

Гістерезис залежностей напруження—деформація в середовищах Ляхова

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. А. Даниленком)

Досліджено гістерезис залежностей напруження—деформація в середовищах з трьома динамічними рівняннями стану Ляхова під дією періодичних кусково-лінійних навантажень. Показано, що напрями вигину гілок петлі гістерезису зумовлені релаксацийним характером рівняння стану та нелінійними властивостями граничного рівноважного рівняння стану.

Властивості рівнянь стану визначають поведінку однорідних речовин у різних процесах. Наприклад, збільшення ентропії в ударних хвилях забезпечується завдяки виконанню нерівності [1]:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0, \quad (1)$$

де p — тиск; s — ентропія; V — питомий об'єм. Ця нерівність не є термодинамічним співвідношенням, але практично завжди виконується. З умови (1) випливає неможливість існування точок перетину на ударних адіабатах.

Природні середовища (наприклад, ґрунти й геоматеріали) є неоднорідними та мають внутрішню мікроструктуру. Їхня поведінка в хвильових процесах має нерівноважний характер; спостерігаються ефекти гістерезису [2–5]. В експериментах знайдено механічний гістерезис у залежностях напруження—деформація для пісковиків та вапняків під дією періодичних кусково-лінійних навантажень [6]. При цьому як для процесу навантаження, так і для процесу розвантаження виконується нерівність (1).

Для опису нерівноважної поведінки природних середовищ використовуються динамічні рівняння стану [1–3, 7, 8], у тому числі рівняння Ляхова з похідними першого порядку в часі [4, 5].

В роботі розглядається дія періодичних кусково-лінійних навантажень на середовища Ляхова. Протокол навантажень для $t > 0$; $n > 0$ подається формулою

$$p = p_0 + 2(p_m - p_0) \left(\frac{t}{T} - n + 1\right), \quad \text{якщо } (n-1)T \leq t \leq \left(n - \frac{1}{2}\right)T,$$

$$p = p_0 + 2(p_m - p_0) \left(n - \frac{t}{T}\right), \quad \text{якщо } \left(n - \frac{1}{2}\right)T \leq t \leq nT.$$

Тут p_m — найбільший тиск; $p_0 = 1$ атм; t — час; T і n — величина періоду та номер прикладеного навантаження.

Гістерезис у середовищі з лінійним динамічним рівнянням стану. Розглянемо лінійне динамічне рівняння Ляхова [4]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \mu\varepsilon = \frac{1}{E_d} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\mu\sigma}{E_c}. \quad (2)$$

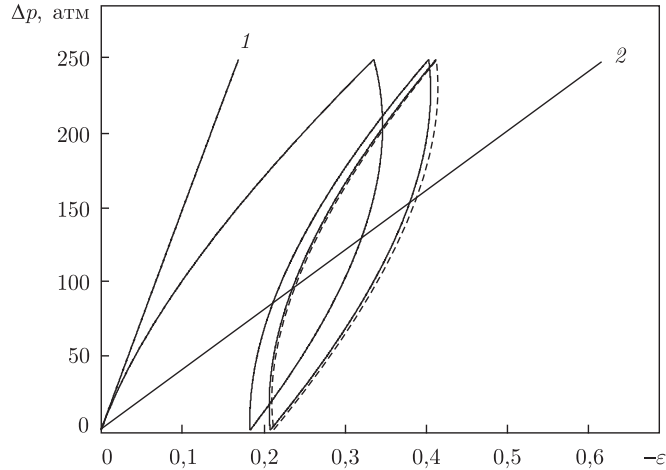


Рис. 1. Утворення петлі гістерезису в середовищі з лінійним динамічним рівнянням стану під дією періодичного кусково-лінійного навантаження за чотири періоди.

Прямі лінії: заморожена (1) й рівноважна (2)

Тут ε — деформація; σ — напруження; μ — параметр в'язкості; E_d і E_c — динамічний і статичний модулі стискання; $\varepsilon = V/V_0 - 1$; $\sigma = p_0 - p$; $V_0 = V(p_0)$.

Динамічне рівняння стану (2) описує нерівноважні релаксаційні зміни деформації ε в елементі середовища завдяки змінам напруження σ . Цей процес характеризується двома граничними швидкостями звуку: замороженою $c_f^2 = VE_d$ та рівноважною $c_e^2 = VE_c$, причому $c_f > c_e$, $E_d > E_c$.

Для нових змінних $\tilde{p} = -\sigma$; $\tilde{t} = \mu t$; $\tilde{\varepsilon} = -\varepsilon$ маємо рівняння

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{d\tilde{t}} + \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E_d} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} + \frac{\tilde{p}}{E_c}. \quad (3)$$

Після вибору конкретного кусково-лінійного навантаження отримаємо для деформації диференціальне рівняння першого порядку в часі. Це рівняння розв'язується чисельно різницьвим методом з першим порядком точності.

Для періодичного кусково-лінійного навантаження з амплітудою $\tilde{p}_m = 250$ атм та періодом $\tilde{T} = 2$ отримано петлю гістерезису (позначено штриховою лінією) в такій залежності $p(-\varepsilon)$, $\Delta p = \tilde{p}$ як показано на рис. 1. Модулі стискання мали значення $E_d = 1500$ атм та $E_c = 400$ атм, що характерно для піску [4]. Стаціонарна петля гістерезису формується на третьому циклі навантажень. Рисунок ілюструє також прямі для повністю замороженого та рівноважного процесів.

Вигин гілки навантаження направлений уверх відносно вісі деформацій, а гілки розвантаження — у протилежний бік.

Також було знайдено аналітичний розв'язок рівняння (3) для кусково-лінійного навантаження. Показано, що напрям вигину гілок петлі гістерезису на рис. 1 обумовлений релаксаційним характером рівняння стану, тобто $E_d > E_c$.

Гістерезис в однорідному в'язкопружному середовищі. Звернемося до нелінійного динамічного рівняння стану, що описує поведінку однорідного в'язкопружного середовища Ляхова [5]:

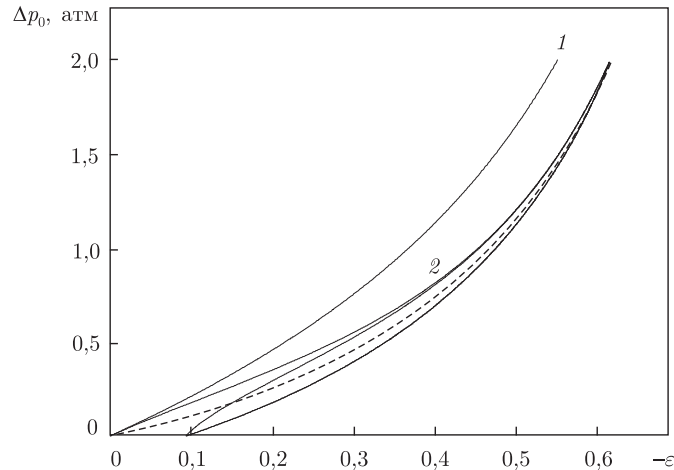


Рис. 2. Залежність напруження від деформації в однорідному в'язкопружному середовищі під дією періодичного кусково-лінійного навантаження.

Криві: замороженого стану (1), в'язкопружного середовища (2) й рівноважна (позначено штриховою лінією)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{df_D}{d\varepsilon}} - \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\frac{df_S}{d\varepsilon}}{\frac{df_D}{d\varepsilon}} \right) (p - p_0 - f_S(\varepsilon)). \quad (4)$$

В рівнянні (4) η — коефіцієнт об'ємної в'язкості середовища.

Для граничних випадків рівнянь статичної та динамічної стисливості середовища маємо відповідно

$$f_S(\varepsilon) = \frac{\rho_0 c_S^2}{\gamma_S} [(\varepsilon + 1)^{-\gamma_S} - 1]; \quad f_D(\varepsilon) = f_S(\varepsilon) + k\varepsilon; \quad k < 0.$$

У випадку малих деформацій після заміни змінних рівняння (4) збігається з рівнянням (3), причому для модулів стискання $E_S = \rho_0 c_S^2$; $E_D = E_S - k$.

Проаналізуємо результати числового моделювання дії періодичного кусково-лінійного навантаження на однорідне в'язкопружне середовище. Параметри навантаження та рівняння стану мали значення, при яких проявляється його нелінійність: $T = 2$ с; $p_0 = 1$ атм; $p_m = 3$ атм; $E_D = 2000$ атм; $E_S = 1000$ атм; $\gamma_S = 1,4$; $\eta = 10000$ атм · с.

Залежність тиску від деформації в однорідному в'язкопружному середовищі, на яку діє періодичне кусково-лінійне навантаження, зображено кривою 2 на рис. 2. На початку навантаження середовище змінює свій стан по замороженій кривій. З часом крива навантаження 2 відходить від замороженої кривої 1 та направлена опуклістю вверх відносно вісі деформацій. Зі збільшенням тиску крива проходить через точку перетину та змінює напрям вигину. Крива розвантаження середовища направлена опуклістю вниз відносно вісі деформацій. Після зняття навантаження в середовищах залишаються залишкові деформації. На другому циклі навантаження формується стаціонарна петля гістерезису, яка розташована поблизу рівноважної кривої та має напрям вигину гілок, як і на першому циклі навантажень.

Гістерезис у баротропному двокомпонентному середовищі з об'ємною в'язкістю. У цій моделі Ляхова [5, 9] мікросередовище складається з двох компонент, має один

тиск та швидкість, а його питомий об'єм V визначається за формулою:

$$V = k_2 V_2 + k_3 V_3, \quad (5)$$

де V_2, V_3 — питомий об'єм; k_2, k_3 — масовий склад компонент.

Стискання другої компоненти підпорядковується динамічному рівнянню, яке враховує швидкість деформування породи:

$$p = p_{2e} - \frac{\eta}{V_{20}} \frac{dV_2}{dt}. \quad (6)$$

У цьому рівнянні $V_{20} = \rho_{20}^{-1}$; $\rho_{20} = 2,65 \text{ г/см}^3$ — густина кварцу при атмосферному тиску; p_{2e} — рівноважний тиск у другій компоненті. Він визначається рівнянням Тета, як і тиск в третій компоненті:

$$p = p_0 + \frac{\rho_{i0} c_{i0}^2}{\gamma} \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_{i0}} \right)^\gamma - 1 \right).$$

Тут $\gamma = 4$ — показник адіабати, він однаковий у середовищах, як і початкова густина $\rho_{20} = \rho_{30}$; початкові швидкості звуку — $c_{20} = 1 \text{ км/с}$; $c_{30} = 10 \text{ км/с}$; масова частка компонентів — $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,8$.

Після диференціювання у часі рівняння (5), використання виразу (6), заміни $t_1 = \frac{V_{20} k_2 t}{\eta}$ та $\frac{dV_3}{dt} = -\frac{V_3^2}{c_3^2} \frac{dp}{dt}$ маємо динамічне рівняння стану Ляхова [5, 9]:

$$\frac{dV}{dt_1} = -k_3 \frac{V_3^2}{c_3^2} \frac{dp}{dt_1} + p_{2e} - p. \quad (7)$$

Диференціальне рівняння (7) є нелінійним, за структурою — схожим з рівнянням (3). Існують заморожена та рівноважна криві для рівняння стану (7). Формули для них у диференціальній формі мають такий вигляд:

$$dV_f = -k_3 \frac{V_3^2}{c_3^2} dp; \quad dV_e = -\left(k_2 \frac{V_2^2}{c_2^2} + k_3 \frac{V_3^2}{c_3^2} \right) dp.$$

Для граничних швидкостей звуку виконується умова $c_f > c_e$.

Проведено числове моделювання дії кусково-лінійного навантаження різної інтенсивності та амплітуди на середовище з мікроструктурою. Вважається, що в початковий момент при атмосферному тиску $V = V_0 = V_e = V_f$.

Графіки залежностей напруження від деформації при однаковому періоді навантаження $T_1 = 0,2$ та різних амплітудах зображено на рис. 3, а-в. При амплітуді $p_m = 0,1 \text{ ГПа}$ маємо гістерезисну петлю з такими властивостями, як і в лінійній задачі на рис. 1. При амплітуді $p_m = 1 \text{ ГПа}$ гілка петлі гістерезису, що відповідає навантаженню, при тиску $p > 0,8 \text{ ГПа}$ проходить через точку перетину та змінює напрям вигину. Тепер він направлений вниз до вісі деформацій. При амплітуді $p_m = 10 \text{ ГПа}$ проявляється повністю вплив нелінійного рівноважного рівняння стану. Петля гістерезису розташована поблизу рівноважної кривої.

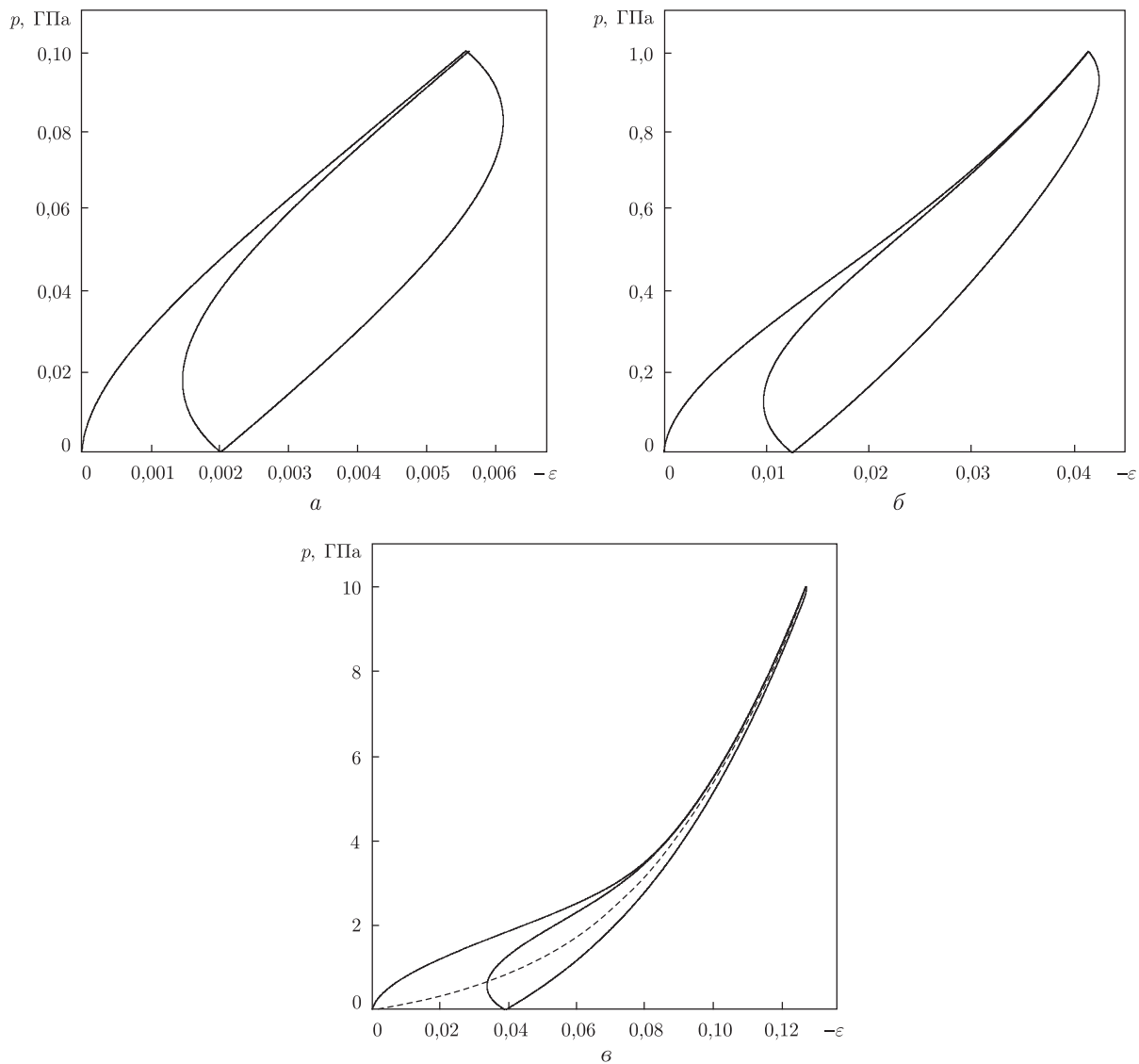


Рис. 3. Залежності напруження від деформації в мікросередовищі у випадку, коли зовнішнє навантаження має однаковий період $T_1 = 0,2$, але різні амплітуди. Рівноважна крива (позначено штриховою лінією)

Таким чином, проведено дослідження властивостей петель гістерезису в залежностях напруження—деформація для моделей Ляхова однорідних та неоднорідних середовищ з динамічними рівняннями стану першого порядку у часі під дією періодичних кусково-лінійних навантажень. Показано, що при малих амплітудах навантаження напрями вигину гілок петлі гістерезису протилежні та зумовлені релаксаційним характером рівнянь стану. При значних амплітудах навантажень, якщо проявляється нелінійність рівняння стану, із збільшенням зовнішнього навантаження гістерезисна крива переходить через точку перетину та змінює напрям вигину. Напрямок вигину гілки гістерезисної петлі, який відноситься до процесу розвантаження середовища, не змінюється та відповідає експериментальним даним для пісвиків та вапняків.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Б. Б. Гидродинамика. – Москва: Наука, 1986. – 733 с.
2. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – Москва: Госстройиздат, 1960. – 131 с.
3. Даниленко В. А., Даневич Т. Б., Скурятівський С. І. Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальностями. – Київ: Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2008. – 86 с.
4. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. – Москва: Недра, 1974. – 192 с.
5. Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
6. Darling T. W., TenCate J. A., Brown D. W. et al. Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress-strain behavior // Geophys. Res. Lett. – 2004. – **31**. – L16604.
7. Буевич Ю. А., Ясников Г. П. Релаксационные методы в исследованиях процессов переноса // Инж.-физ. журн. – 1983. – **44**, № 3. – С. 489–504.
8. Владимиров В. А., Даниленко В. А., Королевич В. Ю. Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. Ч. 1. – Киев, 1990. – 40 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т геофізики ім. С. І. Субботіна).
9. Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В. Асимптотическое обоснование модели многокомпонентных сред Ляхова // Физика горения и взрыва. – 1996. – **32**, № 2. – С. 68–73.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.07.2010

V. V. Kulich

Hysteresis of stress—strain dependences in Lyakhov's media

Hysteresis of stress—strain dependences is investigated in media with three Lyakhov's dynamic equations of state under periodic piecewise linear loads. It is shown that the bending directions of branches of the hysteresis loop are due to the relaxing nature of the equation of state and nonlinear properties of the limit equilibrium equation of state.