

Академік НАН України Я. М. Григоренко, Л. С. Рожок

Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром

Досліджується напружений стан еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром симетричної та несиметричної будови на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Наводиться розподіл полів переміщень та напружень.

У роботі [1] наведено розв'язання задачі і виконано дослідження напруженого стану неоднорідних по товщині еліптичних циліндрів з ізотропними шарами залежно від степеня їх еліптичності та жорсткості середнього шару. В роботі [2] розглянуто задачу про напружений стан еліптичних порожнистих неоднорідних тришаруватих циліндрів з ізотропними шарами та ортотропним середнім шаром симетричної будови при дії рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні. Нижче проводиться дослідження напруженого стану тришаруватих порожнистих еліптичних циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром, що знаходяться під дією рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні при певних граничних умовах на торцях, симетричної та несиметричної будови.

Даний клас задач розглянуто в просторовій постановці. За вихідні приймаються основні рівняння теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла [3]. Сформулювавши відповідні граничні умови на обмежуючих поверхнях, одержимо тривимірну крайову задачу [4], для розв'язування якої застосовується метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [5].

На торцях циліндра розглядаються умови типу простого опирання

$$\sigma_s = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = l. \quad (1)$$

Оскільки беруться до уваги шаруваті циліндри, то мають місце умови спряження шарів

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}; & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}; & \tau_{\theta\gamma}^i &= \tau_{\theta\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}; & u_s^i &= u_s^{i+1}; & u_\theta^i &= u_\theta^{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, T-1). \end{aligned} \quad (2)$$

На бічних поверхнях граничні умови мають вигляд

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \quad (3)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2. \quad (4)$$

За розв'язувальні функції приймаються компоненти напруження і переміщення, в яких формулюються умови спряження шарів і граничні умови на бічних поверхнях σ_γ , $\tau_{s\gamma}$, $\tau_{\theta\gamma}$, u_γ , u_s , u_θ [1]. Граничні умови на торцях циліндра дозволяють відокремити змінні в напрямку твірної шляхом подання розв'язувальних функцій та компонент навантаження у вигляді

розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної. Для відокремлення змінних у напрямку напрямної циліндра в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів Фур'є вздовж твірної замінюються доповнювальними функціями добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, що перешкоджають даному відокремленню. Отримана таким чином розв'язувальна система рівнянь формально не буде містити в собі членів, що не дозволяють відокремити змінні в напрямку напрямної циліндра. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції, а також компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра, приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
\frac{d\tau_{\theta\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\theta,k}; \\
\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\
\frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{44}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\theta,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})
\end{aligned} \tag{5}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_1; \\
\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\theta\gamma,k} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{11}^i &= \frac{a_{11}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \quad b_{12}^i = -\frac{a_{12}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \quad b_{22}^i = \frac{a_{11}^i a_{66}^i}{\Omega^i}; \\
b_{66}^i &= \frac{a_{11}^{i2} - a_{12}^{i2}}{\Omega^i}; \quad \Omega^i = (a_{11}^{i2} - a_{12}^{i2})a_{66}^i; \\
c_1^i &= -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i; \\
a_{11}^i &= \frac{1}{E^{i'}}; \quad a_{12}^i = -\frac{\nu^i}{E^{i'}}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu^{i'}}{E^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G^{i'}}; \\
a_{22}^i &= a_{11}^i; \quad a_{23}^i = a_{13}^i; \quad a_{55}^i = a_{44}^i; \quad a_{66}^i = \frac{1}{G^i}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отримана крайова задача (5), (6) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Оскільки, внаслідок введення доповнювальних функцій $\varphi_{l,k}^j$ ($j = \overline{1, 5}$; $l = \overline{1, 7}$; $k = \overline{0, K}$), кількість невідомих перевищує кількість рівнянь в системі (5), то в процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу значення амплітуд доповнювальних функцій визначаються за допомогою процедури знаходження коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок [6].

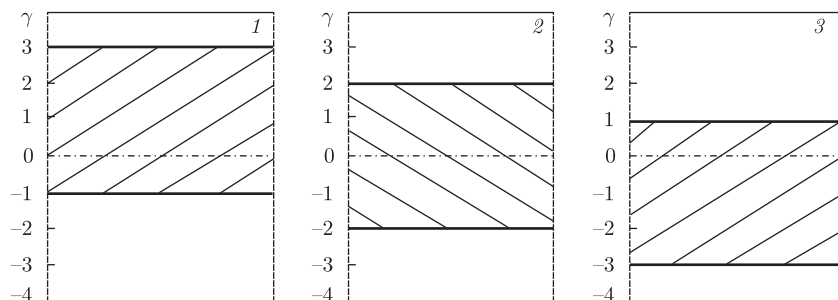


Рис. 1. Варіанти розташування шарів 1–3 по товщині циліндра

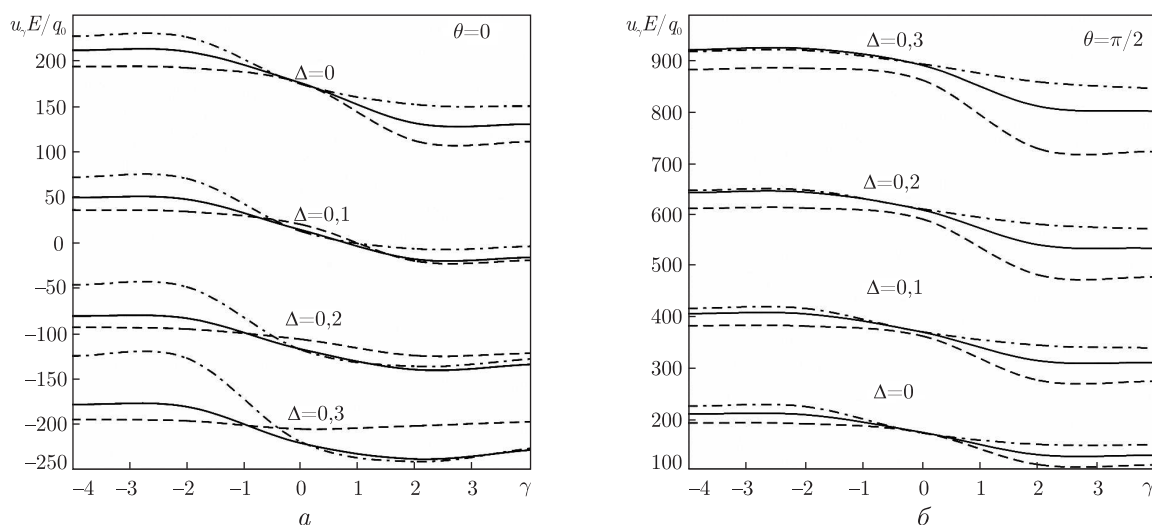


Рис. 2. Розподіл переміщень u_γ по товщині циліндра

Задачу розв'язано за таких умов: $R = 40$; $l = 60$; $\Delta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$; загальна товщина циліндра $H = 8$; товщина несучих шарів $h_1 = 3; 1$, $h_3 = 1; 3$; товщина середнього шару $h_2 = 4$; зовнішній та внутрішній шари виготовлені з ізотропного матеріалу з механічними параметрами E та $\nu = 0,3$; середній шар виготовлений з трансверсально-ізотропного матеріалу з механічними параметрами $E' = 0,2E$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E$. На рис. 1 показано варіанти розташування шарів по товщині циліндра.

На рис. 2–4 наведено результати розв'язання задачі в середньому перерізі по довжині циліндра для $s = 0,5l$. Штриховою лінією показані криві розподілу переміщень і напружень для варіанта 1 розташування шарів, суцільною — для варіанта 2, симетричного, і штрихпунктирною — для варіанта 3.

На рис. 2 наведено розподіл переміщень u_γ по товщині циліндра залежно від степеня еліптичності циліндра Δ у вершині більшої напівосі циліндра в перерізі $\theta = 0$ (рис. 2, а) та в околі меншої напівосі в перерізі $\theta = \pi/2$ (рис. 2, б).

Зі збільшенням степеня еліптичності змінюється характер розподілу полів переміщень залежно від розташування середнього трансверсально-ізотропного шару.

Так, з рис. 2, а видно, що в околі більшої напівосі еліпса для другого симетричного варіанта розташування середнього шару переміщення для $\Delta = 0,1$ на зовнішній поверхні зменшуються у 2,8 раза, змінюючи свій знак на протилежний, порівняно з переміщення-

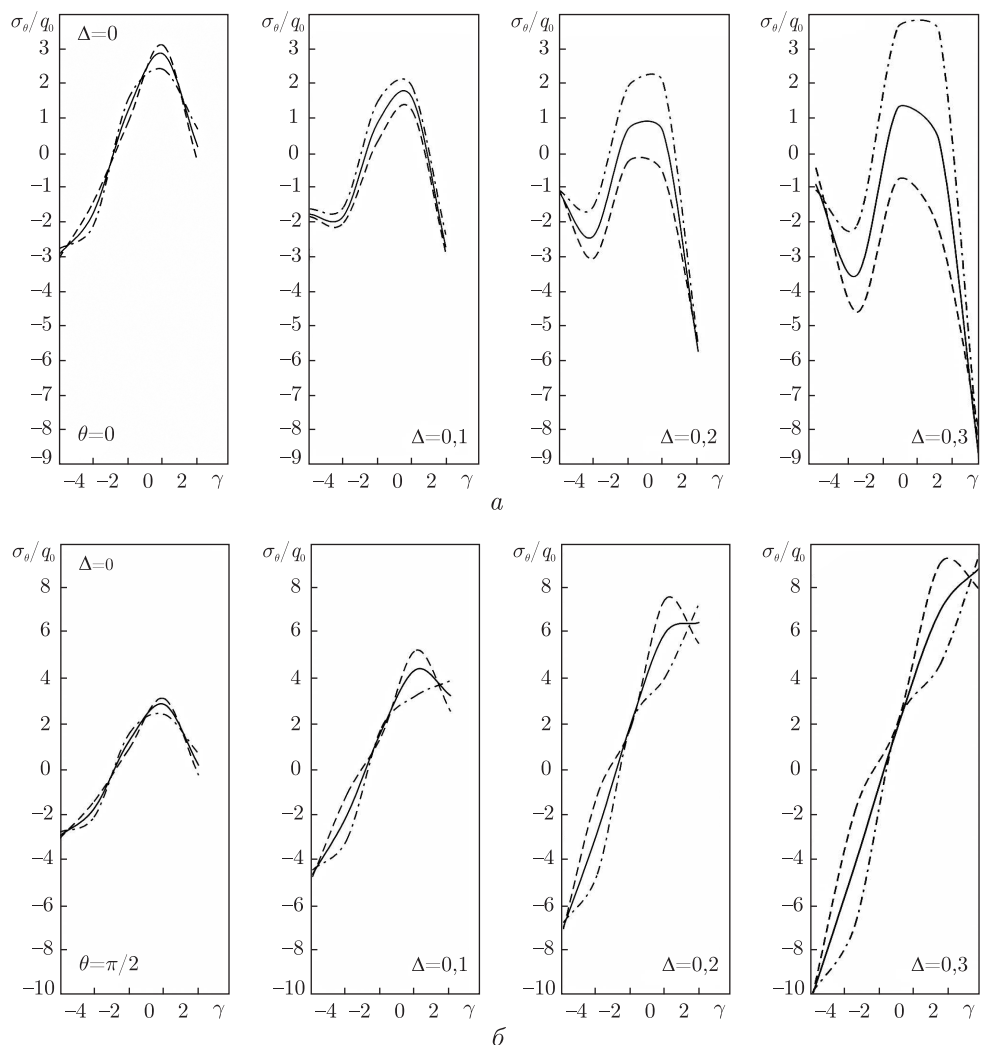


Рис. 3. Розподіл напружень σ_θ по товщині циліндра

ми на внутрішній поверхні. Для першого варіанта розташування середнього шару напруження зменшуються в 1,7 раза, а для третього — у 14 разів. Для циліндрів із ступенем еліптичності $\Delta = 0,3$ напруження збільшуються за абсолютною величиною в 1,3 раза для варіанта 2 і у 1,8 раза — для варіанта 3. Для варіанта 1 переміщення практично не змінюються.

В зоні меншої напівосі циліндра (див. рис. 2, б) при збільшенні ступеня еліптичності збільшуються значення переміщень, при цьому положення середнього шару призводить до зменшення величини переміщень приблизно в 1,4–1,2 раза для варіанта 1 і до збільшення величини переміщень в 1,1–1,3 раза для 3, порівняно з варіантом 2.

На рис. 3 наведено розподіл полів напружень σ_θ по товщині циліндрів залежно від ступеня еліптичності циліндра Δ у вершині більшої напівосі циліндра в перерізі $\theta = 0$ (рис. 3, а) та в околі меншої напівосі в перерізі $\theta = \pi/2$ (рис. 3, б).

З рис. 3, а видно, що в зоні більшої жорсткості циліндра вплив положення середнього шару відчувається в середньому перерізі по товщині. Так, для $\Delta = 0,1$ напруження змен-

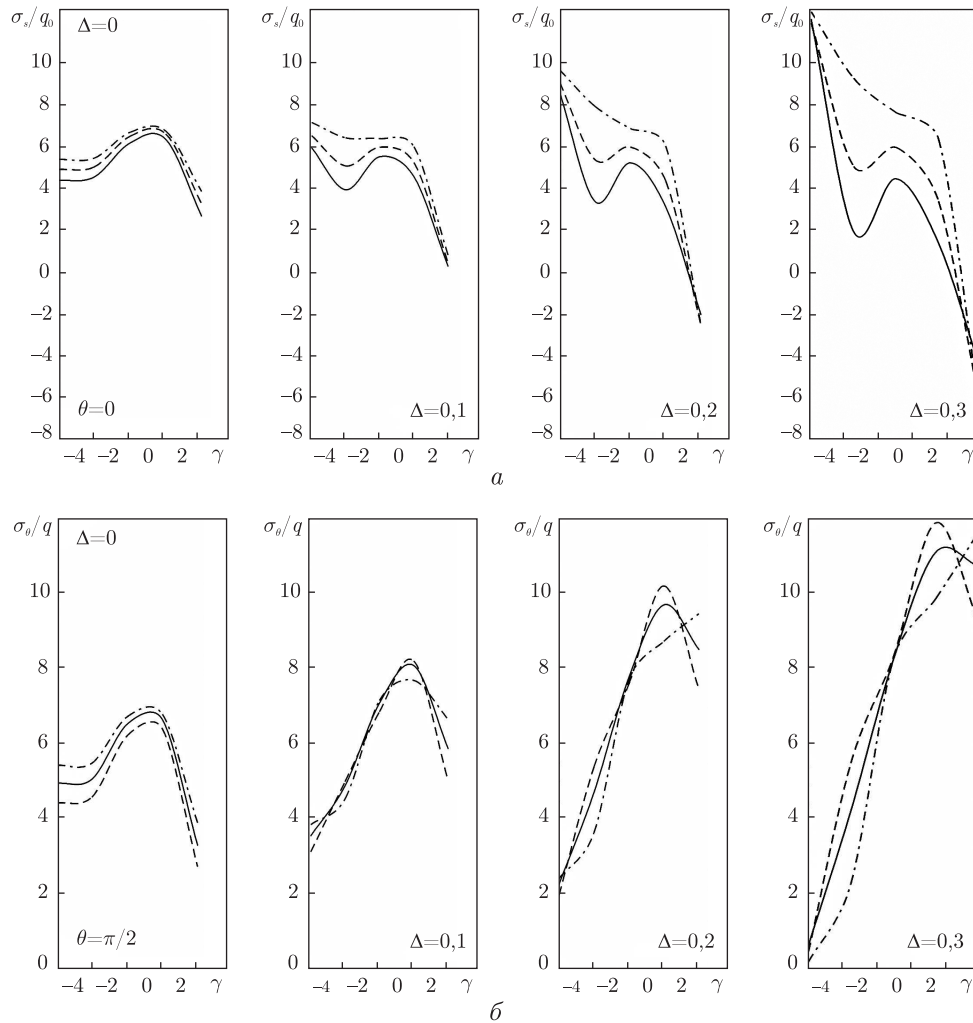


Рис. 4. Розподіл напружень σ_s по товщині циліндра

шуються в 3 і збільшуються в 1,8 раза для 1 і 3 варіантів порівняно з 2, для $\Delta = 0,2$ — у 2,3 та в 2,8 і для $\Delta = 0,3$ в 1,7 та 2,8 раза відповідно.

На рис. 3, б показані поля напружень в зоні меншої жорсткості циліндра.

Рис. 4 ілюструє розподіл полів напружень σ_s по товщині циліндрів залежно від степеня еліптичності циліндра Δ у вершині більшої напівосі циліндра в перерізі $\theta = 0$ (рис. 4, а) та в околі меншої напівосі в перерізі $\theta = \pi/2$ (рис. 4, б).

Таким чином, запропоновану методику можна застосовувати при дослідженні напруженого стану некругових порожнистих шаруватих циліндрів подібного типу.

1. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Напряженное состояние полых слоистых неоднородных эллиптических цилиндров при поверхностной нагрузке // Прикл. механика. — 2002. — **38**, № 9. — С. 87–96.
2. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005. — **48**, № 2. — С. 79–100.
3. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — Москва: Наука, 1977. — 415 с.
4. Григоренко Я. М., Рожок Л. С. Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров // Прикл. механика. — 2002. — **38**, № 5. — С. 61–71.

5. Григоренко Я. М. Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // Там же. – 2009. – **45**, № 5. – С. 3–52.
6. Физтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – Москва: Наука, 1949. – 783 с.

*Институт механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 21.05.2010

Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Grigorenko, L. S. Rozhok**

Equilibrium of elliptical hollow three-layer cylinders with transversally isotropic middle layer

The paper analyzes the stressed state of elliptic hollow three-layer cylinders with transversally isotropic middle layer of a symmetric or asymmetric structure on the basis of the function approximation method with discrete Fourier series. The fields of stresses and deformations are presented.