

С.А. Ус, к. ф-м. н., доцент  
(ДВНЗ «Національний гірничий університет»),  
К.С. Іщенко, к.т.н., с.н.с.  
(ІГТМ),

А.О.Корела, магістр-системний аналітик,  
(ДВНЗ «Національний гірничий університет»)

## **ОБГРУНТУВАННЯ СКЛАДУ ТВЕРДЮЧОЇ СУМІШІ ДЛЯ ЗАКЛАДКИ ВИРОБЛЕНОГО ПРОСТОРУ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРВАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ**

Рассмотрено задачу обоснования оптимального состава твердеющей смеси для закладки выработанного пространства. Для ее решения в работе предложено оптимизационную модель на основе уравнения регрессии с интервальными коэффициентами и последовательной редукции. Приведен сравнительный анализ интервальной и базовой модели.

## **A GROUND OF COMPOSITION OF SOLIDIFIABLE MIXTURE IS FOR BOOK-MARK OF MINED-OUT SPACE WITH THE USE OF INTERVAL REGRESSIVE MODEL**

The task of ground of optimum composition of hardening mixture is considered for the book-mark of mined-out space. For its decision an optimization model is in-process offered on the basis of equalization of regression with interval coefficients and successive reduction. The comparative analysis of interval and base model is resulted.

**Вступ.** Згідно світової статистики, Україна входить в десятку найбільш розвинутих країн у галузі атомної енергетики. Тільки розвідані запаси в змозі забезпечити більш ніж на 100-річну потребу АЕС України у природньому урані. На сьогоднішній день рівень видобутку урану дозволяє не тільки задовольнити власні потреби, але й експортувати за кордон значні об'єми уранової сировини [1, 2].

Проте, складний процес видобутку урану тягне за собою певні екологічні проблеми (порушення природного рельєфу, поява деформацій земної поверхні в місцях відпрацьованих рудних блоків шахт, утворення величезних наземних радіоактивних сховищ відходів урановидобувного процесу – хвостів, збільшення рівню запиленості місцевості), вирішення яких є пріоритетним для урановидобувних підприємств. Одним з способів вирішення цих проблем – є закладка відпрацьованих просторів шахт. Витрати на виконання цих робіт визначаються насамперед обраним способом формування штучного масиву з використанням обраного закладного комплексу, конструкціями ізолюючих перемичок і складом суміші, що є основою твердіючої закладки. Для виготовлення закладної суміші необхідна наявність різного виду матеріалів: в'язких заповнювачів, мікронаповнювачів, активуючих і пластифікуючих добавок. При цьому, підбір складу закладного матеріалу необхідно здійснювати так, щоб домогтися оптимального співвідношення між вартісними і якісними показниками суміші, а також, можливо максимально використовувати в суміші компоненти які мають місце

у відходах промислового виробництва, утилізуючи їх, зменшуючи таким чином навантаження на навколишнє природне середовище [3].

Як наслідок з цього, визначення оптимального складу суміші, яка використовується для закладки відпрацьованих просторів шахти, на сьогоднішній день є актуальною задачею.

**Мета** даної роботи – побудування нової математичної моделі для обґрунтування оптимального складу суміші з урахуванням експериментальних даних.

**Постановка задачі дослідження.** На Смолінській шахті ДП «Схід ГЗК» у процесі видобутку уранової руди застосовують закладку, що твердіє, яка складається з в'язких і інертних матеріалів. Як інертний заповнювач для приготування закладної суміші використовуються відходи урановидобувної, металургійної та деревопереробної промисловості, продукти хімічної промисловості, а саме хвости, доменний шлак, лігносульфонати, алюмокалієвий галун, а також доломітовий пил, природній ангідрид та вода. Завдання полягає у визначенні оптимального складу закладної суміші, який забезпечує максимізацію її міцності. Тобто, за результатами даних експерименту необхідно дослідити вплив компонентів суміші на її якісні характеристики та скласти математичну модель, що дозволить обрати оптимальний склад суміші з урахуванням технологічних вимог.

*Вихідними даними для проведення роботи були:* державні стандарти вищої освіти України; дані про фізичні та хімічні властивості компонентів, що входять до складу закладної суміші; дані про стан проведення закладних робіт в умовах Смолінської шахти.

**Матеріали і результати досліджень.** На даний момент на шахті використовують три види суміші, якісний склад і характеристики яких приведено в таблиці 1.

Як видно з представлених даних, хвости, що є відходами в результаті добування урану, використовуються лише у третій суміші. Це пов'язано з тим, що міцність суміші, до якої входять хвости та природній ангідрид, відносно невелика (20-25 МПа), порівняно з сумішами, де за основу береться доменний шлак (30-35 МПа). Тому значна перевага віддається сумішам, основаним компонентом якої є доменний шлак. Проблема хвостосховищ при цьому залишається відкритою, так як в пріоритеті все ж таки залишається міцність твердіючого матеріалу. Але тверді відходи переробки уранових руд в тій чи іншій мірі містять радіоактивні елементи і тому специфічні. В зв'язку з цим для умов ДП «Схід ГЗК» проводилися лабораторні дослідження щодо аналізу складу компонентів хвостів та на основі яких проведені вибір та обґрунтування їх, які суттєво впливають на фізико-механічні характеристики суміші, що сприятиме збільшенню відсоткового вмісту хвостів у закладних сумішах.

Таблиця 1 – Компоненти, що входять до складу закладної суміші

	Компоненти	Вартість (грн/т)	Вміст компонента в суміші		
			суміш 1	суміш 2	суміш 3
компоненти	Доломітовий пил	29,15	28,1 - 29,5	30,2 - 32,6	
	Алюмокалієвий галун	69,27	4,5 - 6,8	10,1 - 13,4	13,1 - 15,4
	Лігносульфонати	20,25	7,5 - 10,3		6,5 - 9,3
	Вода	14,75	12,7 - 14,8	15,4 - 23,0	18,4 - 23,0
	Доменний шлак фракції dфр. = 2,0-5,0 мм	18,45	Останнє	Останнє	Останнє
	Природний ангідрит 60% фракції dфр. = 2-4 мм, 20% хвостів (мул) фракції dфр. = 0,25-0,3 мм, вологістю 10-12% і 20% доломітовий пил	17,5 21 29,15			
характеристики суміші	Щільність кг/м <sup>3</sup>		1950 - 1970	2010 - 2015	2055 - 2096
	Коефіцієнт внутрішнього тертя		0,2-0,24	0,26-0,30	0,20-0,26
	Коефіцієнт пластичності		2,1 - 2,4	1,15 - 1,17	1,20 - 1,26
	Час початку схоплювання суміші, год.		0,3 - 0,5	0,2-0,3	0,3-0,4
	Міцність суміші на одновісний стиск, МПа		20,0 - 25,0	30-35	20 - 25
	Деформація, мм		2,0-4,0	1,0 - 2,0	1,35 - 2,5
	Розширення суміші, %		1,5 - 2,3	0,1 - 0,15	2-3
	Зчеплення, МПа		0,08 - 0,1		0,5 - 0,7

Після проведення лабораторних досліджень та визначення орієнтовних параметрів твердіючої закладки на основі хвостів ГМЗ для остаточних висновків був проведений промисловий експеримент з дотриманням натуральних умов (приготування твердіючої суміші на закладному комплексі, транспортування її в камери гідротранспортом, твердіння її у відпрацьованих камерах та інше). З урахуванням результатів проведених досліджень можна зробити висновок, що збільшення об'ємів використання хвостів має доволі непогані перспективи, проте на даний момент ця галузь залишається недовикористаною.

Що стосується інших компонентів, то вони є відходами гірничо-видобувного комплексу, наприклад, доменний шлак є відходом металургійної галузі, лігносульфонати – деревопереробної промисловості. Доломітовий пил, алюмокалієвий галун – продукти хімічної промисловості. Технічна вода використовується в якості розчинника.

Отже, головна задача полягає у виборі найкращого складу закладної

суміші, враховуючи наступні умови: міцність отриманої суміші має бути максимальною; вартість суміші не має перевищувати певного заданого значення; останні параметри (щільність, деформація, зчеплення, час початку твердіння) не мають виходити за межі варіювання, задані технологічними нормами.

Для того, щоб побудувати математичну модель позначимо через  $x_i$  частку  $i$ -го складового компонента суміші ( $i = 1, 7$ ),  $\varphi(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $\tau(x)$ ,  $\delta(x)$ ,  $\psi(x)$  – функції, які описують міцність, щільність, час початку твердіння, деформацію та зчеплення суміші відповідно,  $c_i$  – вартість однієї тонни  $i$ -го складового компонента суміші,  $b_{\min}, b_{\max}$ ,  $d_{\min}, d_{\max}$ ,  $f_{\min}, f_{\max}$ ,  $g_{\min}, g_{\max}$  – граничні показники щільності, часу початку твердіння, деформації та зчеплення відповідно,  $y$  – функція, що описує вартість закладної суміші.

Тоді загальна математична модель поставленої задачі може бути описана у вигляді:

$$\varphi(x) \rightarrow \max \quad (1)$$

$$b_{\min} \leq \theta(x) \leq b_{\max}, \quad (2)$$

$$d_{\min} \leq \tau(x) \leq d_{\max}, \quad (3)$$

$$f_{\min} \leq \delta(x) \leq f_{\max}, \quad (4)$$

$$g_{\min} \leq \psi(x) \leq g_{\max}, \quad (5)$$

$$y = \sum_{i=1}^7 c_i \cdot x_i \leq y_{\max}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 1, \quad (7)$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (8)$$

де (2) – (5) – обмеження на технологічні характеристики суміші,  $x_1$  – доломітовий пил,  $x_2$  – вода,  $x_3$  – алюмокалієвий галун,  $x_4$  – лігносульфонати,  $x_5$  – доменний шлак,  $x_6$  – ангідрид,  $x_7$  – хвости.

Для конкретизації моделі визначимо аналітичний вигляд функцій міцності, щільності, часу початку твердіння, деформації та зчеплення як множинну лінійну регресію від компонентів суміші, використовуючи майже 300 варіантів дослідних даних.

Для побудови цих залежностей скористаємося стандартною функцією MS Excel «Лінійн». Здійснивши перевірку значущості коефіцієнтів регресії за критерієм Стьюдента і видаливши незначущі змінні з рівнянь, отримуємо такий аналітичний вигляд функцій:

$$\varphi(x) = 47.31x_1 + 26.36x_2 + 93.76x_3 - 12.25x_6 + 33.41x_7,$$

$$\theta(x) = 2087.5x_1 + 1918.5x_2 + 2296.8x_3 + 1616.9x_4 + 1910.1x_5 + 2195.6x_6 + 2081.6x_7,$$

$$\tau(x) = 0.67x_2 - 0.55x_3 + 1.36x_4 + 0.54x_5 + 0.62x_6,$$

$$\delta(x) = 6.15x_2 - 7.75x_3 + 9.67x_4 + 6.23x_5,$$

$$\psi(x) = 0.45x_2 + 0.26x_5 + 1.48x_6.$$

Обчислюючи коефіцієнти детермінації отриманих регресійних моделей бачимо, що вони будуть не менш 0.964, отже модель враховує не менше 96,4% факторів, що впливають на наведені характеристики. Перевірку значимості рівнянь регресії зробимо на основі обчислення F-критерію Фішера:  $F_\varphi = 14590,12$ ;  $F_\theta = 24712,6$ ;  $F_\tau = 2979,6$ ;  $F_\delta = 1143,9$ ;  $F_\psi = 5903,6$ . Ці значення суттєво перевищують табличне значення  $F_{кр} = 3,68$ , отже отримані рівняння регресії на рівні значущості 0,05 варто визнати адекватними.

Зауважимо, що отримані значення коефіцієнтів регресії залежать від дослідних даних, і тому є наближеними.

Для ілюстрації цієї ідеї розглянемо залежність міцності суміші тільки від однієї незалежної змінної – доломітового пилу і побудуємо відповідну лінію регресії  $f_1$  та довірчий інтервал для неї –  $(f_{1(\min)}; f_{1(\max)})$ . Ясно, що окрім знайденого рівняння  $f_1$ , довірчий інтервал містить скільки завгодно рівнянь, що також є адекватними рівняннями регресії, які описують дану залежність (див. рис. 1).

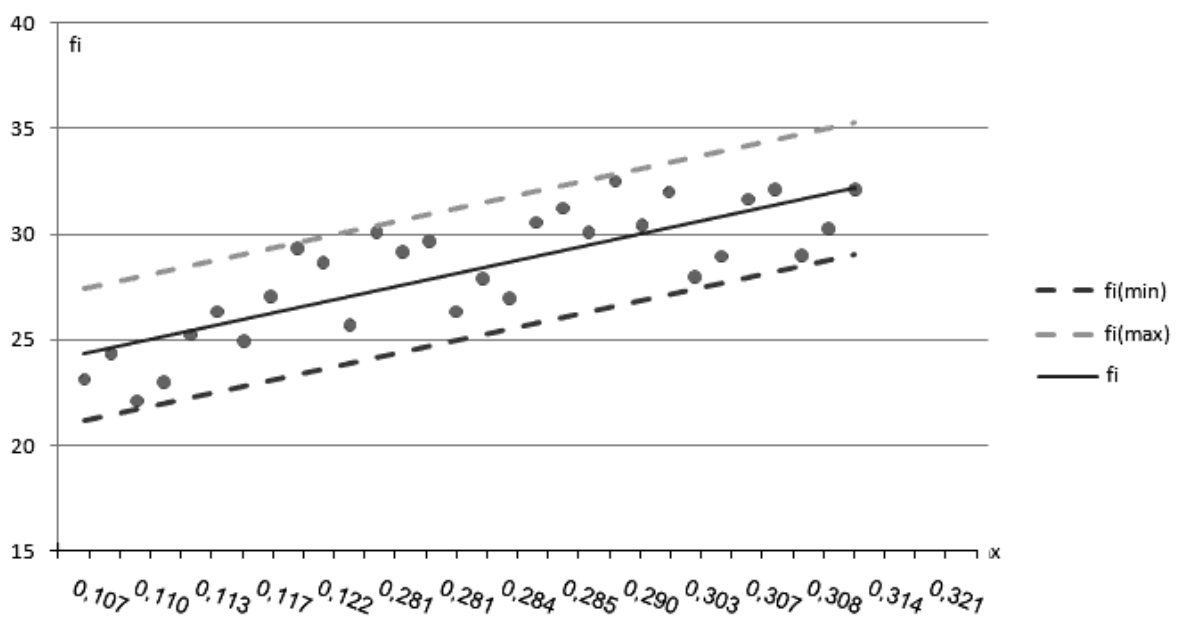


Рис. 1 – Графік залежності міцності суміші від вмісту доломітового пилу

Тому доцільно врахувати цей факт вже на етапі побудови математичної моделі, а саме, запишемо функцію міцності суміші у такому вигляді:

$$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7$$

де коефіцієнти  $a_i, i=1,2,\dots,7$  задано у вигляді довірчих інтервалів. Для їх знаходження розіб'ємо вихідний масив даних на десять рівних частин (по 30 значень у кожній) і для кожної окремої частини побудуємо рівняння регресії і обчислимо довірчі інтервали для цих коефіцієнтів.

$$45.49 \leq a_1 \leq 48.95$$

$$24.69 \leq a_2 \leq 28.24$$

$$91.48 \leq a_3 \leq 96.52$$

$$-20.18 \leq a_4 \leq -12.88$$

$$2.88 \leq a_5 \leq 5.17$$

$$-14.07 \leq a_6 \leq -10.81$$

$$27.58 \leq a_7 \leq 39.05$$

Тоді отримаємо наступну інтервальну модель:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 \rightarrow \max, \\ 2087,5x_1 + 1918,5x_2 + 2296,8x_3 + 1616,9x_4 + 1910,1x_5 + \\ + 2195,6x_6 + 2081,6x_7 \leq 2096, \end{aligned}$$

$$0,67x_2 - 0,55x_3 + 1,36x_4 + 0,54x_5 + 0,62x_6 \leq 0,5,$$

$$6,15x_2 - 7,75x_3 + 9,67x_4 + 6,23x_5 \leq 4,$$

$$0,45x_2 + 0,26x_5 + 1,48x_6 \leq 0,7,$$

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 1,$$

$$0 \leq x_i \leq 1, i=1,2,\dots,7,$$

де  $a_i$  – довірчі інтервали коефіцієнтів регресії, інші змінні мають той самий сенс, що в задачі (1) – (8).

Зрозуміло, що при такій постановці задачі, говорити про оптимізацію в звичайному сенсі не можна, оскільки значення цільового функціоналу також буде являти собою деякий інтервал. Тому ми будемо відшукати лише деяке

компромісне рішення задачі.

Розглянемо поставлену задачу як багатокритеріальну задачу із нескінченною множиною критеріїв.

Для її розв'язання скористаємось методом послідовної редукції [4]. Для цього визначимо функції  $\varphi(x)_{\min}$  та  $\varphi(x)_{\max}$ , шляхом звернення до двох крайніх цільових функцій, коефіцієнтами яких виступають граничні значення довірчого інтервалу. І розглянемо двокритеріальну задачу:

$$\begin{aligned}\varphi(x)_{\min} &= 45.49x_1 + 24.69x_2 + 91.48x_3 - 20.18x_4 + \\ &+ 2.88x_5 - 14.07x_6 + 27.58x_7 \rightarrow \max,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)_{\max} &= 48.95x_1 + 28.24x_2 + 96.52x_3 - 12.88x_4 + 5.17x_5 - \\ &- 10.81x_6 + 39.05x_7 \rightarrow \max,\end{aligned}$$

при таких обмеженнях:

$$\begin{aligned}2087,5x_1 + 1918,5x_2 + 2296,8x_3 + 1616,9x_4 + 1910,1x_5 + \\ + 2195,6x_6 + 2081,6x_7 \leq 2096,\end{aligned}$$

$$0,67x_2 - 0,55x_3 + 1,36x_4 + 0,54x_5 + 0,62x_6 \leq 0,5,$$

$$6,15x_2 - 7,75x_3 + 9,67x_4 + 6,23x_5 \leq 4,$$

$$0,45x_2 + 0,26x_5 + 1,48x_6 \leq 0,7,$$

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 1,$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Згідно з [5] компромісний розв'язок цієї задачі може бути знайдено шляхом вирішення такої задачі лінійного програмування :

$$\lambda \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}-4,81\lambda - (45,49x_1 + 24,69x_2 + 91,48x_3 - 20,18x_4 + \\ + 2,88x_5 - 14,07x_6 + 27,58x_7) \leq -23,51,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-4,91\lambda - (48,95x_1 + 28,24x_2 + 96,52x_3 - 12,88x_4 + 5,17x_5 - \\ - 10,81x_6 + 39,05x_7) \leq -30,24,\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,106 \leq x_1 \leq 0,326, \\ 0,127 \leq x_2 \leq 0,23, \\ 0,045 \leq x_3 \leq 0,154, \\ 0 \leq x_4 \leq 0,103, \\ 0 \leq x_5 \leq 0,472, \\ 0 \leq x_6 \leq 0,372, \\ 0 \leq x_7 \leq 0,124, \\ \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

Тут  $\lambda$  означає ступінь вдоволеності особи, що приймає рішення (ОПР) отриманим компромісним розв'язком задачі.

Результати розв'язання цієї задачі і відповідної задачі у чіткій постановці подано у таблиці 2. Їх порівняння дозволяє зробити наступні висновки.

**По-перше**, у випадку з чіткими даними вдалося досягти вищого показника міцності (35 МПа), ніж у випадку з нечіткими даними (26,94 МПа). Проте прямо пропорційно міцності зросла й вартість закладної суміші (21,46 грн/т в першому випадку, 19,29 грн/т – в другому).

Таблиця 2 – Порівняльна характеристика розв'язання чіткої і інтервальної задачі

Компоненти (масова частка)	Чітка модель		Інтервальна модель	
Доломітовий пил	0,326		0,326	
Вода	0,191		0,23	
Алюмокалієвий галун	0,115		-	
Лігносульфонати	-		-	
Доменний шлак	0,232		0,32	
Ангідрид	0,018		-	
Хвости	0,118		0,124	
Якісні характеристики	Міцність (МПа)	35	26,94	
	Щільність (кг/м <sup>3</sup> )	2039,55	1991,12	
	Час початку схоплювання (хв.)	12	20	
	Деформація (мм)	1,72	3,41	
	Зчеплення (МПа)	0,17	0,18	
	Вартість (грн./т)	21,46	19,29	

**По-друге**, використання інтервальної моделі дає змогу врахувати вплив зовнішніх факторів та ступінь вдоволеності ОПР ( $\lambda = 0,71$ ) отриманим розв'язком, що не можливо при вирішенні першого варіанту задачі. Слід також зазначити, що в результаті збільшення показника міцності спостерігається зростання щільності та вартості суміші й зменшення показників часу початку схоплювання та деформації і зчеплення.



**Висновки.** Використання математичного моделювання дозволило визначити оптимальний склад твердіючої суміші, який задовольняє обґрунтувати технологічні вимоги до складу суміші. При цьому досягнуто зниження собівартості суміші за рахунок збільшення вмісту доменного шлаку (на 60%) та доломітового пилу (на 65%), вартість яких відносно невелика. Проведені розрахунки показали, що витрати можуть бути знижені на 4,74 – 6,53 грн/т, тобто вартість закладної суміші зменшиться приблизно на 18%. Таким чином, проведення оптимізації складу суміші призвело до зниженню витрат при закладці виробленого простору шахт і покращення економічного стану підприємств.

Встановлено, що важливим фактором також є збільшення у суміші вмісту хвостів (приблизно на 63%), що дає можливість утилізувати відходи гірничо-видобувного комплексу зменшивши об'єми хвостосховищ які є радіоактивними та пило утворюючими, покращивши таким чином стан навколишнього природного середовища.

Зазначимо, що використання інтервальної моделі дає змогу врахувати статистичну похибку, яка виникає при обчисленні коефіцієнтів регресії. Це набуває особливої ваги у випадку, коли вихідний масив даних не дозволяє побудувати рівняння регресії з потрібною точністю. Застосування інтервальної моделі дозволяє визначити оптимальний склад суміші навіть при неточних даних.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бойцов, А.В. Минерально-сырьевая база и урановая промышленность мира / А.В. Бойцов, А.В. Тарханов // ВИМС «Минеральное сырье». – 2000. – №7. – С.38-48.
2. Бабак, С.И. Состояние и перспектива развития производства урана в Украине /С.И. Бабак //Атомна енергетика та промисловість України. – 1999. – №2. – С.11-13.
3. Монтянова, А.Н. Формирование закладочных массивов / Монтянова А.Н. – М.: Горная книга, 2005. – 147с.
4. Минько, А.А. Статистический анализ в Microsoft Excel / Минько А.А. – М.: Диалектика, 2004.– 504с.
5. Зайченко, Ю.П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация / Ю.П. Зайченко – К.: Вища школа, 1991. – 191с.