ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.928,519.713

О. С. Бичков

Про достатні умови стійкості гібридних автоматів з нечітким перемиканням

(Представлено академіком НАН України А. А. Мартинюком)

На базі теорії можливостей введено поняття узагальненого нечіткого гібридного автомата з нечітким перемиканням (УНГАНП). Введено поняття стійкості стаціонарних станів УНГАНП із заданим рівнем і встановлено достатні умови такої стійкості шляхом узагальнення методу функцій Ляпунова.

У роботі досліджується стійкість формалізму моделювання невизначеної динаміки, що базується на теорії можливостей та гібридних автоматах [1–6]. Застосування гібридних автоматів дає змогу моделювати складну динаміку за допомогою певної кількості простих систем. Використання для моделювання нечіткого аналога стохастичного рівняння Іто вирішує проблему відсутності статистичних даних та дає можливість досліджувати саме нечітку траєкторію, а не ставлення до неї експертів. Для отримання достатніх умов стійкості пропонується використовувати мультикомпонентні функції Ляпунова [7–9].

Нехай $PS = (X, 2^X, P)$ — простір можливостей з нормованою мірою можливості, $Y = (Y, \rho)$ — метричний простір з метрикою ρ.

Введемо позначення: $\mathbf{R}$ — множина дійсних чисел; $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ — множина невід'ємних дійсних чисел; $\mathrm{S}(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y \mid \rho(y_0, y) = \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$ — сфера в просторі Y; $\mathrm{B}(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y \mid \rho(y_0, \varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$ — замкнена куля в просторі Y; $\mathrm{B}^0(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y \mid \rho(y_0, \varepsilon) < \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$ — відкрита куля в просторі Y; $X_+ = \{x \in X \mid P\{x\} > 0\}$ — множина елементарних подій ненульової можливості; $X_\varepsilon = \{x \in X \mid P\{x\} \geqslant \varepsilon\}$ — множина елементарних подій можливості більше ε; $TS = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbf{R}, a \leqslant b\} \bigcup \{[a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}, a < b\} \bigcup \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbf{R}, a < b\}$ — множина замкнених або напівзамкнених (зліва) проміжків у $\mathbf{R}$.

Для кожної непорожньої скінченної множини A (алфавіту) позначатимемо A^* — множину всіх слів у алфавіті A (скінченних послідовностей елементів A, у тому числі порожньої), A^+ — множину всіх непорожніх слів у алфавіті).

Якщо p_1, p_2 — слова в алфавіті A, позначатимемо $p_1 p_2$ — конкатенацію p_1 і p_2. Для кожної формальної мови L в алфавіті A (тобто підмножини A^*) позначатимемо L^* — замикання Кліні мови L (тобто множина конкатенацій скінченних множин слів з L), L^+ — множину конкатенацій непорожніх скінченних множин слів з L.

Введемо ще кілька допоміжних позначень: $|p|$ — довжина слова p; $p_1 \lhd p_2$ — p_1 є (можливо, порожнім) підсловом p_2; $\mathrm{beg}(p)$ — перша літера слова p, якщо слово p непорожнє; $\mathrm{end}(p)$ — остання літера p, якщо слово p непорожнє; $\mathrm{beg}(L) = \{\mathrm{beg}(p) \mid p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$; $\mathrm{end}(L) = \{\mathrm{end}(p) \mid p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$; $\mathrm{pref}(p)$ — множина (непорожніх) префіксів слова p; $SwL(L) = \{p \mid \exists\, u \in L\colon p \lhd u\}$ — множина підслів усіх слів множини $L \subseteq A^+$; $SwL_k(L) = \{p \mid |p| = k \wedge \exists\, u \in L\colon p \lhd u\}$ — множина підслів довжини k усіх слів $L \subseteq A^+$; $PCl(L) = \bigcup\limits_{p \in L} \mathrm{pref}(p$ — префіксне замикання множини $L \subseteq A^+$ (без порожнього слова); $PrL(L) = \{L_1 \in 2^L \setminus \{\varnothing\} \mid L_1 = PCl(L)\}$ — множина непорожніх префіксно-замкнених підмножин множини $L \subseteq A^*$.

Для кожної гібридної траєкторії часу $\tau = (I_i)_{i=0}^N$ введемо позначення $N(\tau) = N$, $U(\tau) = \bigcup\limits_{i=0}^{N} I_i$.

Означення 1. Узагальненим нечітким гібридним автоматом із нечітким перемиканням (УНГАНП) називається кортеж

$$HA = (Q, Y, PS, \mathrm{Inv}, \mathrm{Jump}, \mathrm{Orb}),$$

в якому Q — скінченна множина дискретних станів; $Y = (Y, \rho)$ — метричний простір неперервних станів з метрикою ρ; $PS = (X, 2^X, P)$ — простір можливостей з нормованою мірою можливості; $\mathrm{Inv}\colon Q \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ — відображення, що задає область незмінності дискретних станів; $\mathrm{Jump}\colon Q \times Y \times X \to 2^{Q \times Y}$ — відображення, що задає умову переходу; Orb — множина фазових орбіт, тобто кортежів $\chi = (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x)$, в яких $x \in X_+$, $\tau = (I_i)_{i=0}^N$ — гібридна траєкторія часу, $\overline{q}\colon \langle\tau\rangle \to Q$ — відображення таке, що на інтервалі часу I_i автомат знаходиться в дискретному стані $q(i)$ для кожного $i \in \langle\tau\rangle$, $\overline{y} = (y^i)_{i \in \langle\tau\rangle}$ — індексована сім'я неперервних відображень $y^i\colon I_i \to Y$.

Для відображень y^i виконуються умови:

а) $y^i(t) \in \mathrm{Inv}(\overline{q}(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_i')$, якщо $i \in \langle\tau\rangle$ і, крім того, $y^i(\tau_i') \in \mathrm{Inv}(\overline{q}(i))$, якщо $i = N(\tau)$ і $\tau_i' \in U(\tau)$;

б) $(\overline{q}(i+1), y^{i+1}(\tau_{i+1})) \in \mathrm{Jump}(\overline{q}(i), y^i(\tau_i'), x)$ для всіх $i \in \langle\tau\rangle \setminus \{N(\tau)\}$.

Означення 2. Слово $w \in Q^+$ називається частковою дискретною фазовою орбітою автомата HA, якщо існує фазова орбіта $(\tau, \overline{q}, \overline{y}, x)$ автомата HA і невід'ємне ціле число $k \leqslant \langle\tau\rangle$ такі, що $w = \overline{q}(0)\overline{q}(1)\ldots\overline{q}(k)$.

Позначимо $PDPO(HA)$ — множину часткових дискретних фазових орбіт автомата HA, тобто

$$PDPO(HA) = \{\overline{q}(0)\overline{q}(1)\ldots\overline{q}(k) \mid \exists\, \tau, \overline{q}, \overline{y}, x\colon (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x) \in \mathrm{Orb} \wedge k \leqslant \langle\tau\rangle\}.$$

Означення 3. Стаціонарним станом УНГАНП $HA = (Q, Y, PS, \mathrm{Inv}, \mathrm{Jump}, \mathrm{Orb})$ називається точка $y_* \in Y$ така, що:

1) $\mathrm{Jump}(q, y_*, x) \subseteq Q \times \{y_*\}$ для всіх $q \in Q$ і $x \in X_+$;

2) для кожного $\chi = (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x) \in \mathrm{Orb}$ такого, що $y^0(\tau_0) = y_*$, усі відображення y^i, $i \in \langle\tau\rangle$, є константними і набувають значень y_*.

Позначимо $St(HA)$ — множину всіх стаціонарних станів HA.

Означення 4. Стаціонарний стан $y_* \in St(HA)$ називається стійким з рівнем $\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}\colon (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, що визначена в околі нуля, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ (залежне від ε) таке, що для кожної фазової орбіти $\chi = (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x) \in \mathrm{Orb}$, де $\overline{y} = (y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ і $\tau = (I_i)_{i\in\langle\tau\rangle}$, такої, що $y^0(\tau_0) \in \mathrm{B}(y_*, \delta)$ і $P\{x\} > \overline{\alpha}(\varepsilon)$, виконується умова $y^i(t) \in \mathrm{B}(y_*, \varepsilon)$ для всіх $i \in \langle\tau\rangle$ і $t \in I_i$.

Для дослідження стійкості УНГАНП будемо використовувати узагальнення методу функцій Ляпунова.

Розглянемо деякий УНГАНП $HA = (Q, Y, PS, \mathrm{Inv}, \mathrm{Jump}, \mathrm{Orb})$ і стаціонарний стан $y_* \in \in St(HA)$ (у припущенні, що $St(HA) \neq \varnothing$).

Для кожної частково визначеної функції $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ позначимо $\mathrm{Infinv}(f)$ — це частково визначена функція $g\colon R \to R$, що задана умовами:

а) $g(y) = \inf\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant y\}$, якщо $y \in \mathbf{R}$ і множина $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \leqslant y\}$ непорожня і обмежена згори;

б) $g(y)$ не визначено в іншому випадку.

Визначимо $HL(HA, y_*)$ як множину кортежів $(\overline{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q})$, в яких:

а) $\overline{\alpha}\colon (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля;

б) $(V_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я неперервних частково визначених функцій з Y в $\mathbf{R}_+$;

в) $(\nu_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я частково визначених функцій $v_q\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ і виконуються умови, в яких $\psi = \mathrm{Infinv}(\overline{\alpha})$:

L1) $\{y_*\} \bigcup \mathrm{Inv}(q) \subseteq \mathrm{Dom}\, V_q$ для всіх $q \in Q$, і якщо $(q_2, y_2) \in \mathrm{Jump}(q_1, y_1, x)$ для деяких q_1, $q_2 \in Q$, y_1, $y_2 \in Y$ і $x \in X_+$, то $y_1 \in \mathrm{Dom}\, V_{q_1}$ і $y_2 \in \mathrm{Dom}\, V_{q_2}$;

L2) існує число $\upsilon > 0$ таке, що $[0,\upsilon) \bigcup \mathrm{Range}\, \psi \subseteq \mathrm{Dom}\, v_q$, $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ при $w \in \mathrm{Dom}\, v_q \setminus \{0\}$;

L3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

L4) якщо $V_q(y) \leqslant \nu_q(w)$ для деяких $y \in \mathrm{Dom}\, V_q$ і $w \in \mathrm{Dom}\, v_q$, то $\rho(y_*, y) \leqslant w$;

L5) якщо $q \in Q$, $x \in X_+$, $P\{x\} \in \mathrm{Dom}\, \psi$, $\chi = (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x) \in \mathrm{Orb}$, $i \in \langle\tau\rangle$, $\overline{q}(i) = q$ і для деякого (скінченного) інтервалу $(t_1, t_2) \subset [\tau_i, \tau_i')$ виконується нерівність $V_q(y^i(t)) > > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ при $t \in (t_1, t_2)$, то функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ не зростає на інтервалі (t_1, t_2).

Зауважимо, що функція Ляпунова $t \mapsto V_q(y^i(t))$ визначена на інтервалі (τ_i, τ_i'), оскільки $y^i(t) \in \mathrm{Inv}(\overline{q}(i))$ при $t \in (\tau_i, \tau_i')$. Функція ν_q задає поверхню рівня функції V_q, яка міститься в кулі заданого радіуса (з центром у точці y_*).

Встановимо, які додаткові умови потрібні, крім існування кортежу

$$(\overline{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HL(HA, y_*),$$

для того, щоб можна було зробити висновок про стійкість стаціонарного стану УНГАНП.

Гібридний автомат можна зобразити орієнтованим графом. Для отримання умов стійкості введемо розмітку вузлів і дуг орієнтованого графа (Q, E), яка характеризуватиме зв'язок локальних функцій Ляпунова для різних локальних станів і із властивостей якої можна буде зробити висновок про стійкість стаціонарного стану.

Абстрактна розширена s'-структура. Нехай $(S, \cdot)$ — півгрупа, $\leqslant_S$ — передпорядок на множині S такий, що:

S1) $f \cdot h \leqslant_S g \cdot h$ для всіх f, g, $h \in S$ таких, що $f \leqslant_S g$;

S2) $h \cdot f \leqslant_S h \cdot g$ для всіх f, g, $h \in S$ таких, що $f \leqslant_S g$ і $h \cdot f \leqslant_S f$.

Нехай $(\Theta, \leqslant_\Theta)$ — *спрямована вниз передвпорядкована множина*, тобто множина Θ разом з передпорядком $\leqslant_\Theta$ таким, що довільна пара елементів Θ має нижню межу.

Нехай $\bullet\colon \Theta \times S \to S$ — відображення (бінарна операція) таке, що:

T1) для кожного $f \in S$ існує елемент $\theta \in \Theta$ такий, що $\theta \bullet f \leqslant_S f$;

T2) $\theta_1 \bullet f \leqslant_S \theta_2 \bullet g$ для всіх θ_1, $\theta_2 \in \Theta$ і f, $g \in S$ таких, що $f \leqslant_S g$ і $\theta_1 \leqslant_\Theta \theta_2$;

T3) для кожної пари $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ існує $\theta_3 \in \Theta$ такий, що $\theta_3 \bullet f \leqslant_S \theta_1 \bullet (\theta_2 \bullet f)$ для всіх $f \in S$;

T4) $\theta \bullet (f \cdot g) \leqslant_S (\theta \bullet f) \cdot g$ для всіх f, $g \in S$ і $\theta \in \Theta$.

Означення 5. Визначимо бінарне відношення $\prec_S$, яке будемо також позначати як $\mathrm{wpo}(\leqslant_S, \bullet)$, на S таким чином: $f \prec_S g$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $\theta \in \Theta$ такий, що $\theta \bullet f \leqslant_S g$, де f, $g \in S$.

Позначення $\mathrm{wpo}(\leqslant_S, \bullet)$ (від англ. *weak preorder*) будемо вживати, щоб явно вказати, що відношення $\prec_S$ є похідним від $\leqslant_S$ і $\bullet$.

Лема 1. *Виконуються такі властивості:*

1) відношення $\prec_S$ є передпорядком;

2) $\leqslant_S \subseteq \prec_S$, тобто якщо f, $g \in S$ і $f \leqslant_S g$, то $f \prec_S g$.

Нехай Q — непорожня скінченна множина (алфавіт). Нехай $W \subseteq Q^+$ — непорожня множина така, що для всіх a, $b \in Q^*$ і $q \in Q$, $aqb \in W$ тоді і тільки тоді, коли $aq \in W$ і $qb \in W$. Зауважимо, що якщо $a \in W$ і $b \in Q^+$ — підслово a, то $b \in W$.

Нехай $\lambda\colon W \to S$ — відображення, яке задовольняє властивість $\lambda(axb) = \lambda(ax) \cdot \lambda(xb)$ для всіх a, $b \in Q^*$ і $x \in Q$ таких, що $axb \in W$.

Означення 6. При наведених вище припущеннях кортеж $((S, \cdot, \leqslant_S, \Theta, \leqslant_\Theta, \bullet, \prec_S), W, \lambda)$ назвемо розширеною s'-структурою.

Розглянемо, у чому полягає зміст розширеної s'-структури. Припустимо, що задана деяка динамічна система, стан якої в кожен момент неперервного часу є прихованим від спостерігача, але може бути охарактеризований спостерігачем за допомогою одного з елементів множини Q (поточне спостереження), а функціонування впродовж проміжку часу може бути охарактеризовано елементом множини W (результат тривалого спостереження). Припустимо, що спостерігач хоче визначити, чи істотно змінився стан системи за час спостереження. Вважатимемо, що функція λ знаходить оцінку відхилення стану системи від початкового стану у вигляді елемента множини S за результатом тривалого спостереження. При цьому операція $\cdot$ комбінує оцінки, отримані на сусідніх часових інтервалах.

Відношення $\leqslant_S$ можна вважати природним впорядкуванням елементів множини S (оцінок відхилення), але воно не придатне для спостерігача, оскільки йому необхідно виявити саме істотні відхилення. Для визначення істотних відхилень використовується відношення $\prec_S$ (яке означає "не набагато більше"). Для його визначення присутня операція $\bullet$ (і множина Θ), призначена для неістотного зменшення (за відношенням $\leqslant_S$) свого другого аргументу. При цьому перший аргумент операції $\bullet$, який належить множині Θ, визначає ступінь зменшення другого аргументу. Властивості S1, S2 і T1-T4 задають природні зв'язки між наведеними відношеннями і операціями.

Стабільність розширених s'-структур. Зафіксуємо деяку розширену s'-структуру $SE = ((S, \cdot, \leqslant_S, \Theta, \leqslant_\Theta, \bullet, \prec_S), W, \lambda)$.

Нехай P — деяка множина, $f\colon P \to S_D$ і $g\colon P \to S_D$ — відображення. Будемо казати, що *відношення $f(p) \prec_{SD} g(p)$ виконується рівномірно при $p \in P$* (або *на множині елементів $p \in P$*), де p — ім'я замінної-параметра, якщо існує елемент $\theta \in \Theta$ такий, що $\theta \bullet f(p) \leqslant_{SD} g(p)$ для всіх $p \in P$. Аналогічну фразу використовуватимемо для n-арних відображень φ і ψ.

Означення 7. Множину (формальну мову) $W_* \in PrL(W)$ назвемо стабільною (відносно SE), якщо відношення $\lambda(p) \prec_S \lambda(\mathrm{end}(p))$ виконується рівномірно при $p \in W_*$.

Змістовно ця властивість означає, що якщо елементи множини W, якими можуть характеризуватися тривалі спостереження системи, належать множині W_*, то для виявлення істотності відхилення стану системи від початкового достатньо знати поточне спостереження системи.

Означення 8. Розширену s'-структуру SE назвемо стабільною, якщо множина W є стабільною (відносно SE).

Наведена нижче теорема дає достатні умови, при яких задана множина є стабільною.

Нехай $W_* \in PrL(W)$, A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — скінченні підмножини Q^* такі, що $W_* \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i B_i^* C_i$.

Позначимо $W_0 = W \bigcap \bigcup\limits_{i=1}^{m} (A_i \operatorname{beg}(B_i) \bigcup A_i C_i \bigcup A_i B_i C_i)$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\lambda(p) \prec_S \lambda(\operatorname{end}(p))$ *для кожного* $p \in W_0$*;*

2) $\lambda(p.\operatorname{beg}(p)) \leqslant_S \lambda(\operatorname{beg}(p))$ *для кожного* $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ *такого, що* $p.\operatorname{beg}(p) \in W$.

Тоді множина W_* *стабільна.*

Наслідок 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\lambda(q_1 q_2) \prec_S \lambda(q_2)$ *для кожної пари* q_1, $q_2 \in Q$ *такої, що* $q_1 q_2$ *є підсловом деякого слова з множини* W_0*;*

2) $\lambda(p.\operatorname{beg}(p)) \leqslant_S \lambda(\operatorname{beg}(p))$ *для кожного* $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ *такого, що* $p.\operatorname{beg}(p) \in W$.

Тоді множина W_* *стабільна.*

Асоційована розширена s'-структура. Зафіксуємо деякий кортеж $HL = (\overline{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(HA, y_*)$ (припускаючи, що він існує) і число $v_{\max} > 0$. Пов'яжемо з HA і HL розширену s'-структуру, яку застосуємо для дослідження стійкості стаціонарних станів УНГАНП.

Покладемо $\psi = \operatorname{Infinv}(\overline{\alpha})$, $D = (0, 1] \bigcap \operatorname{Dom} \psi$, $R_e = \{\perp\} \bigcup R^+ \bigcup \{+\infty\}$, де $\perp = -\infty$, — підмножина розширеної дійсної прямої $[-\infty, +\infty]$ (значення $-\infty$, як елемента множини R_e, ми позначаємо символом $\perp$ у зв'язку з тим, що він буде використовуватися для позначення невизначеності).

Введемо на R_e відношення лінійного порядку $\leqslant_e$, яке є звуженням на множину $R_e \times R_e$ звичайного відношення порядку на розширеній дійсній прямій. Операції взяття мінімуму і максимуму підмножини R_e у сенсі порядку $\leqslant_e$ позначатимемо $\min\limits_e$ і $\max\limits_e$.

Зафіксуємо деяку множину D і число $v_{\max} > 0$.

Покладемо S_D — множина відображень $f\colon D \times R_e \to R_e$ таких, що:

а) $f(u, \perp) = \perp$ для всіх $u \in D$;

б) f не спадає за другим аргументом, тобто $f(u, v_1) \leqslant_e f(u, v_2)$, якщо $u \in D$, v_1, $v_2 \in R_e$ і $v_1 \leqslant_e v_2$.

Введемо бінарну операцію $\cdot$ на S, визначену таким чином: якщо f, $g \in S_D$, то $f \cdot g = h$, де $h(u, v) = g(u, f(u, v))$ для всіх $(u, v) \in D \times R_e$.

Легко перевірити, що якщо f, $g \in S_D$, то $f \cdot g \in S_D$. З цього випливає коректність наведеного визначення. Операція $\cdot$ асоціативна, тому пара $(S_D, \cdot)$ є півгрупою.

Введемо на множині S_D відношення передпорядку $\leqslant_{SD}$ таким чином: $f \leqslant_{SD} g$ тоді і тільки тоді, коли $f(u, v) \leqslant_e g(u, v)$ всіх $(u, v) \in D \times [0, v_{\max}]$.

Лема 2. *Для операції* $\cdot$ *і передпорядку* $\leqslant_{SD}$ *виконуються властивості S1 і S2.*

Позначимо через Θ множину неспадних відображень $\theta\colon R_e \to R_e$ таких, що $\theta(t) \leqslant_e t$ для всіх $t \in R_e$ і $\theta(t) >_e 0$ для всіх $t >_e 0$. Зауважимо, що $\theta(\perp) = \perp$ для кожного $\theta \in \Theta$.

Введемо на Θ відношення часткового порядку $\leqslant_\Theta$, визначене таким чином: $\theta_1 \leqslant_\Theta \theta_2$ тоді і тільки тоді, коли $\theta_1(t) \leqslant_e \theta_2(t)$ для всіх $t \in R_e$ (де θ_1, $\theta_2 \in \Theta$).

Лема 3. *Пара* $(\Theta, \leqslant_\Theta)$ *є решіткою.*

Визначимо операцію $\bullet \colon \Theta \times S_D \to S_D$ рівністю $(\theta \bullet f)(u, v) = f(u, \theta(v))$ для всіх $\theta \in \Theta$, $f \in S_D$ і $(u, v) \in D \times R_e$.

Зважаючи на монотонність функції θ і властивості $\theta(\perp) = \perp$, легко бачити, що функція $\theta \bullet f$ дійсно належить множині S_D (якщо $f \in S_D$).

Покладемо $\prec_{SD} = \mathrm{wpo}(\leqslant_{SD}, \bullet)$.

Лема 4. *Для операцій* $\cdot$, $\bullet$ *і передпорядку* $\leqslant_{SD}$ *виконуються властивості T1–T4.*

Введемо ще допоміжні позначення: $J(q_1, q_2, u) = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \exists\, x \in X_u \colon (q_2, y_2) \in \in \mathrm{Jump}(q_1, y_1, x)\}$, де q_1, $q_2 \in Q$, $u \in (0, 1]$; $E = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q \mid \exists\, x \in X_+ \ \exists\, (y_1, y_2) \in Y \times \times Y \colon (q_2, y_2) \in \mathrm{Jump}(q_1, y_1, x)\}$. Покладемо $Gr(HA) = (Q, E)$ — орієнтований граф, який лежить в основі HA. Задамо розмітку вузлів і дуг $Gr(HA)$ за допомогою відображення $\bar{c} \colon Q \bigcup E \to (D \times R_e \to R_e)$, визначеного таким чином:

1) для всіх $q \in Q$ і $(u, v) \in D \times R_e$ виконується:

а) $\bar{c}(q)(u, v) = \max\limits_e\{\nu_q(\psi(u)), v\}$, якщо $v \neq \perp$,

б) $\bar{c}(q)(u, v) = \perp$, якщо $v = \perp$;

2) для всіх $(q_1, q_2) \in E$ і $(u, v) \in D \times R_e$ виконується:

а) $\bar{c}(q_1, q_2)(u, v) = \sup s((q_1, q_2), u, v)$, якщо $s((q_1, q_2), u, v) \neq \varnothing$,

б) $\bar{c}(q_1, q_2)(u, v) = \perp$, якщо $s((q_1, q_2), u, v) = \varnothing$,

де $s \colon E \times D \times R_e \to 2^{\mathbf{R}_+}$ — відображення, що визначене рівністю

$$s((q_1, q_2), u, v) = \{V_{q_2}(y_2) \mid (y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u) \wedge V_{q_1}(y_1) \leqslant_e v\},$$

для кожної дуги $(q_1, q_2) \in E$ і пари $(u, v) \in D \times R_e$ (зауважимо, що за властивістю L1, якщо $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ для деяких $(q_1, q_2) \in E$ і $u \in (0, 1]$, то $y_1 \in \mathrm{Dom}\, V_{q_1}$ і $y_2 \in \mathrm{Dom}\, V_{q_2}$).

Лема 5. *Мають місце властивості:*

1) $\overline{c}(e) \in S_D$ *для всіх* $e \in Q \bigcup E$*;*

2) $\overline{c}(q) \cdot \overline{c}(q) = \overline{c}(q)$ *для всіх* $q \in Q$.

Покладемо W — множина слів у алфавіті Q, які зображають маршрути в орієнтованому графі G як послідовностей вузлів:

$$W = Q \bigcup \{p \in Q^+ \setminus Q \mid p = q_1 q_2 \cdots q_n \wedge q_i \in Q \wedge \forall\, i \in \overline{2, n} (q_{i-1}, q_i) \in E\}.$$

Очевидно, що якщо $a, b \in Q^*$ і $q \in Q$, то $aqb \in W$ тоді і тільки тоді, коли $aq \in W$ і $qb \in W$.

Нехай $\hat{c} \colon Q \bigcup E \to S$ — відображення, яке задає деяку розмітку вузлів і дуг орієнтованого графа G елементами множини S. Визначимо відображення $\lambda \colon W \to S$ індуктивно за довжиною аргументу:

1) $\lambda(p) = \hat{c}(p)$, якщо $|p| = 1$;

2) $\lambda(pq) = \lambda(p) \cdot \hat{c}(\mathrm{end}(p), q) \cdot \hat{c}(q)$, якщо $|p| = k \geqslant 1$, $q \in Q$ і $pq \in W$.

Тобто якщо $p = q_1 q_2 \cdots q_n \in W$, $n \geqslant 1$ і $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$, то

$$\lambda(q_1 q_2 \ldots q_{n-1} q_n) = \widehat{c}(q_1) \cdot \widehat{c}(q_1, q_2) \cdot \widehat{c}(q_2) \cdot \widehat{c}(q_2, q_3) \cdot \cdots \cdot \widehat{c}(q_{n-1}, q_n) \cdot \widehat{c}(q_n).$$

Теорема 2. *Побудований вище кортеж* $aes' = ((S, \cdot, \leqslant_S, \Theta, \leqslant_\Theta, \bullet, \prec_S), W, \lambda)$ *є розширеною* s'*-структурою.*

На підставі наведеної теореми кортеж aes' будемо називати розширеною s'-структурою, асоційованою з HA і HL, і позначати як $aes'(HA, HL, v_{\max})$. Позначимо $aes'(HA, HL) = = \{aes'(HA, HL, v_{\max}) \mid v_{\max} \in (0, +\infty)\}$ — множину розширених s'-структур, асоційованих з HA і HL (для різних значень параметра $v_{\max}$).

Стійкість стаціонарних станів УНГАНП. Розглянемо достатні умови стійкості стаціонарних станів УНГАПН із заданим рівнем α.

Лема 6. *Нехай* $\chi = (\tau, \overline{q}, \overline{y}, x) \in \mathrm{Orb}$ — *фазова орбіта автомата* HA, *де* $\overline{y} = (y^i)_{i \in \langle\tau\rangle}$ *і* $\tau = (I_i)_{i \in \langle\tau\rangle}$. *Тоді*

$$V_{\overline{q}(i)}(y^i(t)) \leqslant_e \lambda(p_i)(P\{x\}, V_{\overline{q}(0)}(y^0(\tau_0))),$$

де $p_i = \overline{q}(0)\overline{q}(1)\ldots\overline{q}(i)$, *для всіх* $i \in \langle\tau\rangle$ *і* $t \in I_i$.

Доведення цієї леми проводиться індукцією за i.

Наведені нижче теореми дають достатні умови стійкості стаціонарних станів УНГАНП.

Теорема 3. *Припустимо, що для автомата* HA *і стаціонарного стану* y_* *існує кортеж* $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(HA, y_*)$ *і префіксно-замкнена формальна мова* $W_* \subseteq \subseteq Q^+$, *стабільна відносно деякої розширеної* s'*-структури* $SE \in aes'(HA, HL)$, *така, що* $PDPO(HA) \subseteq W_*$. *Тоді стаціонарний стан* y_* *стійкий з рівнем* $\bar{\alpha}$.

Теорема 4 (про стійкість стаціонарних станів УНГАНП). *Припустимо, що для автомата* HA *і стаціонарного стану* y_* *існує кортеж* $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(HA, y_*)$. *Нехай* $\psi = \mathrm{Infinv}(\bar{\alpha})$.

Нехай $v_{\max} > 0$ — *деяке число і* $((S_D, \cdot, \leqslant_{SD}, \Theta_D, \leqslant_\Theta, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(HA, HL, v_{\max})$, $W_* \in PrL(W)$ — *множина така, що* $PDPO(HA) \subseteq W_*$.

Нехай A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — *скінченні підмножини* Q^* *такі, що* $W_* \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i B_i^* C_i$.

Нехай $E_0 = SwL_2\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}(A_i C_i \bigcup A_i B_i C_i)\right)$.

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$ *таких, що* $q_1 q_2 \in E_0$ *існує число* $\delta_{q_1 q_2} > 0$ *і відображення* $\vartheta_{q_1 q_2} \colon [0, \delta_{q_1 q_2}] \to \mathbf{R}_+$ *таке, що* $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = \vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$ *і для всіх елементів* $u \in D$ *і пар* $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ *виконуються нерівності:*

а) $V_{q_2}(y_2) \leqslant v_{q_2}(\psi(u))$, *якщо* $V_{q_1}(y_1) \leqslant v_{q_1}(\psi(u))$;

б) $V_{q_2}(y_2) \leqslant \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$, *якщо* $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}]$ *і* $V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u))$;

2) $\lambda(p.\mathrm{beg}(p)) \leqslant_{SD} \lambda(\mathrm{beg}(p))$ *для всіх* $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ *таких, що* $p.\mathrm{beg}(p) \in W$;

Тоді стаціонарний стан y_* *стійкий з рівнем* $\bar{\alpha}$.

Таким чином, досліджено стійкість нечітких гібридних автоматів. Введено поняття узагальненого нечіткого гібридного автомата. Такі автомати описують нечітку динаміку в сенсі теорії можливостей. Для отримання умов стійкості введено поняття розширеної структури, яка дає змогу відстежити істотне відхилення поточного стану системи від початкового. За допомогою розширених структур доведено теореми про стійкість стаціонарного стану гібридного автомата.

Роботу виконано за підтримки ДФФД, проект № Ф28.1/033.

1. *Cooman G.* Possibility theory. P. I: Measure- and integral-theoretic groundwork // Int. J. General Syst. – 1997. – **25**. – P. 291–371.
2. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – Москва: Радио и связь, 1999. – 287 с.
3. *Бичков О. С.* Про теорію можливостей та її застосування // Доп. НАН України. – 2007. – № 5. – С. 7–12.
4. *Bychkov A. S.* Modelling and studying fuzzy dynamical systems // J. Math. Sci. – 2009. – **3**. – P. 466–479.

5. *Белов Ю. А., Бичков О. С., Меркурьев М. Г.* Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 14–19.
6. *Бичков О. С.* Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз. і мат. – 2005. – № 4. – С. 19–24.
7. *Мартынюк А. А., Слынько В. И.* Об условиях ограниченности движений механических систем, описываемых нечеткими дифференциальными уравнениями // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 93–99.
8. *Martynyuk A. A.* Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 322 p.
9. *Бычков А. С., Меркурьев М. Г.* Устойчивость непрерывных гибридных автоматов // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 2. – С. 123–128.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 08.07.2010

A. S. Bychkov

On the sufficient conditions of stability of hybrid automata with fuzzy switching

On the basis of possibility theory, a notion of general fuzzy hybrid automaton with fuzzy switching (GFHAFS) is introduced. A notion of stability of equilibrium points of GFHAFS is introduced, and the sufficient conditions for such stability are obtained as a result of the generalization of Lyapunov's second method.