

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

## РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЕТАЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОСТЫХ СОСТОЯНИЙ МАТЕРИАЛА

*Установлены необходимые и достаточные условия для несущей способности деталей. Показана возможность упрощения метода вычисления несущей способности деталей сложной формы для пропорциональной нагрузки, путем разложения состояния материала на простейшие состояния в различных соотношениях.*

**Ключевые слова:** размер, несущая способность, жесткость, напряжение, смещение.

Способность детали нести нагрузку, то есть уравновешивать ее силами сопротивления, зависит от многих условий. Одним из них является достижение предельного состояния материала и его разрушение в наиболее напряженном объеме. Но этого разрушения не достаточно для потери несущей способности детали. В большинстве случаев происходит перераспределение напряжений, ограничивающее дальнейшее разрушение. Необходимым условием разрушения также не является. Например, потеря устойчивости и несущей способности продольно сжатых стержней имеет место при напряжениях ниже разрушающих.

Необходимым условием наличия несущей способности детали является превышение силы ее сопротивления над силой приложенной нагружающей системой, по крайней мере, на каком либо этапе процесса деформирования.

В случае мягкой нагружающей системы необходимое условие соответствует первой теории прочности, то есть максимальная сила сопротивления, обусловленная пределом прочности материала должна превышать нагрузку. Примером мягкой нагружающей системы может быть нагружением весом груза. Жесткость такой системы строго не равна нулю, а имеет отрицательную величину, так как вес груза увеличивается в процессе деформирования нагружаемой детали вследствие приближения груза к центру Земли. Вследствие малой величины перемещений такую систему можно считать идеально мягкой.

Если нагружение осуществляется силами притяжения между атомами, электрическими, магнитными или силами, возникающими вследствие отклонения от положения неустойчивого равновесия, то нагрузка возрастает существенно. Необходимое условие исчезает при деформациях и соответствующих им напряжениях, которые намного меньше предела прочности. Причиной является относительно небольшое снижение жесткости детали. Если до этого снижения сила сопротивления не успевает обогнать нагрузку, то дальнейший более медленный рост ее силы сопротивления уже не имеет значения, так как нагрузка растет быстрее. Предел прочности

материала в этом случае опасно завышает оценку несущей способности детали. Лучшую оценку дают пределы текучести, упругости и даже пропорциональности. Но для их использования требуются экспериментально полученные поправки.

Вблизи концентраторов напряжений жесткость нагружающей системы имеет существенно положительное значение. Эта система снижает нагрузку в процессе деформирования детали. Это явление называют релаксацией напряжений, перераспределением или приспособлением. Использование предела прочности материала в этом случае заметно завышает оценку несущей способности. Необходимое условие наступает и после достижения предела прочности уже во время снижения сопротивления детали, если нагрузка снижается еще быстрее. Исчезновение необходимого условия связано с исчерпанием пластичности, которое снижает жесткость детали до такой величины отрицательной жесткости, при которой становится невозможным превышение сил сопротивления над нагрузкой несмотря на снижение нагрузки.

Таким образом, необходимое условие обеспечивает принципиальную возможность положения равновесия сил нагрузки и сопротивления детали. Но этого условия недостаточно для наличия ее несущей способности.

Достаточным условием является устойчивость положения равновесия сил. Достаточное условие в свою очередь имеет необходимую и достаточную часть. Необходимым условием устойчивости положения равновесия детали является устойчивость ее материала. Из термодинамики известно, что материал устойчив при положительном модуле его упругости. Для устойчивости деформирования детали этого недостаточно. При положительном модуле упругости деталь может иметь как положительную так и отрицательную жесткость в зависимости от жесткости закрепления. Не закрепленная деталь имеет нулевую жесткость. Деталь на ниспадающем участке диаграммы деформирования имеет отрицательную жесткость, несмотря на то, что большая часть ее материала имеет положительный модуль упругости. До отрицательных значений ее жесткость снижает закрепление с отрицательной жесткостью, которым является наиболее нагруженный объем детали. Деталь, имеющая отрицательную жесткость деформируется устойчиво, если жесткость нагружающей ее системы положительная и по модулю больше жесткости детали. Достаточным условием устойчивости деформирования детали является положительное значение суммы жесткости детали и нагружающей ее системы, даже если жесткость детали имеет отрицательное значение.

Оба условия связаны со снижением жесткости детали при ее деформировании, одной из причин которого является разрушение материала. Кроме того, жесткость снижается вследствие раскрытия трещин, фазовых превращений, изменения схем закрепления и нагружения в результате деформирования и других явлений. Наиболее часто изменение жесткости закрепления детали учитывается вследствие пластического деформирования, но в основном для уточнения напряженно-деформированного состояния материала. Применительно к прямой оценке несущей способности с помощью этого изменения чаще уточняется достаточное условие, связанное с потерей устойчивости детали. Необходимое условие оценивают по

предельной нагрузке наиболее напряженной части детали. Сопротивление этой части увеличивается, до тех пор пока ее жесткость положительная. Сопротивление детали в целом имеет другие закономерности. Они зависят от формы, размера детали, схем ее закрепления и нагружения. Обычно их определяют экспериментально. Расчет этих закономерностей требует точности, не всегда достижимой современными методами. Повысить точность можно, используя закономерности деформирования простейших тел, имеющих элементарные схемы закрепления и нагружения.

Субъективно наиболее простым телом является стержень постоянного сечения при однородном одноосном напряженном состоянии, которому соответствует схема одноосного растяжения или сжатия при схеме плоского закрепления. Объективно одноосное напряженное состояние одно из наиболее простых, но все же сложное, так как складывается из двух более простых: шарового тензора и симметричного девиатора, которые уже не раскладываются на более простые. Шаровой тензор полностью описывается одной скалярной величиной. Для описания симметричного девиатора, то есть девиатора, у которого второе и третье главное напряжение одинаковы, также достаточно одной скалярной величины и дополнительно направления. Так же как и шаровой тензор симметричный девиатор имеет одинаковые коэффициенты жесткости по всем трем направлениям главных напряжений. Для сравнения одноосное напряженное состояние также определяется величиной и направлением, но отношение напряжений к перемещениям по разным направлениям главных напряжений имеет более сложное распределение, чем у симметричного девиатора. В продольном направлении отношение напряжений к относительным перемещениям равно модулю Юнга, а в поперечных направлениях нулю.

Произвольное напряженное состояние раскладывается на шаровой тензор и произвольный девиатор. Произвольный девиатор в свою очередь раскладывается на два независимых симметричных девиатора, которые не совпадают по направлению. Разложение выполнить проще, если расположить симметричные девиаторы под прямым углом друг к другу. Таким образом, произвольная схема нагружения является комбинацией всего двух типов: всестороннее растяжение – сжатие и объемный симметричный сдвиг.

Схема закрепления описывается тремя простыми типами: точечный, линейный и плоский. Под закреплением понимается любое нарушение однородности материала. Причиной потери несущей способности является закрепление, которое меняет жесткость в процессе деформирования. Таким закреплением часто бывает наиболее нагруженная часть детали, материал которой меняет свои упругие свойства. Если все размеры этой части существенно меньше размера детали, закрепление близко к точечному типу. Уже на расстоянии, превышающем в три раза максимальный размер закрепления, напряженное и деформированное состояние материала достаточно точно описывается в сферической системе координат. В случае шарового тензора хорошо известны решения Ламе:  $u_r = Ar + B/r^2$ ;  $\sigma_r = AG_1 + BG_2/r^3$ . Аналогичные решения известны для симметричного девиатора:  $u_r = (Ar + B/r^4)P$ ;  $\sigma_r = (4B/r^5 - A/2)G_2P$ , где:  $A, B$  – постоянные;  $r$  – радиус;  $G_1 = E[1 - 2\mu]$ ;  $G_2 = -2E/(1 + \mu)$ ;  $E$  – модуль упругости  $\mu$  – коэффициент Пуассона;

$P$  – полином Лежандра,  $P = (3\cos^2\varphi - 1)$ ;  $\varphi$  – угол к направлению максимального главного напряжения.

Суммируя в различных пропорциях шаровой тензор и симметричный девиатор, получим одноосное, плоское двuosное и все промежуточные симметричные напряженные состояния материала. Разность двух одинаковых симметричных девиаторов, имеющих прямой угол между направлением их максимальных главных напряжений, представляет собой девиатор в виде плоского чистого сдвига. Его наложение на симметричное напряженное состояние материала приводит к произвольно заданному состоянию.

Аналогичные решения соответствуют линейному и плоскому типу закрепления. Например, решение Ламе для бесконечной пластины с отверстием при осесимметричном нагружении в цилиндрических координатах дает значение концентрации напряжений равное двум. В случае чистого сдвига – четырем. Суммируя осесимметричное состояние и чистый сдвиг в разных пропорциях, получим соответствующую концентрацию напряжений. В частности для пропорции 1:1 получим значение концентрации напряжений равное трем, что соответствует хорошо известному коэффициенту концентрации при одноосном растяжении или сжатии.

Для расчета жесткости детали с учетом ее формы, размеров, схемы нагружения и закрепления предложен параметр удельной жесткости в виде отношения напряжений  $\sigma$  к перемещениям  $u$  отнесенным к координате  $r$  в выбранной системе координат:  $G = \frac{\sigma}{u} r$ .

Расчет напряжений и перемещений для определения жесткости детали не требуется. Распределение параметра  $G$  можно получить путем решения дифференциального уравнения, которое, например, в случае точечного закрепления при всестороннем растяжении сжатии имеет вид

$$r \frac{dg}{dr} + g^2 + g - 2 = 0,$$

где  $g$  – безразмерная удельная жесткость,  $g = \frac{1-\mu}{\frac{E}{G} + \mu}$ .

Более наглядно это же решение можно получить в размерном виде, подставив известные решения для напряжений и перемещений в отношение напряжений к относительным перемещениям

$$G = \frac{r^3 G_1 + C G_2}{r^3 + C},$$

где  $C$  – постоянная интегрирования,  $C = R_0^3 \frac{G_1 - G_0}{G_0 - G_2}$ , которая определяется

из граничных условий по величине жесткости включения  $G_0$  радиусом  $R_0$ .

Изменение жесткости наиболее напряженного объема детали в процессе деформирования экспериментально удобнее определить на расстоянии  $r_0$ , где снижается уровень напряжений и влияние отличий

реальной формы этого объема от простой типа стержень, цилиндр, шар. Описать это изменение удобнее в виде:

$$G_0 = G_1 + (G_2 - G_1) f(u_0),$$

где  $G_0$ ,  $u_0$  – жесткость и относительное перемещение на расстоянии  $r_0$ .

Тогда жесткость  $G$ , перемещение  $u$ , напряжение  $\sigma$  для простых тел при симметричном растяжении описывается формулами [1] для случая  $r_0 = 1$ :

$$G = G_1 + \frac{G_2 - G_1}{r^n + (1 - r^n)} f(u_0);$$

$$\frac{u}{r} = u_0 + \left( \frac{1}{r^n} - 1 \right) \tilde{f}(u_0); \quad \sigma = G_1 u_0 + \left( \frac{G_2}{r^n} - G_1 \right) \tilde{f}(u_0);$$
(1)

где  $r$  – расстояние от плоскости, линии или точки закрепления;  $\tilde{f}(u_0)$  – интеграл от функции  $f(u_0)$ ;  $G_1 = E[1 - (n - 1) \mu]$ ;  $G_2 = -(n - 1) E/(1 + \mu)$ ; параметр  $n$  равен: 1 – для стержня; 2 – для цилиндра; 3 – для шара.

Реальные концентраторы напряжений сложнее. Они имеют элементы плоскости, линии и точки в разных пропорциях. Например, пластина с центральной трещиной имеет плоскость берегов трещины, линию вершины трещины, которая в свою очередь имеет особые точки на внешней поверхности пластины, где условия деформирования менее жесткие чем в центре. Расчет жесткости, перемещений и напряжений в пластине с центральной трещиной аналитическими [2] и численными методами [3] имеет закономерности, близкие к расчету по формуле (1) при  $n = 1,5876$ . Используя экспериментальные данные, приведенные в работах [4, 5], установлено, что для квадратных образцов из сплава 1163 АТ, близкого к 2024-Т3, размером 240 мм, с центральной трещиной длиной 96,2 мм функция  $f(u_0)$  близка к линейной. То есть зависимость напряжений  $\sigma_0$  от перемещений  $u_0$  близка к параболе с максимумом 206 МПа. По формуле (1) рассчитано увеличение несущей способности образцов до 279,8 МПа при увеличении их размера до 2286 мм, без изменения длины трещины. В работе [6] приведены результаты испытаний образцов из сплава 2024-Т3 шириной 2286 мм с разной длиной центральных трещин: 203,2; 355,6 и 508 мм. Максимальные напряжения соответственно составляли 184, 147 и 124 МПа. Из предположения, что коэффициент интенсивности напряжений одинаков для разных длин трещин рассчитаем соответствующие напряжения для трещины длиной 96,2 мм: 267,4; 282,6 и 284,9 мм, которые близки к значению 279,8 МПа, полученному по формуле (1). В данном случае значение параметра  $n = 1,5876$  получено теоретически, функция  $f(u_0)$  – экспериментально. Функция  $f(u_0)$  редко бывает близкой к линейной, например для образцов шириной 2286 мм и длиной трещины 96,2 мм она, как следует из формулы (1) существенно нелинейная. Ее характер зависит от материала и размера детали. При малых размерах и вязких материалах она имеет больше вогнутых участков. С увеличением размеров она становится более выпуклой. В общем случае функцию удобно описать в виде:

$$f(u_0) = \frac{au_0^4}{(b^2 + u_0^2)^2}, \quad (2)$$

тогда ее интеграл равен

$$fi(u_0) = a \left[ u_0 + \frac{b^2 u_0}{2(b^2 + u_0^2)} - 1,5b \operatorname{arctg} \left( \frac{u_0}{b} \right) \right].$$

В работе [6] приведены результаты испытаний образцов сплава Д16чТ с центральной трещиной. По данным испытаний образцов шириной  $W = 300$  мм были получены значения  $a = 0,8$  и  $b = 0,0009$ . Для расчета использовалось теоретическое значение параметра  $n = 1,5876$ . Модуль упругости условно был принят равным единице, а полученные по формуле (1) значения напряжений при  $r = 1$  умножались на коэффициент 168000, чтобы напряжения  $\sigma = 306,7$  МПа соответствовали длине трещины 180 мм приведенным в работе [6] для образцов шириной  $W = 300$  мм предельным значениям коэффициентов интенсивности напряжений  $K_m^y = 94,56$  МПа\*м<sup>0.5</sup>. Этим напряжениям соответствовало относительное удлинение  $u_{0\text{ин}} = 0,00446$ , при котором скачкообразно изменялась жесткость образца вследствие исчерпания пластичности. При этом же значении  $u_{0\text{ин}} = 0,00446$  происходила потеря несущей способности образцов шириной  $W = 400$  и  $W = 750$  мм, которым соответствовали значения  $r = W/300$ , равные 1,33 и 2,5 (рис. 1). Потеря несущей способности образцов шириной  $W = 100$  и  $W = 50$  мм при  $r = 0,333$  и  $r = 0,1667$  происходила вследствие плавного достижения максимальных напряжений без исчерпания пластичности при значительно меньших значениях  $u_0 = 0,00117$  и  $u_0 = 0,000736$ .

В работе [7] приведены диаграммы деформирования в координатах  $P/(tW^{0.5}) - V/(tW^{0.5})$ , полученные при испытании образцов стали 15Х2НМФА и 15Х2МФА на внецентренное растяжение двух размеров: толщиной  $t = 25$  мм, шириной  $W = 50$  мм и  $t = 150$  мм,  $W = 300$  мм. Где  $P$  – нагрузка,  $V$  – смещение берегов трещины. Увеличение размера образца стали 15Х2НМФА в 6 раз приводит к увеличению  $PL^{0.5}/(tW)$  при  $L/W = 0,6$  в 2,35 раза, так как поправочная функция  $Y(L/W)$  при  $L/W$ , близком при проведенных испытаниях к 0,6 изменяется несущественно. Во столько же раз увеличится и  $P/(tW)$  при одинаковой длине трещины  $L = 0,03$ м, так как значения  $Y(0,6)$  и  $Y(0,1)$  также несущественно отличаются. Аппроксимируя диаграмму образцов толщиной  $t = 25$  мм ( $r = 1$ ) с использованием функции  $f(u_0)$  в виде (2) получим  $a = 0,882$ ;  $b = 0,0426$ ;  $u_{0\text{ин}} = 1,03$  для сплава 15Х2НМФА и  $a = 0,882$ ;  $b = 0,053$ ;  $u_{0\text{ин}} = 0,49749$  для сплава 15ХНМФА. По формуле (1) такому увеличению напряжений (для  $r=6$ ) соответствует значение параметра  $n$ , равное 1,24.

Учитывая одинаковую форму образцов, а также схемы их нагружения и закрепления, это же значение параметра  $n$  используем в для прогноза меньшего (рис. 2) увеличения несущей способности образцов стали 15Х2МФА вследствие меньшей ее пластичности (меньшего  $u_{0\text{ин}}$ ) по сравнению со сталью 15Х2НМФА.

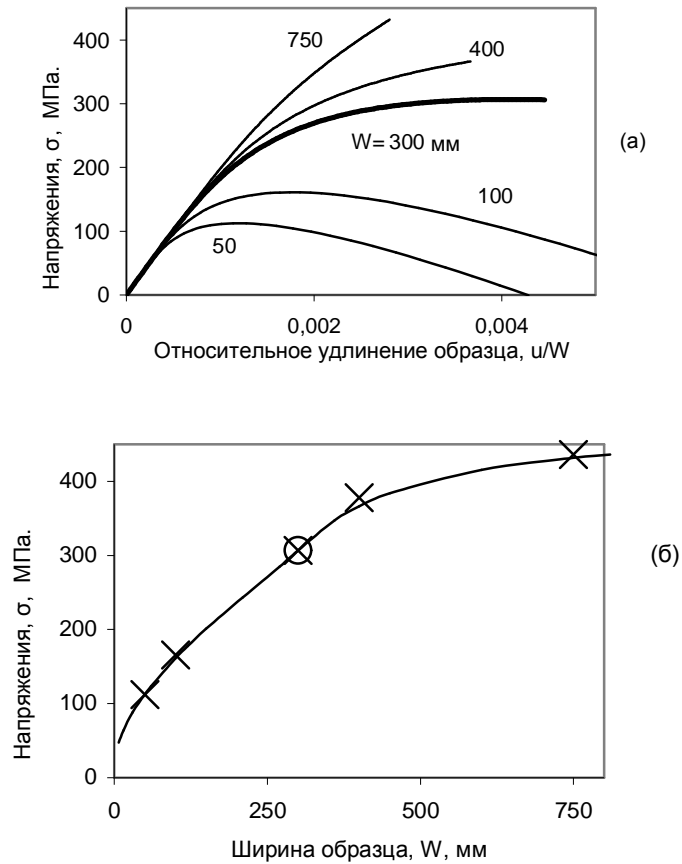


Рис. 1. Связь диаграммы деформирования (а) образцов сплава Д16чТ с влиянием (б) их ширины  $W$  на максимальную несущую способность этих образцов. Обозначения:  $\otimes$  – результаты испытаний, которые использовались в расчете;  $\times$  – результаты испытаний, которые не использовались в расчете.

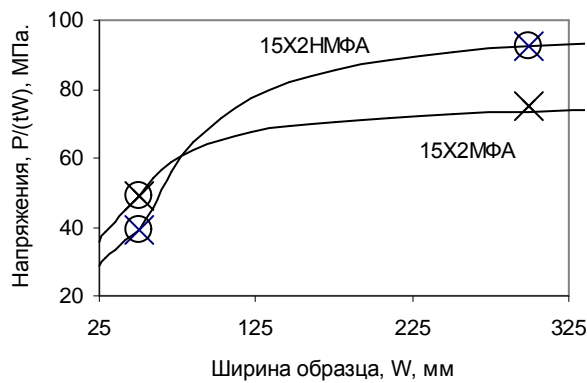


Рис. 2. Зависимости максимальных напряжений  $P/(tW)$  от размера  $W$  образцов.

Таким образом, несущая способность детали зависит от схемы ее нагружения и закрепления. Определяет несущую способность изменение жесткости закрепления в процессе деформирования. Это изменение часто связано со степенью разрушения наиболее нагруженного объема материала. Предельную нагрузку детали можно рассчитать, используя изменение сопротивления материала деформированию, полученное при испытании образца с известными параметрами схем его нагружения, а также закрепления, и общие закономерности влияния этих параметров на несущую способность, полученные из анализа изменения жесткости простейших тел, имеющих простейшие схемы закрепления и приложения нагрузки.

## Summary

The necessary and sufficient conditions for load-carrying capacity of components are presented. The possibility is shown to simplify the method for calculating the load-carrying capacity of the symmetrical components of complex shapes under proportional loading by decomposing the material state into the simplest states in different ratios.

**Keywords:** size, carrying capacity, stiffness, tension, displacement.

## Резюме

Встановлено необхідні і достатні умови для несучої здатності деталей. Показано можливість спрощення методу обчислення несучої здатності деталей складної форми для пропорційного навантаження шляхом розкладання стану матеріалу на простіші стани в різних співвідношеннях.

**Ключові слова:** розмір, несуча здатність, жорсткість, напруження, зміщення.

1. *Барило В. Г.* Влияние геометрического фактора на несущую способность деталей машин // Вибрации в технике и технологиях. – 2004. – № 6 (38). – С. 114 – 118.
2. *Барило В. Г.* Устойчивость деформирования твердых тел с дефектами типа трещин и включений // Пробл. прочности. – 2005. – № 1. – С. 118 – 135.
3. *Барило В. Г.* Влияние жесткости малой области разрушения на несущую способность деталей ГТД // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 5 (21). – С. 44 – 49.
4. *Науменко В. П., Коледник О., О’Дауд Н. П., Волков Г. С.* Влияние стесненности деформаций на сопротивление стабильному росту трещины в тонких алюминиевых пластинах // Труды конференции: «Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций». – 6-9 июня 2000 г., Киев (Украина). – С. 299 – 304.



5. *De Wit R., Fields R. J., Low S. R., Harne D. E., and Foecke. T. Fracture Testing of Large-Scale Thin-Sheet Aluminum Alloy. // Fatigue and Fracture Mechanics; 27th Volume, ASTM STP 1296, R. S. Piascik, J. C Newman, and N. E. Dowling, Eds; American Society for Testing and Materials, 1997. – P. 451 – 468.*
6. *Науменко В. П., Семенец А. И. Трещиностойкость и прочность крупногабаритных пластин из алюминиевых сплавов / АН УССР, Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1990. – 49 с.*
7. *Троценко В. Т., Покровский В. В., Каплуненко В. Г. и др. Влияние размеров образца на трещиностойкость корпусных теплоустойчивых сталей // Пробл. прочности. – 1982. – № 10. – С. 3 – 11.*

Поступила 11.06.2009