**УДК 519.65.652**

**Р.Н. КВЄТНИЙ, В.Ю. ДЕМЕНТЬЄВ**

# МОДИФІКОВАНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СПЛАЙНИ

***Вінницький національний технічний університет,***
***вул. Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна,***
***тел..: +38-096-45-98-112, E-mail: vic_dem@list.ru***

**Анотація.** Пропонуються модифіковані тригонометричні сплайни, що мають точніші результати інтерполювання в порівнянні з існуючими аналогічними методами. Вказано методи розрахунку невідомих коефіцієнтів для запропонованих сплайнів. Визначено переваги та області практичного застосування запропонованого методу інтерполяції.

**Abstract:** This paper proposed modified trigonometric splines, which has more accurate interpolation results compared with existing methods. Here defines methods of calculating unknown coefficients for the proposed splines. The benefits and key areas of deployment of trigonometric interpolation method are defined.

**Аннотация:** Предлагаются модифицированные тригонометрические сплайны, имеющих более точные результаты интерполяции по сравнению с существующими аналогами. Указаны методы расчета неизвестных коэффициентов для предложенных сплайнов. Определены преимущества и области практического применения предложенного метода интерполяции.

**Ключові слова:** інтерполяція, тригонометрична інтерполяція, сплайн.

## ВСТУП

Значний розвиток апаратного забезпечення в сучасному технологічному та інформаційному світі вимагає створення та впровадження нових та ефективних методів та моделей оброки і представлення даних. Це стосується майже всіх галузей сучасної науки. В цій роботі пропонується новий метод обробки дискретний даних, застосування якого для окремого типу практичних задачах дозволить отримати точніші результати в порівнянні з аналогічними методами.

Персональний комп'ютер міцно ввійшов до щоденного життя як обов'язковий пристрій введення, виведення, зберігання та швидкої обробки інформації. Одним з найбільш поширених типів інформації є зображення (як двовимірні, так і тривимірні). Існує велика кількість операцій над зображенням, які за своєю сутністю зводяться до обробки дискретних даних. Наприклад – збільшення, поворот, побудова ліній, площин та ін. До обробки дискретних даних також зводяться задачі розрахунку витрати рідин, газів; стискання інформації; моделювання динамічних середовищ.

В роботі розглядається один з методів обробки дискретних даних – інтерполяція тригонометричними сплайнами. Інтерполяція – процес розрахунку проміжних значень невідомої функції, яка задана сіткою дискретних значень. Інтерполяція спаланами – один з методів інтерполяції, який полягає в представленні невідомої функції між сусідніми точками дискретної сітки поліномом цілого степеня.

## ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ АНАЛОГІВ МЕТОДУ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ.

Ідея створення модифікованих тригонометричних сплайнів полягає у переході від поліноміальної форми запису сплайну до тригонометричної. В публікаціях, що пов'язані з інтерполюванням, досить часто використовуються тригонометричні функції для запису сплайнів. Проаналізуємо найбільш цікаві та помітні з них.

Один з найбільш поширених методів тригонометричної інтерполяції є застосування розкладу функції в ряд Фур'є [1]. Періодична функція $f(t) = f(t+T), \forall t \in (-\infty;\infty)$ використовуючи ряд Фур'є запишеться

$$f(t) \approx p_n(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos(j \cdot t) + b_j \sin(j \cdot t)), \; |a_n| + |b_n| \neq 0, \qquad (1)$$

де $n$ – кількість врахованих у ряді Фур'є доданків для інтерполяційної формули сплайну, $T$ – період. Нехай період функції $T = 2\pi$ (обране значення легко змінюється через введення додаткового коефіцієнта). Тоді для опису всієї інтерполяційної функції достатньо задати сітку точок

$$f(t_i) = p_n(t_i);\ i = 0, 1, 2, \ldots, 2n;\ 0 \le t_0 \le t_1 \le t_2 \ldots \le t_{2n} \le 2\pi. \qquad (2)$$

Використовуючи згадані вище початкові дані значення невідомих коефіцієнтів $a_j$ та $b_j$ розраховують за формулами

$$a_j = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(t_k)\cos(j \cdot t_k);\ b_j = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(t_k)\sin(j \cdot t_k). \qquad (3)$$

Основна область застосування тригонометричних сплайнів на основі ряду Фур'є – це періодичні функції. Використання цього методу інтерполяції для псевдо або не періодичних функцій не доцільно через низьку точність результатів в порівнянні із застосуванням кубічних чи ермітових сплайнів.

Інший цікавий запис інтерполяції сплайнами з використанням тригонометричних функцій представлено в [2].

$$S_i(t) = y_i\left[1 - \frac{1-\cos(\pi \cdot t)}{2}\right] + y_{i+1}\left[\frac{1-\cos(\pi \cdot t)}{2}\right],\ t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, t \in [0;1]. \qquad (4)$$

$S_i(t)$ – інтерполяційний поліном представлення функції на проміжку $[x_i; x_{i+1}]$; $t$ – додаткова нормована змінна.

Хоча наведена форма запису є дуже простою, вона містить серйозний недолік – значення першої похідної інтерполюючої функції біля точок основної сітки рівні нулю. Такий ґандж суттєво обмежує застосування цієї тригонометричної форми запису сплайну в практичних задачах.

В статті [3] Роберт Кауфман (Robert F. Kauffmann) пропонує розраховувати тригонометричний сплайн на основі чотирьох базових точок. Тригонометричний сплайн Роберта Кауфмана в матричній формі запишеться як

$$F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) - 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \cos(\pi \cdot t/2)(\cos(\pi \cdot t/2) + 1) \\ \sin(\pi \cdot t/2)(\sin(\pi \cdot t/2) - 1) \end{bmatrix}; P_x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ x_{i+3} \end{bmatrix}; P_y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \\ y_{i+3} \end{bmatrix}; t \in [0;1]; \qquad (5)$$

$$S_x(t) = P_x^T \cdot F;\ S_y(t) = P_y^T \cdot F.$$

У розрахунках вводиться та використовується штучна змінна $t \in [0;1]$. Крім розрахунку значення інтерполяційної функції $S_y(t)$, також розраховується значення аргументу $S_x(t)$ на основі чотирьох точок сітки заданих значень $P_x$ та $P_y$.

Цей тип сплайнової інтерполяції найкраще застосовувати при побудові кола чи інших конічних фігур. Недоліками сплайну є гірші, в порівнянні з кубічними чи ермітовими сплайнами, інтерполяційні характеристики; складність розрахунку значення інтерполюючої функції в заданій точці; неможливість виконати інтерполювання на першому та останньому інтервалах сітки заданих значень.

У статті [4] пропонується інтерполяція з використанням модифікованих ермітових сплайнів. В роботі поліном ермітового сплайна на кожному відрізку інтерполяції пропонується замінити на емпірично виведені тригонометричні вирази (таблиця 1).

$$S_i(t) = f1(t) \cdot y_i + f2(t) \cdot y_i' + f3(t) \cdot y_{i+1} + f4(t) \cdot y_{i+1}'. \qquad (6)$$

Наведений варіант тригонометричного сплайна дозволяє для окремих псевдоперіодичних функцій точніше побудувати інтерполяційну функцію в порівнянні з кубічними сплайнами Ерміта та задати крайові початкові умови значеннями похідних високих порядків. Недоліками цього методу є емпіричне виведення виразів базових функцій та неможливість застосовування таких сплайнів у загальних практичних задачах.

Таблиця 1.

Порівняння виразів базових функцій Ермітових та тригонометричних сплайнів

| Оригінальні базові функції кубічного сплайну Ерміта | Запропоновані тригонометричні вирази для базових функцій |
|---|---|
| $f1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1;$<br>$f2(t) = t^3 - 2t^2 + t;$<br>$f3(t) = -2t^3 + 3t^2;$<br>$f4(t) = t^3 - t^2;$<br>$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i};\ t \in [0,1].$ | $f1(t) = \cos(t)^2;$<br>$f2(t) = \sin(t)^2;$<br>$f3(t) = 0.096225(\sin(3t) + \sin(t));$<br>$f4(t) = 0.096225(\cos(3t) - \cos(t));$<br>$t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\frac{\pi}{2};\ t \in [0, \frac{\pi}{2}].$ |

Проведений огляд розроблених моделей тригонометричних сплайнів розкриває їх загальні недоліки – вузьку спеціалізацію методів та в деяких випадках складність алгоритмізації.

Тому основна задача даного дослідження – удосконалення процесу інтерполяції сплайнами, критерії досягнення якого полягають в підвищенні точності та швидкості отримання результатів.

Основна мета дослідження – розробка нової моделі інтерполяції тригонометричними сплайнами, яка дозволить отримати точніший результат в порівнянні з аналогами для окремого класу задач і не потребує при цьому ускладнення обчислень.

## МОДЕЛЬ МОДИФІКОВАНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

Нехай відомі значення функції $f(x)$ в заданих точках $f(x_i) = y_i,\ i = \overline{1,n},$ $A = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = B$ та значення перших похідних в крайніх точках $f'(x_1) = R_1,\ f'(x_n) = R_n$. Для побудови модифікованого тригонометричного сплайну візьмемо вираз

$$S(t) = a + bt + c \cdot \cos(t) + d \cdot \sin(t),\ t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},\ t \in [0; \pi/2]. \quad (7)$$

Змінна $x$ між точками інтерполяційної сітки $[x_i; x_{i+1}]$ нормуються до змінної $t$. Знайдемо невідомі коефіцієнти $a, b, c, d$, виразивши їх через значення функцій та її похідних $R_i$ та $R_{i+1}$ в точках інтервалу інтерполяції $x_i$ та $x_{i+1}$ (рис. 1).

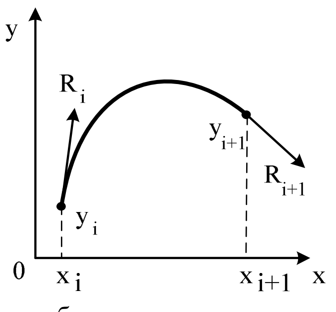


Рис. 1. Модель побудови тригонометричного сплайну

Розрахуємо $S(t)$ та $S'(t) = b - c \cdot \sin(t) + d \cdot \cos(t)$ для $t = 0;\ t = \pi/2$.

$$\begin{aligned} &S(0) = a + c; && S'(0) = b + d; \\ &S(\pi/2) = a + b \cdot \pi/2 + d; && S'(\pi/2) = b - c. \end{aligned} \quad (8)$$

Запишемо попередній вираз в матричній формі

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \pi/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} \text{ або } A \cdot K = S. \tag{9}$$

Перетворимо попереднє рівняння до вигляду $A^{-1} \cdot S = K$. Тобто невідомі коефіцієнти $a, b, c, d$ в матричному вигляді запишуться як

$$\frac{1}{(\pi-4)} \cdot \begin{bmatrix} \pi-2 & -2 & 2 & \pi-2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -(\pi-2) \\ 2 & -2 & \pi-2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ S(\pi/2) \\ S'(0) \\ S'(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Підставимо отримані значення $a, b, c, d$ до загального виразу сплайну $S(t)$.

$$\begin{aligned} S_i(t) = {} & \frac{-2t + 2\sin(t) + (\pi-2) - 2\cos(t)}{\pi-4} S(t_i) + \\ & + \frac{-2 + 2t + 2\cos(t) - 2\sin(t)}{\pi-4} S(t_{i+1}) + \\ & + \frac{-2\cos(t) + 2 - 2t + \sin(t)\cdot(\pi-2)}{\pi-4} S'(t_i) + \\ & + \frac{-2t + (\pi-2) - \cos(t)\cdot(\pi-2) + 2\sin(t)}{\pi-4} S'(t_{i+1}). \end{aligned} \tag{11}$$

Отриманий вираз і є модифікований тригонометричний сплайн. Розглянемо його особливості. Побудуємо графіки для виразів, що є коефіцієнтами біля $S(t_i)$, $S(t_{i+1})$, $S'(t_i)$ та $S'(t_{i+1})$ на нормованому діапазоні зміни параметра $t \in [0; \pi/2]$ (рис. 2). Графіки базові функції $f1(t)$, $f2(t)$, $f3(t)$ та $f4(t)$ подібні до графіків базових функцій, що використовуються в Ермітових кубічних сплайнах.

Замість кубічного поліному в тригонометричних сплайнах використовуються функції $\sin(x)$ та $\cos(x)$. Комбінацією базових функцій з різними коефіцієнтами досягається необхідна форма результуючої інтерполяційної кривої.

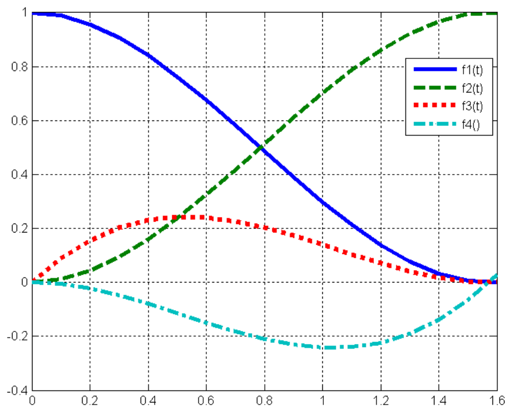


Рис. 2. Графіки базових функцій модифікованого тригонометричного сплайну

В модифікованих тригонометричних сплайнах умова рівності перших похідних наступного та попереднього сплайнів в точках інтерполяційної сітки виконується автоматично.

Для практичної перевірки розроблених сплайнів використовувались наближений та точний методи розрахунку значень похідних функції в базових точках. У наближеному методі використовувалась наступна формула для оцінки похідної в точці.

$$S'(t_i)=\frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right);\ i=\overline{2;n-1};\ \ S'(t_1)=R_1;\ S'(t_n)=R_n. \tag{12}$$

Для розрахунку похідних точним методом використовувалась умова рівності другої похідної сусідніх сплайнів в точці базової сітки. В результаті отримуємо три діагональну матрицю, для якої розроблені прості, швидкі та ефективні методи розв'язку.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pi-2 & 4 & \pi-2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \pi-2 & 4 & \pi-2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1' \\ S_2' \\ S_3' \\ \dots' \\ S_{n-1}' \\ S_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 2S(t_3)-2S(t_1) \\ 2S(t_4)-2S(t_2) \\ \dots \\ 2S(t_n)-2S(t_{n-2}) \\ R_n \end{bmatrix}. \tag{13}$$

В роботі виконано порівняння результатів інтерполяції тестових функцій (рис. 3) розробленими тригонометричними, кубічними ермітовими та кубічними сплайнами. Розраховувались два параметра – максимальне та середнє відхилення від заданої функції. Порівняння виконувалось в математичному програмному пакеті Matlab. Для розрахунку похідних в точках заданої сітки для розробленої тригонометричної інтерполяції використовувався точний метод.

Принципи розрахунку невідомих коефіцієнтів точним методом як для кубічних, так і для тригонометричних сплайнів подібні (запис системи рівнянь у вигляді трьох діагональної матриці, використовуючи умови рівності перших, других чи третіх похідних в точках базової сітки). Маємо зменшення кількості обчислювальних операцій майже в два рази, так як для запису представленого тригонометричного сплайну потрібно знайти два невідомі коефіцієнта, а для кубічного сплайну чотири.

| № | Test function | Trigonometric spline | | Build-in cubic spline | | Build-in Hermit cubic spline | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Max deviation | Avarage deviation | Max deviation | Avarage deviation | Max deviation | Avarage deviation |
| | Range: [-3;3] Base points step: 1 | | | | | | |
| 1 | y(x)=sin(x); | 0,104889 | 0,028665 | 0,02582 | 0,007272 | 0,1020998 | 0,0447857 |
| 2 | y(x)=sin(x-4)/(x-4); | 0,030349 | 0,005447 | 0,001438 | 0,000389 | 0,0254267 | 0,0073458 |
| 3 | y(x)=5*sin(2.35*(x-4))/(2.35*(x-4)); | 0,482579 | 0,087279 | 0,329301 | 0,101368 | 0,2594364 | 0,0955018 |
| 4 | y(x)=cos(x + pi*sin(x)); | 0,621575 | 0,221688 | 0,807216 | 0,394041 | 0,5034373 | 0,1834317 |
| 5 | y(x)=x*x+6*x*sin(2.35*x)-x; | 3,068849 | 0,665464 | 5,349651 | 1,077704 | 0,8740624 | 0,2698698 |
| 6 | y(x)=exp(-x)*x-4*sin(x)+x*x; | 8,890636 | 1,378476 | 1,133822 | 0,166572 | 1,9664006 | 0,2962781 |
| 7 | y(x)=-6*log(x+5)-5*cos(7.4+x)+3*(x+1.4)^2; | 2,26613 | 0,546463 | 0,138833 | 0,031744 | 0,6027429 | 0,1699115 |
| | Range: [-3;3] Base points step: 1.5 | | | | | | |
| 1 | y(x)=sin(x); | 0,013763 | 0,004854 | 0,149319 | 0,062802 | 0,069885 | 0,0237042 |
| 2 | y(x)=sin(x-4)/(x-4); | 0,002401 | 0,000803 | 0,01438 | 0,003408 | 0,0463163 | 0,0206871 |
| 3 | y(x)=5*sin(2.35*(x-4))/(2.35*(x-4)); | 0,639324 | 0,260555 | 1,089036 | 0,423659 | 1,2077216 | 0,4142087 |
| 4 | y(x)=cos(x + pi*sin(x)); | 1,468809 | 0,561322 | 1,502816 | 0,635485 | 1,4326627 | 0,544801 |
| 5 | y(x)=x*x+6*x*sin(2.35*x)-x; | 8,014166 | 3,646212 | 10,77768 | 4,810733 | 11,626778 | 5,009647 |
| 6 | y(x)=exp(-x)*x-4*sin(x)+x*x; | 2,906073 | 0,615329 | 3,032684 | 0,595653 | 4,7158127 | 1,0649447 |
| 7 | y(x)=-6*log(x+5)-5*cos(7.4+x)+3*(x+1.4)^2; | 0,354815 | 0,108379 | 0,681842 | 0,275148 | 1,766565 | 0,6155208 |
| | Range: [-3;9] Base points step: 2 | | | | | | |
| 1 | y(x)=sin(x); | 0,093807 | 0,029676 | 0,305572 | 0,091257 | 0,3629802 | 0,1413543 |
| 2 | y(x)=sin(x-4)/(x-4); | 0,999062 | 0,018059 | 0,980054 | 0,032231 | 0,841471 | 0,0618698 |
| 3 | y(x)=5*sin(2.35*(x-4))/(2.35*(x-4)); | 3,168729 | 0,874825 | 3,149483 | 0,88186 | 3,3041661 | 0,8927825 |
| 4 | y(x)=cos(x + pi*sin(x)); | 1,879901 | 0,547854 | 1,840222 | 0,621442 | 1,8766381 | 0,6017218 |
| 5 | y(x)=x*x+6*x*sin(2.35*x)-x; | 82,82197 | 17,22043 | 68,51703 | 15,34398 | 63,441132 | 14,291907 |
| 6 | y(x)=exp(-x)*x-4*sin(x)+x*x; | 3,078905 | 0,528288 | 5,815503 | 0,830068 | 9,5841147 | 1,1251938 |
| 7 | y(x)=-6*log(x+5)-5*cos(7.4+x)+3*(x+1.4)^2; | 4,339903 | 0,823069 | 1,917737 | 0,403498 | 1,8596811 | 0,6219784 |

Рис. 3. Результати сплайнової інтерполювання тестових функцій. Зеленим (світло-сірим) та коричневим (темно-сірим) виділено перший та другий кращі результати інтерполювання

## ВИСНОВОК

Враховуючи те, що всі процеси в природі мають періодичний характер, розробка та реалізація методів обробки (інтерполяції) псевдоперіодичних дискретних даних є актуальною та необхідною. В цій роботі запропоновано новий підхід і нову модель для реалізації тригонометричного сплайну. Проведено порівняння результатів інтерполювання тестових функцій розробленими тригонометричними, кубічними та ермітовими сплайнами. В результаті чого зроблено висновок, що розроблені тригонометричні сплайни мають кращі інтерполяційні характеристики для періодичних чи псевдоперіодичних кривих в порівнянні зі згаданими методами. Для практичної реалізації сплайнів представлено два методи розрахунку невідомих коефіцієнтів. Запропонований тригонометричний сплайн, подібно до сплайну Ерміта, потребує виконання меншої кількості обчислювальних операцій (майже в два рази) для побудови інтерполяційної функції порівняно з кубічними сплайнами.

Подальше дослідження та розвиток задачі обробки псевдоперіодичних функцій має відбуватися в руслі збільшення вимірності (кількості змінних в сплайні) та застосування розробленої моделі на окремих практичних задачах.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Introduction to scientific computing : [Електронний ресурс] / Juan Restrepo // Numerical Analysis & Scientific Computing — 2001. — № 1. — P. 128–137. — Режим доступу до журн. : http://math.arizona.edu/~jmcmahon/mathnotes/numerical.html.
2. Interpolation methods: [Електронний ресурс] / Paul Bourke // Miscellaneous: projection, modelling, rendering — 1999. — № 1. — P. 1. — Режим доступу до журн. : http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/miscellaneous/interpolation/.
3. Implementing Uniform Trigonometric Spline Curves: [Електронний ресурс] / Robert F. Kauffmann // Dobbs Portal. Architecture&Design — 2007. — № 1. — P. 1–9. — Режим доступу до журн. : http://www.ddj.com/architect/184410198.
4. Квєтний Р. Н. Тригонометрична інтерполяція сплайнами / Р.Н. Квєтний, В. Ю. Дементьєв // Вісник вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 5. – С. 67–68.

Надійшла до редакції 20.01.2009р.

**КВЄТНИЙ РОМАН НАУМОВИЧ – д.т.н., проф., зав. каф АІВТ, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, *E-mail: rkvetny@mail.ru.***

**ДЕМЕНТЬЄВ ВІКТОР ЮРІЙОВИЧ – аспірант каф. АІВТ, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.**