в обмеженнях. Встановлено зв'язок між стійкістю цілочислових задач на відшукання розв'язків, оптимальних за Слейтером, за Парето та за Смейлом.

Современные исследования проблемы устойчивости многокритериальных (векторных) задач дискретной оптимизации осуществляются, в основном, в двух направлениях. Одно из них ориентировано на определение и исследование условий, при которых множеству оптимальных решений (множеству Парето, Слейтера или Смейла) присуще то или иное свойство, характеризующее определенным образом устойчивость задачи к малым возмущениям исходных данных. Другой известный подход направлен на изучение количественных характеристик допустимых возмущений исходных данных векторных задач дискретной оптимизации, в частности, радиуса устойчивости. Данная работа относится к первому из указанных выше направлений (см., например, [1–6]), обычно называемому теоретическим, и посвящена вопросам поиска необходимых и достаточных условий устойчивости определенного типа для векторных линейных задач оптимизации на конечном множестве целочисленных точек выпуклого многогранника.

Рассмотрим векторную задачу дискретной оптимизации следующего вида:

$$Z(M(F,X))\colon\ \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

где $M(F,X)$ — некоторое множество оптимальных решений задачи; $F(x) = Cx$ — векторная целевая функция; $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ — матрица коэффициентов всех частных линейных критериев оптимальности $\langle c_1, x\rangle$, $\langle c_2, x\rangle, \ldots, \langle c_\ell, x\rangle$; ℓ — количество частных критериев, $\ell \geqslant 2$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $c_i = (c_{i1}, \ldots, c_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $\langle c_i, x\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$; $X = G \bigcap Z^n$, $G = G(A, b) =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$ — выпуклый многогранник, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, Z^n — множество всех целочисленных векторов в $\mathbb{R}^n$, $2 \leqslant |X| < \infty$.

Введем в рассмотрение конус перспективных направлений $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geqslant 0\}$ задачи $Z(M(F,X))$, с помощью которого можно осуществлять переход из произвольной точки $y \in \mathbb{R}^n$ в любую точку $z = y + \lambda x$, где x — точка конуса K, $\lambda > 0$, что приводит к неравенству $Cz \geqslant Cy$, т. е. к возможному возрастанию значений всех частных критериев задачи. Воспользуемся также обозначениями: $K^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}$ — линейное подмножество конуса K, $\operatorname{int} K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx > 0\}$ — внутренность конуса K, $K(y) = y + K$, $K^0(y) = y + K^0$, $\operatorname{int} K(y) = y + \operatorname{int} K$, где $y \in \mathbb{R}^n$.

Задача $Z(M(F,X))$ состоит в отыскании элементов некоторого множества $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} = \{\mathrm{Sl}(F,X), P(F,X), \mathrm{Sm}(F,X)\}$, $\mathrm{P}(F,X)$ — множество Парето-оптимальных решений, $\mathrm{Sl}(F,X)$ — множество оптимальных по Слейтеру решений, $\mathrm{Sm}(F,X)$ — множество оптимальных по Смейлу решений. Согласно [7, 8], $\forall\, M(F,X) \in \mathfrak{M}$:

$$M(F,X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(F,X)) = \varnothing\}, \tag{1}$$

где $\omega(x, \mathrm{Sl}(F,X)) = \{z \in X \mid Cz > Cx\} = \operatorname{int} K(x) \bigcap X$, $\omega(x, \mathrm{P}(F,X)) = \{z \in X \mid Cz \geqslant Cx, Cz \neq Cx\} = (K(x) \setminus K^0(x)) \bigcap X$, $\omega(x, \mathrm{Sm}(F,X)) = \{z \in X \mid z \neq x, Cz \geqslant Cx\} = K(x) \bigcap X \setminus \{x\}$. Легко видеть, что $\mathrm{Sm}(F,X) \subset \mathrm{P}(F,X) \subset \mathrm{Sl}(F,X)$ и $\forall\, x \in X$: $\omega(x, \mathrm{Sl}(F,X)) \subset \omega(x, \mathrm{P}(F,X)) \subset \omega(x, \mathrm{Sm}(F,X))$. Отметим, что из конечности допустимой области X вытекает непустота множества Парето $\mathrm{P}(F,X)$ и его внешняя устойчивость [7].

Пусть $u = (u_1, u_2)$ — набор исходных данных задачи $Z(M(F,X))$, являющийся элементом некоторого пространства U исходных данных, которое можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$, где U_1 — пространство исходных данных для описания векторного критерия F задачи; U_2 — пространство исходных данных для описания допустимого множества X. В данном случае полагаем $u_1 = C \in U_1 = \mathbb{R}^{\ell \times n}$ и $u_2 = (A, b) \in U_2 = \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m$.

Для набора исходных данных $u = (u_1, u_2) \in U$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных исходных данных задачи, согласно одной из формул:

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\}, \tag{2}$$

если речь идет о возмущениях всех исходных данных задачи;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) = u_1, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)\}, \tag{3}$$

если речь идет о возмущениях исходных данных только в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \mid u_1(\delta) \in O_\delta(u_1), u_2(\delta) = u_2\}, \tag{4}$$

если речь идет только о возмущениях исходных данных для векторного критерия. Здесь $O_\delta(u_i) = \{u_i(\delta) \in U_i \mid \|u_i(\delta) - u_i\|_i < \delta\}$, $\|\cdot\|_i$ — норма в пространстве U_i, $i = 1, 2$. Символами $F_{u_1(\delta)}$ и $X_{u_2(\delta)}$ будем пользоваться для обозначения, соответственно, векторного критерия и допустимой области задачи при возмущенных исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

Определение. Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, является *устойчивой (устойчивой по ограничениям, устойчивой по векторному критерию,)*, если найдется число $\delta > 0$, такое, что включение $M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset M(F, X)$ выполняется для любого набора исходных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$, где множество $O_\delta(u)$ определяется согласно формуле (2) (соответственно, согласно формуле (3), когда речь идет об устойчивости по ограничениям, и согласно формуле (4), когда речь идет об устойчивости по векторному критерию).

Отметим, что известны пять различных типов T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 устойчивости задач рассматриваемого класса. Здесь изучены вопросы, касающиеся лишь устойчивости типа T_3.

Очевидным является следующее утверждение.

Утверждение 1. *Устойчивая задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, является устойчивой по векторному критерию и устойчивой по ограничениям.*

Напомним, что задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, *называется тривиальной, если для нее выполняется условие* $M(F, X) = X$, и *нетривиальной — в противном случае.*

Утверждение 2. *Тривиальная задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, устойчива.*

Данное утверждение вытекает из следующей леммы.

Обозначим $X_{\text{int}} = X \bigcap \operatorname{int} G$.

Лемма [1]. *Существует число $\delta > 0$, такое, что для любого набора исходных данных $u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)$ справедливо включение $X_{\text{int}} \subset X_{u_2(\delta)} \subset X$.*

Действительно, для тривиальной задачи $Z(M(F, X))$ с учетом данной леммы найдется число $\delta > 0$, такое, что $\forall u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$: $M(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)}) \subset X_{u_2(\delta)} \subset X = M(F, X)$.

Для нетривиальных задач получены следующие результаты.

Утверждение 3. *Задача $Z(\mathrm{Sl}(F, X))$ устойчива по векторному критерию. Задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \neq X$ и $M(F, X) \in \{\mathrm{P}(F, X), \mathrm{Sm}(F, X)\}$, устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $M(F, X) = \mathrm{Sl}(F, X)$.*

Утверждение 4. *Если $X_{\text{int}} = \varnothing$, то равенство $M(F, X) = X$ является необходимым и достаточным условием устойчивости по ограничениям задачи $Z(M(F, X))$ при $M(F, X) \in \{\mathrm{P}(F, X), \mathrm{Sl}(F, X)\}$ и достаточным условием при $M(F, X) = \mathrm{Sm}(F, X)$.*

Утверждение 5. *Если $X_{\text{int}} \neq \varnothing$ и, кроме того, $M(F, X) \neq X$ и $M(F, X) \neq \varnothing$, то выполнение для любой точки $x \in X \setminus M(F, X)$ соотношения*

$$\omega(x, M(F, X_{\text{int}})) \neq \varnothing \tag{5}$$

является необходимым и достаточным условием устойчивости по ограничениям задачи $Z(M(F, X))$ при $M(F, X) \in \{\mathrm{P}(F, X), \mathrm{Sl}(F, X)\}$ и достаточным условием при $M(F, X) = \mathrm{Sm}(F, X)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задача $Z(M(F, X))$, где $M(F, X) \in \{\mathrm{P}(F, X), \mathrm{Sl}(F, X)\}$, устойчива по ограничениям. Предположим (от противного), что $\exists x \in X \backslash M(F, X)$: $\omega(x, M(F, X)) \subset X \backslash X_{\text{int}}$. С учетом приведенной выше леммы нетрудно показать, что $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)$:

$$X_{\text{int}} \bigcup \{x\} \subset X_{u_2(\delta)} \subset X, \qquad \omega(x, M(F, X_{u_2(\delta)})) = \varnothing. \tag{6}$$

На основе формул (6) делаем вывод о принадлежности $x \in M(F, X_{u_2(\delta)}))$, что приводит к противоречию с первоначальным предположением относительно устойчивости по ограничениям задачи $Z(M(F, X))$.

Достаточность. Пусть $M(F, X) \in \mathfrak{M}$. Опираясь на приведенную выше лемму и формулу (1), приходим к выводу: $\exists\, \delta > 0$, такое, что $\forall\, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)$ имеют место включения $X_{\text{int}} \subset X_{u_2(\delta)} \subset X$ и $\omega(y, M(F, X_{\text{int}})) \subset \omega(y, M(F, X_{u_2(\delta)}))$, справедливые $\forall\, y \in X$. Предположив далее, что для любой точки $x \in X \setminus M(F, X)$ выполняется условие (5), заключаем:

$\omega(x, M(F, X_{u_2(\delta)})) \neq \varnothing$ и, следовательно, $x \in X \setminus M(F, X_{u_2(\delta)})$. Таким образом, $\exists \delta > 0$, такое, что $\forall\, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2)$: $X \setminus M(F, X) \subset X \setminus M(F, X_{u_2(\delta)})$ и $M(F, X_{u_2(\delta)}) \subset M(F, X)$. Последнее включение позволяет сделать вывод об устойчивости по ограничениям задачи $Z(M(F, X))$.

Утверждение 6. *Пусть* $\mathrm{Sl}(F, X) \neq X$. *Задача* $Z(\mathrm{Sl}(F, X))$ *устойчива тогда и только тогда, когда она устойчива по ограничениям.*

Утверждение 7. *Пусть* $\mathrm{P}(F, X) \neq X$. *Задача* $Z(P(F, X))$ *устойчива тогда и только тогда, когда, во-первых, она устойчива по векторному критерию и, во-вторых, задача* $Z(\mathrm{Sl}(F, X))$ *устойчива по ограничениям.*

Утверждение 8. *Пусть* $\mathrm{Sm}(F, X) \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{Sm}(F, X) \neq X$. *Если задача* $Z(\mathrm{Sm}(F, X))$ *устойчива по векторному критерию, а задача* $Z(\mathrm{Sl}(F, X))$ *устойчива по ограничениям, то задача* $Z(\mathrm{Sm}(F, X))$ *устойчива.*

Описанные в данной работе результаты исследований устойчивости векторных задач целочисленной оптимизации указывают на существование тесных взаимосвязей между устойчивостью задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру, по Парето и по Смейлу.

1. *Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.
2. *Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системн. анализ. – 2004. – № 1. – С. 63–70.
3. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.* Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальних решений // Там же. – 2005. – № 4. – С. 90–100.
4. *Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования // Там же. – 2006. – № 5. – С. 63–72.
5. *Сергиенко Т. И.* Устойчивость по векторному критерию и ограничениям целочисленных задач поиска решений, оптимальных по Слейтеру и Смейлу // Компьютерная математика. – 2008. – № 1. – С. 145–151.
6. *Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход // Кибернетика и системн. анализ. – 2008. – № 3. – С. 142–148.
7. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
8. *Smale S.* Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. – 1974. – No 1. – P. 213–221.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.07.2010

T. T. Lebedeva, T. I. Sergienko

Stability conditions of multicriterial integer optimization problems by the vector criterion and constraints

The paper presents the results of theoretical investigations of the stability of vector discrete optimization problems. New conditions of one type of stability for vector integer optimization problems on a finite set of integer points in a convex polyhedron with respect to perturbations of initial data by linear partial criteria and linear constraints are obtained. The relationship between stabilities of integer problems of finding the optimal solutions from the Slater, Pareto, and Smale sets is established.