

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В КОНТЕКСТЕ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Розглядається механіка руйнування композитних матеріалів в контексті фрактального аналізу поверхні тріщин при циклічних навантаженнях зразків.

MECHANICS OF DESTRUCTION OF COMPOSIT MATERIALS IN A CONTEXT OF FRACTAL ANALYSIS

The mechanics of destruction of composit materials in a context of fractal analysis of cracks surface is considered at cyclic loading of samples.

1 Введение

Композитные материалы – пластики, резины, резиноподобные материалы – относятся к упруго-наследственным средам. Известно, что их разрушение представляет собой процесс множественного зарождения и развития микротрещин: в период рассеянного разрушения вплоть до появления макротрещин происходит зарождение, движение, рост и агрегация различного рода дефектов. Все это позволяет в качестве количественной меры накопления таких дефектов использовать функцию поврежденности, вид которой зависит от физико-механических характеристик материала, механизма разрушения, влияния внешней среды и т.д. При этом разрушение, безусловно, имеет вероятностную природу, а сам процесс накопления повреждений автомоделен, т.е. подобен самому себе. Поэтому вполне очевидно, что в последнее время в качестве математического аппарата стали использовать аппарат теории множеств дробной размерности – фракталов [1-3]. В рамках этой модели процесс накопления дефектов рассматривается как развитие самоподобного фрактального кластера, а начало его лавинообразного роста обычно интерпретируется как начало появления макротрещин.

Ниже рассматривается одна из важнейших сторон механики разрушения композитов – фрактальный анализ поверхности разрушения массивных резиновых образцов при их длительном циклическом нагружении. Использование фрактальной трактовки разрушения здесь вполне уместно по следующим причинам. Для резин при циклическом нагружении поверхность макротрещин имеет нерегулярную структуру с наличием различного рода неровностей [4, 5]. Важной особенностью такой поверхности является статическое самоподобие рельефа поверхности; при этом свойство самоподобия сохраняется на макро-, мезо- и микроуровнях. Все это позволяет моделировать такую нерегулярную структуру фрактальными поверхностями [1, 2, 6-13].

2 Фрактальный анализ поверхности циклического разрушения резин и резиноподобных материалов

Как известно, поведение таких материалов при циклическом нагружении описывается в рамках континуальной механики сплошных сред и термодинамики необратимых процессов. Эти классические подходы позволяют с достаточной точностью решать многие задачи, однако имеют и принципиальные недостатки: с их помощью нельзя описать соотношения между механическими свойствами резины и ее структурными характеристиками. В этом плане определенный интерес представляет использование методов фрактального анализа, которые в последнее время успешно используются для описания деформирования и разрушения самых различных материалов и систем.

Авторы не ставили своей целью дать фрактальный анализ механики циклического разрушения упруго-наследственных сред – это весьма сложная задача, требующая усилия многих ученых различной специальности. Изложенные ниже результаты исследований преследовали решение конкретной задачи: определить фрактальную размерность поверхности разрушения резины при ее длительном циклическом деформировании и показать, что материал в зоне магистральной трещины (т.е. в зоне интенсивной поврежденности) обладает нелинейными свойствами.

Следует подчеркнуть, что в известной литературе отсутствуют какие-либо сведения о фрактальной трактовке циклического разрушения резин. Поэтому авторы сочли уместным основному содержанию материала предпослать изложение основных положений фрактальной теории упругости твердых тел, акцентируя внимание на тех уже исследованных материалах (в основном полимерах, металлах и горных породах), свойства которых близки к механическим свойствам резин. Здесь необходимо отметить, что резина в силу специфики своего строения является не совсем удобным материалом для фрактального анализа; возможно, это и является одной из причин отсутствия публикаций в периодической доступной литературе.

Изложим накопленную экспериментальную информацию в рассматриваемом контексте в виде кратких эмпирических обобщений.

1. Наблюдаемая экспериментально кинетика разрушения твердых тел обусловила важное эмпирическое обобщение: макроразрушению материала можно рассматривать как процесс множественного микроразрушения; возникновению магистральной трещины предшествует длительный период накопления повреждаемости. В резинах это особенно хорошо проявляется при длительных (нескольких лет) циклических нагрузках [4]. В течение этого периода происходит вероятностный процесс зарождения, движения, роста и агрегации микродефектов самого различного вида: пор, субмикротрещин, микротрещин и т.д. При этом, как было отмечено в [14-

19], процесс развития микродефектов автомоделен, т.е. подобен самому себе: в процессе разрушения изменяются лишь размерные параметры, а безразмерные характеристики микродефектов, например, форма кривой распределения их числа по размерам, остаются без изменений. Фрактограммы поверхности разрушения резин, показанные на рис. 1 (см. также в [4]) подтверждают локальную автомодельность на микро- и макроуровнях.

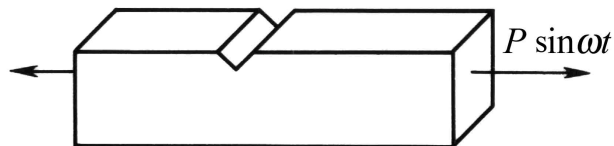
Таким образом, в процессе разрушения каскад микродефектов растет как самоподобный кластер. Наблюдаемый в резине в реальных условиях фрактальный кластер отражает динамику процесса разрушения, создан по случайному закону и на первый взгляд имеет совершенно неупорядоченную структуру. Тем не менее, исследования показывают, что кластер обладает строгой иерархией структуры и имеет внутренний порядок, являющийся фрактальной размерностью кластера.

2. Авторы работы [3, 20] считают, что полимерную сетку можно рассматривать как автомодельный протекаемый (перколяционный) фрактал, а ее разрушение можно представить в виде кинетического процесса, прорастающего из одной точки. При этом если фрактальная размерность отдельной полимерной цепи $d_f = 2$, то размерность полимера может иметь и дробное значение, лежащее в пределах $2 \leq d_f \leq 3$.

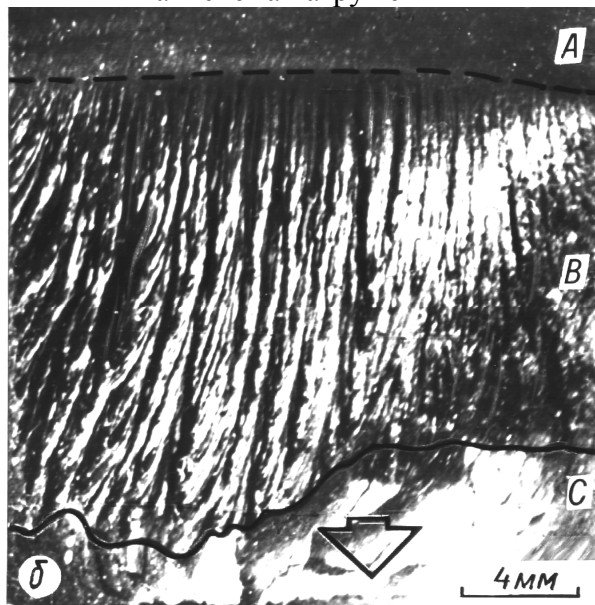
3. По аналогии с классической теорией упругости был предложен вариант теории упругости фракталов; в основе его лежат два экспериментально установленных закона [21-23]: закон Гука, постулирующий пропорциональность относительной деформации ε твердого тела действующему напряжению, и закон Пуассона, согласно которому существует эффект поперечных деформаций $\varepsilon_{\perp} = \nu \varepsilon_{\parallel}$ при отсутствии соответствующих напряжений (ν – коэффициент Пуассона).

В этом случае справедливы два утверждения.

Во-первых, упругая деформация фрактала под действием внешней силы F , отнесенной к единичному сечению, приводит к появлению



а – схема нагружения



б – фрактограмма поверхности усталостного разрушения

Рис. 1 – Усталостные бороздки на поверхности разрушения

нию единицы нового характерного масштаба длины L_F

$$F = \frac{\partial u}{\partial L_F} - T \frac{\partial S}{\partial L_F}, \quad (1)$$

где первый член обусловлен энергетической составляющей упругости фрактала, а второй – энтропийной (u – энергия, S – энтропия, T – температура).

Во-вторых, при упругой деформации фрактала самоподобие структурных изменений (развитие каскада повреждений) сохраняется, т.е. $d_f = \text{const}$.

Таким образом, коэффициент поперечной деформации фрактала однозначно определяется его размерностью d_f и размерностью объемлющего его пространства d . При $d = 3$

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1 \quad \text{или} \quad d_f = (d-1)(1+\nu). \quad (2)$$

На основе этих предположений были получены выражения, связывающие параметры упругости твердого тела [21, 23].

$$G = \frac{d-1}{2d_f} E, \quad B = \frac{E}{d(d-d_f)},$$

где G, E, B – соответственно модули сдвига, упругости и объемной упругости.

При $d = 3$ $G = E/d_f$.

Как известно, реальная поверхность разрушения резин имеет шероховатую, нерегулярную структуру, отражающую динамику процесса разрушения [4]. При этом несмотря на кажущуюся хаотичность, поверхность разрушения резины обладает свойствами самоподобия на микро- и макроуровнях. Если площадь S такой самоподобной (автомодельной) поверхности покрыть квадратами со стороной R_0 , то она будет пропорциональна

$$S = (R/R_0)^{d_f-2}, \quad (3)$$

где d_f – фрактальная размерность Хаусдорфа – Бесиковича.

Для гладких поверхностей разрушения (в резине они при циклическом разрушении не наблюдаются) $d_f = d - 1$ и при $d = 3$ (евклидово пространство) $d_f = 2$.

Как отмечалось выше, методы фрактального анализа позволяют получить обобщенные соотношения между механическими характеристиками резины и параметрами ее структуры. Испытываемые резиновые образцы имели евклидову размерность $d = 3$; их фрактальная размерность изменялась в пределах $2 \leq d_f \leq 3$. Установлено, что именно дробная часть d_f отражает отклонение структуры реального тела от классического евклидова тела, а величина фрактальной размерности поверхности разрушения d_p показывает отличие реальной поверхности разрушения ($d_p > 2$) от идеали-

зированной линейной. Если в линейной механике разрушения размерность плоскости принята $d_p = 2$, то в реальных поверхностях разрушения всегда $d_p > 2$.

Для композитных материалов с квазивязким разрушением получено выражение, связывающее фрактальную размерность с коэффициентом Пуассона [23]

$$d_p = \frac{2(1+4\nu)}{1+2\nu}.$$

При $\nu = 0,5$ величина $d_p = 2$ соответствует гладкой поверхности (линейный процесс разрушения).

Коэффициент Пуассона может быть определен при испытании образцов на объемное сжатие [4]. В этом случае можно использовать выражение вида [3]

$$\frac{\sigma_e}{E} = \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)},$$

где σ_e – предел вынужденной эластичности.

Полученная при фрактографической оценке поверхность разрушения образца (рис. 1) соответствовала времени нагружения $t = 31350$ часов и отмечалась полосчатостью, т.е. чередованием усталостных бороздок в виде темных и светлых зон.

Для фрактального анализа поверхности разрушения воспользуемся экспериментальным приемом Б. Мандельброта. Мандельброт Б. исследовал поверхность разлома металлов; по его мнению, такая поверхность разрушения является поверхностью с локальной фрактальной размерностью, она обладает самоподобием и для нее можно использовать соотношения периметра и площади в виде

$$L(\delta) \sim [S(\delta)]^{\frac{d_p}{2}}$$

или

$$d_p = 2 \lg L(\delta) / \lg S(\delta),$$

где $d_p = d - 1$ (здесь, как и выше, d_p – фрактальная размерность поверхности разрушения); L – длина «береговой линии» шероховатой или светлой зоны на фрактограмме; S – площадь этих зон; δ – шаг измерения или так называемый «этalon».

На рис. 2 показано соотношение периметра и площади шерохо-

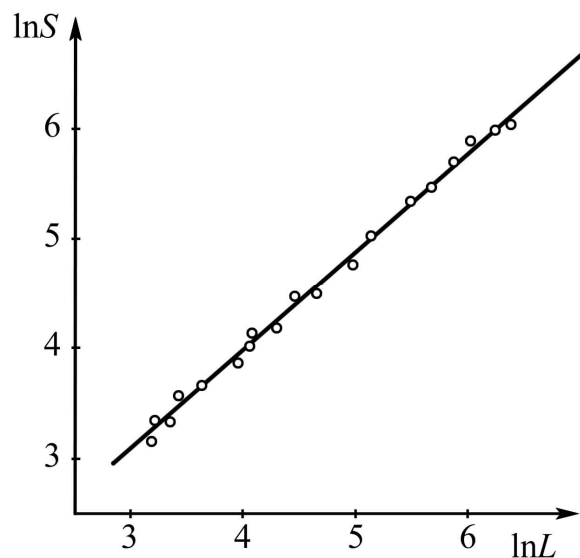


Рис. 2 – Зависимость $\ln S \sim \ln L$ для резины 51-1562

ватых зон; длина «береговой линии» (периметр) и площадь измерялись с помощью эталона длины $\delta = 1$ мм при десятикратном увеличении. проксимация зависимости $L \sim S^{\frac{d_p}{2}}$ дает фрактальную размерность $d_p = 1,94$; из этого следует, что в диапазоне исследуемых масштабов поверхность разрушения имеет размерность $d_f = 2,94$.

Представляет определенный интерес использовать полученные результаты для определения коэффициента Пуассона

$$\nu = \frac{d_f}{d-1} - 1 = \frac{2,94}{3-1} - 1 = 0,470.$$

При независимых экспериментальных исследованиях (объемное сжатие цилиндрического образца диаметром 20 мм и высотой 15 мм из резины с наработкой $t = 31350$ часов) получена величина $\nu = 0,467$, которая находится в хорошем согласии с этой величиной.

Для неразрушенной резины при $t = 0$ было получено значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,499$ и, следовательно, фрактальная размерность образца $d_f = 2,998$.

Как видно, метод фрактальной оценки поверхности разрушения позволяет определить макроструктурные характеристики резины по значениям микроструктурных параметров материала без каких-либо подгоночных коэффициентов. Результаты исследований свидетельствует о том, что процесс разрушения резины является нелинейным; по-видимому, в локальных зонах, т.е. в зонах интенсивного разрушения материала (в данной работе их можно отождествлять с магистральными трещинами) нелинейность процесса будет больше, чем в среднем по образцу.

3 Синергетическая модель фрактальной трещины

Математическая модель. Необходимость в учете структуры реальных объектов противоречит традиционной для механики сплошной среды операции определения единичного элемента объема. Как правило, при создании математической модели процесса разрушения, среда, содержащая трещиноподобные дефекты, ассоциируется с трехмерным евклидовым пространством, что делает практически невозможным учесть при этом структурные микродефекты материала. Математические исследования структуры пространства, ассоциируемого с разрушением, начали проводиться еще в 50-е годы [24-26] прошлого века, при этом уже тогда было показано [27], что внутренняя метрика идеального тела не совпадает с метрикой реального материала. Согласно И.А. Миклашевичу [28], пространство, ассоциируемое с разрушением – «пространство различной геометрической структуры».

Следует отметить, что идеальным самоподобием обладают лишь математические фракталы, реальные же фракталы в большинстве случаев

самоподобны лишь в статистическом смысле, т.е. при увеличении малого фрагмента особенности строения крупного объекта воспроизводятся лишь в среднем, поэтому математический фрактал можно рассматривать лишь как аппроксимацию реального процесса разрушения (формирующейся трещины).

Таким образом, фрактальные объекты обладают важным свойством для механики трещин, а именно свойством самоподобия. Уже не раз было отмечено, что фрактальные объекты имеют дробную размерность, и связь этой размерности с самоподобием состоит именно в том, что с помощью самоподобия можно сконструировать множество дробной размерности наиболее простым образом. По определению, преобразование подобия метрического пространства – это отображение пространства на само себя, при котором все расстояния между точками изменяются в одном и том же отношении. Кроме того, самоподобные объекты инвариантны по отношению к аффинному преобразованию:

$$x_i \rightarrow \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

причем преобразование имеет групповую структуру, действующую на каждую из величин λ_i таким образом, что λ_i должно быть функцией от одной из величин набора λ_1 :

$$\lambda_i = \lambda_1^{\xi_i}.$$

Величины ξ_i характеризуют скейленговые свойства самоподобного объекта, которые еще называют показателями шероховатости.

С другой стороны, под шероховатостью поверхности разрушения понимают максимальный размах профиля трещины, который на практике может быть определен различными экспериментальными методами. Известно, что между высотой профиля поверхности трещины z и текущей позицией измерения R выявлена пропорциональность:

$$z \sim R^\xi.$$

Таким образом, показатель степени ξ по физическому смыслу совпадает с показателем шероховатости для самоподобных процессов на определенном масштабном уровне.

В 1939 году, еще до открытия самоподобного характера процесса разрушения, В. Вейбуллом [29] для аппроксимации экспериментальных данных по прочности стали на разрыв была введена функция:

$$F_\omega(t, \xi, \beta, \mu) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t-\mu}{\beta}\right)^\xi}, & t > \mu; \\ 0, & t \leq \mu, \end{cases}$$

где ξ – параметр формы распределения;

β – параметр масштаба;

μ – параметр сдвига.

Случаи $\xi = 1$ и $\xi = 2$ описывают экспоненциальное и Рэлеевское распределения соответственно. Анализируя вид функции, в очередной раз отметим функциональную зависимость формы поверхности разрушения от показателя шероховатости.

Таким образом, наиболее близкой математической моделью реальной шероховатой трещины в твердом теле является математический фрактальный объект. Фрактальная размерность модели должна фигурировать как скейлинговый показатель при описании фрактальных свойств разрушения. Отметим важное обстоятельство: фрактальные свойства разрушения проявляются по-разному. С одной стороны, свойствами фракталов обладают непосредственно измеримые величины, независимые и не зависящие от наблюдателя, такие как длина трещины, профиль поверхности. С другой – это фрактальное распределение характеристик, связанных с разрушением, например, тензора трещиноватости. В этом случае фрактальные свойства лишь интерпретация наблюдателем объектов и отражают как свойства объекта, так и наблюдателя. Поэтому, большинство экспериментальных и теоретических исследований, включая данную работу, посвящено определению фрактальных характеристик именно первого рода.

Размерность фрактала должна соответствовать степени шероховатости (изрезанности) профиля реальной трещины и находится в интервале от 1 до 2. Сечение формирующейся поверхности разрушения целесообразно моделировать фрактальным объектом размерности от 0 до 1. Случай, когда фрактальная размерность равна 1 соответствует появлению в теле абсолютно гладкой трещины, равенство нулю – идеально сплошная, бездефектная среда, что в обоих случаях практически невозможно для реальных материалов.

Синергетическая модель. Рассматривая эмпирические обобщения, и принимая в качестве математической модели реальной трещины фрактальный объект можно сделать следующий вывод. Если предположить, что на микроуровне реальная трещина моделируется фрактальной кривой, которая на макроуровне будет иметь вид гладкой кривой, то появится возможность рассматривать такую модель в рамках линейной механики разрушения, при этом фрактальные особенности микроуровня можно учитывать в виде скейлингового показателя при получении оценок прочностных характеристик.

Таким образом, физическую модель реальной трещины в твердом теле можно представить следующим образом: на микроуровне трещина имеет вид фрактальной кривой, на макроуровне – обычная гладкая трещина, имеющая кроме основного макропараметра – топологической длины, дополнительный – фрактальную размерность микроструктуры.

Выбирая фрактальный объект в качестве геометрической модели реальной трещины на микроуровне, мы сталкиваемся с достаточно серьез-

ной проблемой. Для описания профиля уже образовавшейся трещины следует выбирать фрактальный объект, размерности $1 < \alpha < 2$, который, очевидно, описывается непрерывной, но при этом не дифференцируемой в каждой точке функцией. Частично эту проблему будем решать, вводя на фрактальных разрезах, которые будем рассматривать в качестве моделей реальных трещин на микроуровне, меры дробного порядка, используя при этом математическое определение меры Хаусдорфа и дробное интегродифференциальное исчисление. Следует отметить, что методика приложения дробного исчисления к описанию фрактальных особенностей была опробована [11, 12, 30-36] при решении задач электростатики, магнитостатики, электродинамики на фрактальных контурах и поверхностях, при этом была отмечена высокая эффективность фрактального моделирования в вопросах согласования теоретических и экспериментальных данных. Наличие равномерной меры, с одной стороны, позволит применять интегрирование, но математического аппарата интегрирования (и дифференцирования) целого порядка становится недостаточно, так как с его помощью достаточно сложно описать структуры с размерностью дробного порядка. Для этой цели обратимся к дифференциальному аппарату дробного исчисления [36], с помощью которого появляется возможность осуществить фрактальный подход к решению задач механики разрушения. Рассмотрим, необходимые для дальнейшего изложения, определения дробных интегралов и производных.

Для n – кратного интеграла известна формула [36]

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt,$$

доказательство которой легко провести методом математической индукции. Учитывая, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части последнего выражения можно придать смысл и при нецелых значениях n . Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Пусть $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, интегралы

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, & x > a; \\ (I_{b-}^\alpha \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, & x < b, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha > 0$, называются интегралами дробного порядка α (дробными интегралами Римана-Лиувилля). Первый из них – правосторонний, второй – левосторонний.

Универсальным элементом покрытия для фрактальных кривых может служить α -мерный шар [29] с объемом, определяемым как α -мерная мера Хаусдорфа (t – диаметр шара)

$$h(t) = \gamma(\alpha)t^\alpha, \text{ где } \gamma(\alpha) = \frac{\Gamma^\alpha(1/2)}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)}, \quad 2 < \alpha < 3. \quad (5)$$

Выражение (5) при $1 < \alpha < 2$ можно рассматривать как α -мерную площадь сечения шара, а для $0 < \alpha < 1$ – как α -мерную длину диаметра.

С другой стороны, α -мерную меру можно получить обычным интегрированием $(\alpha-1)$ -меры

$$h(t) = \alpha \gamma(\alpha) \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

С учетом выражения (4), меру Хаусдорфа можно записать в виде

$$\begin{aligned} h(t) &= \alpha \Gamma(\alpha) \gamma(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\mu(\alpha)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = I_{0+}^\alpha(\mu(\alpha)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $I_{0+}^\alpha(\mu(\alpha))$ – интеграл дробного порядка α от функции $\mu(\alpha) = \alpha \Gamma(\alpha) \gamma(\alpha)$.

Из выражения (6) следует, что α -мерная мера Хаусдорфа геометрического фрактального объекта может строиться с использованием операции дробного интегрирования $(\alpha-1)$ -меры. Скейлинговый показатель α характеризует локальные свойства измеряемого фрактального множества.

Геометрически выражение (6) можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим участок $(0, t)$ вдоль оси Ox некоторого плоского фрактального контура размерности α . «Длине» фрактального участка на интервале $(0, t)$ ставится в соответствие площадь криволинейной трапеции образованной функцией $\frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}$, другими словами, происходит некото-

рое «сглаживание» шероховатого участка рассматриваемого контура (рис. 3).

Таким образом, после «сглаживания» участок $(0, t)$ на макроуровне имеет вид гладкой кривой, что делает возможным использование фрактальной модели реальной трещины к описанию процесса разрушения в рамках линейной механики.

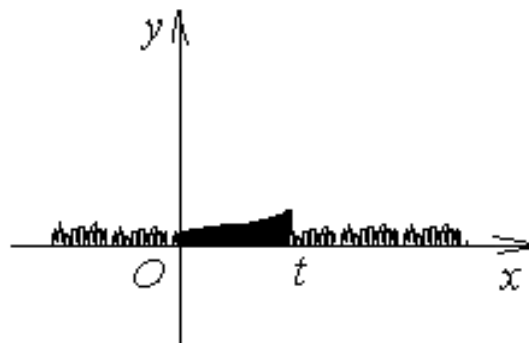


Рис. 3 – «Сглаживание» участка фрактального контура

Поскольку предложенный фрактальный подход основан на построении «сглаживающей» энтропийной меры, его применение к решению задач механики разрушения твердых тел позволит рассматривать фрактальные трещины как структуру, вложенную в евклидово пространство и, таким образом, не придется определять расстояния между точками в пространстве, в котором формируется реальная трещина, а также не придется вводить специальную метрику. «Сглаживание» фрактальной шероховатости трещины на микроуровне позволит по-прежнему на макроуровне рассматривать ее как одномерную гладкую трещину и таким образом появляется возможность расширить область применения линейной механики на трещины, приближенные к реальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фракталы в геомеханике. – К.: Наук. думка, 2005. – 358 с.
2. Фракталы в геомеханике / Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Привалов В.А., Панова Е.А. – Киев: Наук. думка, 2007. – 389 с.
3. Булат А.Ф., Дырда В.И. Фрактальная природа разрушения эластомеров при длительном циклическом нагружении // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Авантаж, 2003. – Вып. 45. – С. 3-22.
4. Сандитов Д.С., Бартенев Г.М. Физические свойства неупорядоченных структур. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1982. – 256 с.
5. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. – Киев: Наук. думка, 1988. – 232 с.
6. Щелокова М.А., Коротунова Е.В., Мастиновский Ю.В. Фрактальный подход к решению задачи о накоплении повреждений // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2005. – №2. – С. 80-83.
7. Щелокова М.А. Фрактальное обобщение уравнения Гриффитса // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2004. – №2. – С. 86-89.
8. Щелокова М.А. Приложение фрактальной геометрии к описанию механизма разрушения // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет, 2004. – Вип. 8. – С. 137-144.
9. Щелокова М.А. Исследование фрактальных особенностей вершины трещиноподобного дефекта конструкции // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет, 2003. – Вип. 7. – С. 134-141.
10. Щелокова М.А., Мастиновский Ю.В., Коротунова Е.В. Фрактальный подход к решению задачи о луночном вырезе // Труды XII междунар. конф. «Машиностроение и техносфера XXI века». – Донецк: ДонНТУ, 2005. – Т. 4. – С. 114-119.
11. Щелокова М.А., Мастиновский Ю.В. Зависимость КИН от фрактальной размерности трещины // Матеріали Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпропетровськ, 2005. – С. 35-37.
12. Онуфриенко В.М., Щелокова М.А. Дифференциальная модель решений краевых задач с фрактальными особенностями // Материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. «Прикладные задачи математики и механики». – Севастополь: СевНТУ, 2002. – С. 195-197.
13. Щелокова М.А. Геометрические особенности профиля вершины щели // Материалы междунар. науч.-метод. конф. «Проблемы математического моделирования». – Днепропетровск: ДГТУ, 2003. – С. 53-54.

14. Дырда В.И. Связь между прочностью и диссипацией энергии при циклическом разрушении конструкций / Ин-т геотехн. механики АН УССР. – Днепропетровск, 1976. – 18 с. – Деп. в ВИНТИ № 3801-76.
15. Мосолов А.Б., Динариев О.Ю. Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения // Проблемы прочности. – 1988. – № 1. – С. 3-7.
16. Баренблатт Г.И., Ботвина Л.Р. Автомодельность усталостного разрушения. Накопление повреждаемости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 161-165.
17. Ботвина Л.Р., Баренблатт Г.И. Автомодельность накопления повреждаемости // Проблемы прочности. – 1985. – № 12. – С.17-24.
18. Баренблатт Г.И., Ботвина Л.Р. Методы подобия в механике и физике разрушения // Физ.- хим. механика материалов. – 1986. – № 1. – С. 57-62.
19. Неймарк О.Б., Давыдова В.В. О статистической термодинамике твердых тел с микро-трещинами и автомодельность усталостного разрушения // Проблемы прочности. – 1986. – № 1. – С. 91-95.
20. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 456 с.
21. Челидзе Т.Л. Методы теории перколяции в механике разрушения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 6. – С. 114-123.
22. Баланкин А.С. Синергетика деформируемого тела. – М., 1991. – Т. 4. – 368 с.
23. Баланкин А.С. Упругие свойства фракталов, эффект поперечных деформаций и динамика свободного разрушения твердых тел // Доклады АН СССР. – 1991. – Том 319, № 5. – С. 1098-1101.
24. Каштанов А.В., Петров Ю.В. Фрактальное обобщение энергетического баланса в линейной механике разрушения. – СПб., 2001. – 51 с.
25. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Мир, 1964. – 472 с.
26. Noll W. Matherial uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – Vol. 27, No. 1. – Pp. 1-32.
27. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. – Berlin-Heidelberg-NY.: Springer, 1965. – Vol.3/3 of Encyclopedia of Physics.
28. Миклашевич И.А. Микромеханика разрушения в обобщенных пространствах. – Минск: Логвинов, 2003. – 194 с.
29. Weibull W.H. A Statistical theory of the strength of Materials. – Stockholm: Generalstabens Litografiska Anstalts Forlag, 1939. – 151 p.
30. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948.
31. Onufriyenko V.M., Schelokova M.A., Lewykin V.N. The differ-integral properties of contours and surfaces in millimeter-wave band // Symposium Proceedings MSMW 2001. – Kharkov (Ukraine), 2001. – Vol. 1. – Pp. 271-273.
32. Левыкин В.Н., Щелокова М.А., Онуфриенко В.М. Моделирование поля намагниченного фрактального тела // Материалы 5-го Междунар. фор. “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке”. – Ч. 2. – Харьков: ХТУРЭ, 2001. – С. 104-105.
33. Онуфрієнко В.М., Левикін В.М., Слюсарова Т.І., Щолокова М.О. Локальні властивості електромагнітного поля фрактального вібратора // Вісник національного університету “Львівська Політехніка”. – 2002. – №440. – С. 132-138.
34. Онуфриенко В.М., Пухальская Г.В. Фрактальная модель механического упрочнения поверхностного слоя // Вестник двигателестроения. – 2004. – №4. – С. 49-53.
35. Онуфрієнко В.М., Щолокова М.О. Інтегральне рівняння Абеля в крайових задачах на контурах з фрактальними особливостями // Матеріали ІХ-ої Міжнар. конф. ім. Академіка М. Кравчука. – К.: НТУУ “КПІ”, 2002. – С. 339.
36. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 197 с.